مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1396، دوره 17، شماره 5، ص‌ص 405-412

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی انتشار موج تنش در میله یک‌بعدی میکروپولار با استفاده از روش توسعه‌یافته المان محدود موج

محسن میرزاجانی[1]، ناصر خاجی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 397-14115، nkhaji@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اسفند 1395

پذیرش: 28 فروردین 1396

ارائه در سایت: 24 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

نظریه الاستیسیته میکروپولار

روش المان محدود موج

انتشار امواج

میله میکروپولار

ضربه

چکیده

در این مطالعه روش المان محدود موج جهت مدل‌سازی انتشار موج تنش در میله ناهمگن، خطی، ناهمسانگرد میکروپولار با سطح مقطع متغیر توسعه داده شده است. برای این منظور معادلات روش المان محدود موج بر پایه نظریه الاستیسیته میکروپولار توسعه داده شده و برای میله میکروپولار دو نوع موج با سرعت‌های سریع و کند شناسایی شده است. در نظریه میکروپولار یک درجه آزادی دورانی علاوه‌بر درجات آزادی نظریه کلاسیک الاستیسیته در نظر گرفته شده است. روش پیشنهادی در این مقاله برای حل مسائل انتشار امواج و همچنین ضربه در میله میکروپولار با لایه‌های مختلف به کار برده شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از این روش با نتایج تحلیلی و/ یا عددی موجود مقایسه شده‌اند که تطابق بسیار خوبی بین این نتایج به‌دست‌آمده است.

Stress wave propagation modelling in one-dimensional micropolar rods using a new Wave Finite Element Method

Mohsen Mirzajani, Naser Khaji*

Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115–397, Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 March 2017
Accepted 17 April 2017
Available Online 14 May 2017

Keywords:
Micropolar Elasticity
Wave Finite Element Method
Wave propagation
Micropolar rod
Impact

ABSTRACT

In this paper, the Wave Finite Element Method (WFEM) is developed for modelling of stress wave propagation in one-dimensional problem of nonhomogeneous linear, anisotropic micropolar rod of variable cross section. For this purpose, the WFEM equations are developed based on the micropolar theory of elasticity. Two kinds of waves with fast and slow velocities are detected. For micropolar medium, an additional rotational Degree of Freedom (DOF) is considered besides the classical elasticity's DOF. The method proposed in this paper is implemented to solve the wave propagation and impact problems in micropolar rods with different layers. The results of the proposed method are compared with some numerical and/or analytical solutions available in the literature, which indicate excellent agreement between the results.

1- مقدمه

مطالعه انتشار امواج در مصالح دارای میکروساختار[1] مانند کامپوزیت‌ها، فوم‌ها، سرامیک‌ها و مصالح دانه‌ای [2,1] یکی از موضوع‌های با اهمیت در علم و فناوری به حساب می‌آید. نظریه الاستیسیته کلاسیک برای این نوع از مصالح قادر به مدل کردن کامل پدیده انتشار موج نیست. برای این منظورنظریه‌های تعمیم‌یافته یا مرتبه بالا پیشنهاد شده‌اند. نظریه برادران کوزرات که با نام نظریه میکروپولار[2] نیز شناخته می‌شود، یکی از نظریه‌های مرتبه بالای برجسته به شمار می‌آید که برای نخستین بار توسط برادران کوزرات توسعه داده شده است [3]. نظریه‌های الاستیسیته مرتبه بالا در مراجع دیگر [5,4] نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. تنش‌های مزدوج[3] علاوه‌بر تنش‌های نیرویی در نظریه میکروپولار معرفی شده‌اند [6-9].

نظریه خطی الاستیسیته گرادیان[4] برای حل مسئله میله تحت اثر کشش‌های یک‌محوری استاتیکی و دینامیکی در مرجع [10]، در مرجع [11] نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش برای مطالعه ارتعاش آزاد طولی

[1] microstructure
[2] micropolar
[3] couple stresses
[4] theory of gradient elasticity

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Mirzajani, N. Khaji, Stress wave propagation modelling in one-dimensional micropolar rods using a new Wave Finite Element Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 405-412, 2017 (in Persian)

میکرومیله‌های مدرج تابعی[1] مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌هایی از مطالعه‌های تجربی در نظریه الاستیسیته میکروپولار برای تعیین خصوصیات مصالح میکروپولار در مراجع [12-16] مطالعه شده است.

ضربه سرعت پایین در کامپوزیت‌های لایه‌ای با تورق چندگانه با استفاده از روش المان محدود در مرجع [17] مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات موج از تعادل نیرویی برای جابه‌جایی و برای دوران سطح مقطع در مرجع [18] توسعه داده شده و برای انکسار موج در رینگ‌های دایره‌ای جدار نازک مورد استفاده قرار گرفته است. تست‌های فشار دینامیکی تجربی و مدل‌سازی المان محدود برای مطالعه رفتارهای ماکروسکوپیک و محلی فوم‌های پروپیلن تحت بارهای دینامیکی در مرجع [19] ارائه شده است. وجود موج‌های رایلی متفرق‌کننده در مطالعه انتشار موج با استفاده از نظریه‌های مرتبه بالا در مراجع [21,20] و. انتشار موج صفحه‌ای در سیال میکروپولار در مرجع [22] مطالعه شده است. برای مطالعه انتشار موج صفحه‌ای در میله بی‌نهایت با سطح مقطع مستطیلی، نظریه الاستیسیته میکروپولار ارینگن[2] در مرجع [23] به کار برده شده است. مدلی از نوع میندلین برای توصیف موج‌های تغییرشکلی طولی در جسم‌های دارای میکروساختار در مرجع [24] استفاده شده است.

انتشار موج در یک نیم‌فضای بی‌نهایت میکروپولار و انعکاس موج‌های جابه‌جایی طولی صفحه‌ای از یک سطح هموار گیردار نیم‌فضای الاستیک میکروپولار در مرجع [25] بررسی شده است. نظریه خطی الاستیسیته گرادیان برای حل تحلیلی مسئله میله تحت اثر کشش تک محوری استاتیکی و دینامیکی در مرجع [26] مورد استفاده قرار گرفته است. انتشار موج در موجبر استوانه‌ای با میکروساختار به صورت تئوری در مرجع [27] توسعه داده شده است.

روش المان محدود برای شبیه‌سازی مسائل انتشار امواج از قدرتمندترین روش‌ها محسوب می‌شود. این روش برای مدل‌سازی خصوصیات موج در فرایندهای ناپایا[3] دارای نقص‌های ذاتی است. در سال‌های اخیر اصلاحاتی برای افزایش دقت این روش برای مسائل انتشار امواج پیشنهاد شده‌اند [29,28]. روش دیگری که با نام روش المان محدود موج[4] شناخته می‌شود و در سال‌های اخیر پیشنهاد شده است [30-33]. قابلیت این روش در مدل‌سازی گسستگی‌ها شدید در سرعت‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها با سرعت موج محدود مزیت روش المان محدود موج است. روش المان محدود کلاسیک در این گونه از مسائل دچار ضعف ذاتی است. در این روش نیازی به فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل حرکت نیست و در نتیجه حل‌های تقریبی مورد نیاز نیست.

در این مقاله معادلات روش المان محدود موج برای حل مسائل انتشار موج و مسائل ضربه با در نظر گرفتن نظریه میکروپولار در میله‌های ناهمگن[5] الاستیک با سطح مقطع مختلف برای نخستین بار توسعه داده شده است. هدف مقاله حاضر ارائه راه‌حل و معادلات جدید توسعه داده شده برای حل مسائل انتشار موج و ضربه در میله میکروپولار یک بعدی و بررسی توانایی روش المان محدود موج در حل این گونه مسائل است. مثال‌های عددی با استفاده از معادلات پیشنهادی جدید برای ارزیابی صحت و دقت معادلات پیشنهادی حل شده‌اند.

[1] functionally graded microbars
[2] Eringen's micropolar theory of elasticity
[3] nonstationary
[4] the Wave Finite Element Method (WFEM)
[5] nonhomogeneous

2- محیط کوزرات (میکروپولار)

در این بخش روابط مربوط به مسائل مقدار اولیه مرزی مختلط[6] در محیط میکروپولار خطی ارائه شده است. برای این منظور روابط پایه این مسائل برای محیط میکروپولار ناهمسانگرد بیان شده‌اند. تفاوت اصلی بین الاستیسیته کلاسیک و نظریه‌های پولار[7] براساس این فرض است که نقاط مصالح جهت‌گیری خاصی را داراست. در نظریه میکرومورفیک[8] علاوه‌بر درجات آزادی نظریه کلاسیک، نُه درجه آزادی اضافی همراه با سه دایرکتور انعطاف‌پذیر معرفی شده است. در نظریه میکرواسترچ[9] این درجات آزادی به چهار کاهش می‌یابند. در نظریه میکروپولار درجات آزادی برابر سه همراه با دایرکتورهای صلب هستند [9].

در الاستیسیته میکروپولار جابه‌جایی u_l، تانسور تنش نیرویی σ_{kl}، و میکروجابه‌جایی[10] ψ_l مستقل از سایر درجات آزادی و همچنین تانسور تنش مزدوج[11] μ_{kl} در نظر گرفته می‌شود. تانسورهای کرنش خطی به صورت روابط (2,1) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lkm}\psi_m \tag{1}$$

$$\gamma_{kl} = \psi_{k,l} \tag{2}$$

e_{lkm} تانسور لوی- چیویتا[12] است. معادله‌های ساختاری[13] میکروپولار برای مصالح ناهمسانگرد که تانسورهای تنش نیرویی و مزدوج را به تانسورهای کرنش خطی مرتبط می‌کنند به صورت روابط (4,3) بیان می‌شوند [34,9].

$$\sigma_{kl} = A_{klmn}\varepsilon_{mn} + C_{klmn}\gamma_{mn} \tag{3}$$

$$\mu_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} + B_{klmn}\gamma_{mn} \tag{4}$$

A_{klmn}، B_{klmn} و C_{klmn} مدول مصالح هستند. چگالی انرژی کرنشی و انرژی جنبشی برای این نوع مصالح به صورت روابط (6,5) تعریف می‌شوند.

$$P = \frac{1}{2}(A_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + 2C_{klmn}\varepsilon_{kl}\gamma_{mn} + B_{klmn}\gamma_{kl}\gamma_{mn}) \tag{5}$$

$$K = \frac{1}{2}(\rho v_k^2 + \rho j_{kl}\omega_k^2) \tag{6}$$

ρ چگالی جرمی، v_k بردار سرعت و ω_k سرعت زاویه‌ای است. علاوه‌بر آن میکرواینرسی[14] j_{kl} برای مصالح همسانگرد اسپین[15] به صورت $j_{kl} = j\delta_{kl}$ تعریف می‌شود.

3- معادلات روش المان محدود موج بر پایه الاستیسیته میکروپولار

3-1- فرض‌های اساسی روش المان محدود موج

در این قسمت فرض‌های اساسی روش المان محدود موج با در نظر گرفتن یک میله الاستیک یکنواخت توضیح داده می‌شود (شکل 1). در این قسمت از بیان معادلات مربوط به روش المان محدود موج اجتناب شده و فقط به صورت توصیفی نحوه مدل‌سازی مسائل یک بعدی توضیح داده شده است. در قسمت بعدی این مقاله معادلات جدید پیشنهادی برای حل مسئله میله میکروپولار ارائه خواهد شد.

این میله به طول L، و سطح مقطع ثابت A، سرعت اولیه میله در لحظه $t_0 = 0$ برابر $v_0(x)$ است، در حالی که نیروهای طولی T_0^+ و T_0^- در دو

[6] mixed boundary initial value problem
[7] polar theories
[8] micromorphic continuum theory
[9] microstretch continuum theory
[10] microdisplacement field
[11] couple stress tensor
[12] Levi-Civita tensor
[13] constitutive equations
[14] microinertia
[15] spin-isotropic material

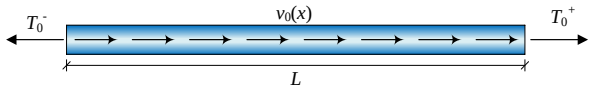


Fig. 1 A One-dimensional elastic rod

شکل 1 یک میله یک‌بعدی الاستیک

انتهای میله اعمال می‌شوند. برای این میله فرایند حل روش المان محدود موج به صورت زیر اعمال می‌شود:

- میله به n المان به طول $\Delta x = L/n$ تقسیم، و فرایند تغییر شکل در طول زمان به گام‌های زمانی کوچک $\Delta t = \Delta x/c$ تقسیم می‌شود، که Δx اندازه المان را نشان می‌دهد، و $c = \sqrt{E/\rho}$ سرعت انتشار موج طولی است (E مدول الاستیسیته است). بالانویس «+» به سمت راست المان اشاره دارد، در حالی که علامت «-» نشان‌دهنده سمت چپ المان است.
- المان‌ها به صورت $j = 1,2,\dots,n$، و گره‌های بین المان‌ها به صورت $j = 1,2,\dots,n+1$ شماره‌گذاری می‌شوند. فرض می‌شود که در لحظه‌های زمانی گسسته t^- (یعنی در انتهای گام زمانی پیشین)، تنش‌ها و سرعت‌های یکنواخت در کل المان j (شامل مرزهای این المان نیز می‌شود) و برای هر کدام از المان‌ها مشخص شده باشند. نتیجه این فرض گسستگی‌های شدید تنش و سرعت در مرزهای المان‌های مجاور خواهد بود. این گسستگی‌ها برای یک جسم پیوسته فقط در یک لحظه زمانی بسیار کوچک می‌توانند وجود داشته باشند، و باید در لحظه زمانی t^+ به تنش‌ها و سرعت‌های جدید گرهی کاهش پیدا کنند.
- نتیجه این گسستگی‌ها انتشار جبهه‌های موج تنش، کرنش و سرعت از هر گره به المان‌های مجاور با سرعت ثابت c خواهد بود. با معلوم بودن معادله‌های ساختاری مصالح و این‌که سرعت‌ها و بارهای گرهی در طول گام زمانی Δt تغییر نمی‌کنند، می‌توان فرایند انتشار جبهه موج به سمت یکدیگر، رسیدن این جبهه‌های موج به یکدیگر در وسط المان و انکسار این موج‌ها به سمت مرزهای المان را محاسبه کرد. برای آنالیز عددی تغییر تنش و سرعت در طول گام‌های زمانی، قوانین بقای جرم و ضربه[1] باید به طور صحیح برای هر المان محدود و همچنین برای کل مدل برآورده شوند. جابه‌جایی‌ها در گره‌های مشترک المان‌های مجاور در کل فرایند انتشار موج پیوسته هستند و در هر گام زمانی به صورت $\Delta u_j = v_j^+ \Delta t$ تغییر می‌کنند.
- پس از گام زمانی Δt، یک حالت شبه‌استاتیکی[2] جدید در هر المان برقرار می‌شود که اجازه تکرار فرایند محاسبات را می‌دهد.
- نیروهای خارجی در طول المان فقط به گره‌های المان‌ها اختصاص داده می‌شوند. همچنین نیروها فقط در آغاز گام زمانی می‌توانند تغییر کنند و پس از آن در طول این گام زمانی ثابت خواهند بود. فرض مشابهی برای سرعت‌های گره‌ها در نظر گرفته می‌شود.
- در لحظه زمانی خیلی نزدیک t^+، حالت مکانیکی هر المان ثابت باقی خواهد ماند (یعنی شبه‌استاتیکی)، اما سرعت و جابه‌جایی در گره‌ها، مقدارهای جدیدی به خود می‌گیرند.
- وضعیت جدید هر المان j در لحظه زمانی t^+ با استفاده از حالت‌های معلوم خود المان و المان‌های مجاور $j \pm 1$ در گام زمانی پیشین و نیروهای اثرکننده به گره‌های آن در طول گام زمانی مشخص تعریف می‌شود. تنها المان‌های مجاور انتشار جبهه موج در یک المان را تحت اثر قرار می‌دهند؛ در حالی که بارهای اعمالی در گره‌های با فاصله زیاد، و از حالت‌ها[3] (یعنی سرعت‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها) در المان‌های با فاصله زیاد به مرزهای المان موجود در این گام زمانی نخواهند رسید.
- محاسبه حالت جدید هر المان بدون در نظر گرفتن محاسبات مربوط به المان‌های دیگر و با استفاده از فرمول‌های جبری بنیادی صورت می‌گیرد. راه حل ارائه شده به صورت نامشروط پایدار است.

[1] laws of mass and impulse conservations
[2] quasi-static state

3-2- معادله‌های روش المان محدود موج برای میله یک بعدی میکروپولار

در این بخش معادلات روش المان محدود موج برای مدل‌سازی انتشار موج در میله مستقیم، خطی، یک بعدی، ناهمسانگرد[4] میکروپولار با تغییرشکل‌های کوچک توسعه داده می‌شوند. در نظریه الاستیسیته میله میکروپولار، تغییرشکل جسم با استفاده از جابه‌جایی محوری $u(x,t)$ و میکروجابه‌جایی زاویه‌ای $\psi(x,t)$ تعیین می‌شود.

برای مدل یک‌بعدی میله موقعیت طول میله با x تعیین می‌شود. سینماتیک میله میکروپولار در شکل 2 نشان داده شده است، که کرنش نرمال و کرنش میکروپولار به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{11} = \gamma = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7}$$

رابطه تنش-کرنش برای میله یک بعدی، الاستیک، ناهمسانگرد میکروپولار با استفاده از روابط (9,8) توصیف می‌شود.

$$\sigma_{11} = \sigma = A_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1111}\gamma_{11} = \bar{C}_1\varepsilon + \bar{C}_3\gamma \tag{8}$$

$$\mu_{11} = \mu = C_{1111}\varepsilon_{11} + B_{1111}\gamma_{11} = \bar{C}_3\varepsilon + \bar{C}_2\gamma \tag{9}$$

که $A_{1111} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}_1$، $C_{1111} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}_3$ و $B_{1111} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}_2$ پارامترهای ساختاری[5] هستند که رفتار الاستیک میله را توصیف می‌کنند [36,35]. علاوه‌بر آن اندرکنش بین تغییرشکل طولی و دوران با این ضرایب کنترل می‌شود. این پارامترها مشابه با ضرایب A، B و C که در مرجع [35] پیشنهاد شده است.

فرض شود المان‌ها در لحظه t_{i-1}^- در یک حالت شبه‌استاتیکی قرار دارند. در این لحظه مقادیر سرعت‌های طولی $v_{j,0}$ و زاویه‌ای $\omega_{j,0}$ و جابه‌جایی‌های مرزی $u_{j,0}^{\pm}$ و دوران $\psi_{j,0}^{\pm}$ برای هر المان $j = 1,2,\dots,n$ معلوم است. کرنش‌های نرمال و میکروپولار را می‌توان با استفاده از رابطه (10) محاسبه کرد.

$$\varepsilon_{j,0} = \frac{u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-}{\Delta x_j}, \quad \gamma_{j,0} = \frac{\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-}{\Delta x_j}. \tag{10}$$

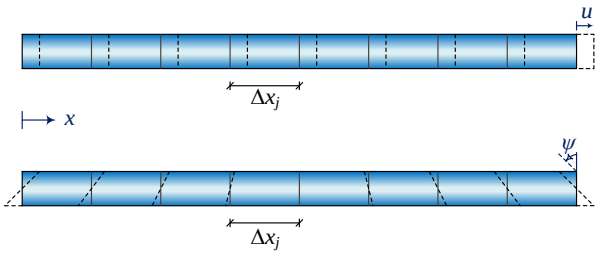


Fig. 2 Axial displacement and rotation of a micropolar rod from its initial to a deformed formation

شکل 2 جابه‌جایی محوری و دوران یک میله میکروپولار در دو حالت اولیه و تغییرشکل‌یافته

[3] states
[4] anisotropic
[5] constitutive parameters

رابطه تنش-کرنش در میله میکروپولار برای هر المان به صورت رابطه (11) ارائه می‌شود.

$$\sigma_{j,0} = C_1\varepsilon_{j,0} + C_3\gamma_{j,0}, \quad \mu_{j,0} = C_3\varepsilon_{j,0} + C_2\gamma_{j,0}. \tag{11}$$

با داشتن این روابط می‌توان خصوصیات مکانیکی المان j را در لحظه t_{i-1}^- به‌دست آورد. برای این منظور انرژی جنبشی با استفاده از رابطه (12) محاسبه می‌شود.

$$K_{j,0} = \frac{1}{2}\rho\left(Av_{j,0}^2 + C_4\omega_{j,0}^2\right) \tag{12}$$

A سطح مقطع و C_4 اینرسی- اسپین مصالح را بیان می‌کند که در کرنش‌های کوچک ثابت فرض می‌شود. با استفاده از اصل هامیلتون[1] چگالی انرژی کرنشی توسط رابطه (13) ارائه می‌شود.

$$P_{j,0} = \frac{1}{2\Delta x_j}\rho\left(C_1\left(u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-\right)^2 + 2C_3\left(u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-\right) \times \left(\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-\right) + C_2\left(\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-\right)^2\right) \tag{13}$$

نیروهای $T_{j,0}^+$ و ممان‌های $H_{j,0}^+$ اثرکننده به المان در گره‌های آن را می‌توان به صورت روابط (15,14) نوشت.

$$T_{j,0}^+ = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial u_{j,0}^+} = \frac{\rho}{\Delta x_j}\left(C_1\left(u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-\right) + C_3\left(\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-\right)\right) \tag{14}$$

$$H_{j,0}^+ = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial \psi_{j,0}^+} = \frac{\rho}{\Delta x_j}\left(C_3\left(u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-\right) + C_2\left(\psi_{j,0}^+ - \psi_{j,0}^-\right)\right) \tag{15}$$

که در آن رابطه (16) را به صورت زیر داریم.

$$T_{j,0}^- = -T_{j,0}^+, \quad H_{j,0}^- = -H_{j,0}^+ \tag{16}$$

نیروی $T_{j,0}$ و ممان $H_{j,0}$ داخلی برای المان j در هر سطح مقطع با استفاده از رابطه (17) ارائه می‌شود.

$$T_{j,0} = T_{j,0}^+, \quad H_{j,0} = H_{j,0}^+ \tag{17}$$

قوانین مومنتوم خطی و مومنتوم زاویه‌ای در طول گام زمانی برای آنالیز انتشار نیرو و ممان با سرعت‌های موج طولی و زاویه‌ای به صورت روابط (18-21) تعیین می‌شوند.

$$T_{j-1}^+ = T_{j-1,0} + \frac{\left(v_{j-1}^+ - v_{j-1,0}\right)\rho_{j-1}A_{j-1}\Delta x_{j-1}}{\Delta t_i} \tag{18}$$

$$T_j^- = -T_{j,0} + \frac{\left(v_j^- - v_{j,0}\right)\rho_j A_j \Delta x_j}{\Delta t_i} \tag{19}$$

و

$$H_{j-1}^+ = H_{j-1,0} + \frac{\left(\omega_{j-1}^+ - \omega_{j-1,0}\right)\rho_{j-1}C_{4_{j-1}}\Delta x_{j-1}}{\Delta t_i} \tag{20}$$

$$H_j^- = -H_{j,0} + \frac{\left(\omega_j^- - \omega_{j,0}\right)\rho_j C_{4_j}\Delta x_j}{\Delta t_i} \tag{21}$$

اگر نیروی اصطکاک ویسکوز خارجی[2] $T_j^{\mathrm{fr}} = -\eta_{\mathrm{v}} v_j$ و ممان اصطکاک ویسکوز خارجی $H_j^{\mathrm{fr}} = -\eta_\omega \omega_j$ به گره داخلی j اعمال شود، کار انجام یافته توسط این نیروها برابر رابطه (22) می‌شود.

$$\Delta W_j = \left(T_j^{\mathrm{fr}} v_j + H_j^{\mathrm{fr}}\omega_j\right)\Delta t_i = -\left(\eta_{\mathrm{v}} v_j^2 + \eta_\omega \omega_j^2\right)\Delta t_i \tag{22}$$

در این رابطه η_{v} و η_ω ضرایب ویسکوز را نشان می‌دهند، و T_j^{fr} و H_j^{fr} نشان‌دهنده نیرو و ممان اصطکاکی خارجی ویسکوز خطی است. با استفاده از فرض‌های روش المان محدود موج این نیروهای اصطکاکی خارجی با نیروهای گرهی معادل جایگزین می‌شوند که با نیروهای T_j^* و ممان‌های H_j^* خارجی جمع می‌شوند.

[1] Hamilton's principle
[2] external viscous friction force

دوباره با اعمال قانون‌های مومنتوم خطی و زاویه‌ای به کل المان j در طول گام زمانی Δt_i، سرعت‌های جدید خطی v_j و زاویه‌ای ω_j در لحظه $t_i^- = t_{i-1}^- + \Delta t_i$ به صورت روابط (24,23) محاسبه می‌شود.

$$v_j = v_{j,0} + \frac{\left(T_j^+ + T_j^-\right)\Delta t_i}{\rho_j A_j \Delta x_j} \tag{23}$$

$$\omega_j = \omega_{j,0} + \frac{\left(H_j^+ + H_j^-\right)\Delta t_i}{\rho_j C_{4_j}\Delta x_j} \tag{24}$$

با استفاده از روابط (18-21, 24,23) می‌توان روابط (26,25) را نوشت.

$$v_j = v_j^+ + v_j^- - v_{j,0} \tag{25}$$

$$\omega_j = \omega_j^+ + \omega_j^- - \omega_{j,0} \tag{26}$$

جابه‌جایی و دوران جدید گرهی را می‌توان با استفاده از روابط (28,27) به‌دست آورد:

$$u_j^\pm = u_{j,0}^\pm + v_j^\pm \Delta t_i \tag{27}$$

$$\psi_j^\pm = \psi_{j,0}^\pm + \omega_j^\pm \Delta t_i \tag{28}$$

شرط سازگاری و شرط تعادل در مرز مشترک بین المان‌ها با استفاده از روابط (29-31) ارائه می‌شود.

$$v_{j-1}^+ = v_j^-, \quad \omega_{j-1}^+ = \omega_j^- \tag{29}$$

$$T_j^* - T_{j-1}^+ - T_j^- - 0.5\eta_{\mathrm{v}} v_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right) = 0 \tag{30}$$

$$H_j^* - H_{j-1}^+ - H_j^- - 0.5\eta_\omega \omega_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right) = 0 \tag{31}$$

به منظور بیان تمامی پارامترها در لحظه t_i^- در ترم‌های گام زمانی Δt_i، روابط (18-21) را در روابط (29-31) جایگذاری می‌کنیم که منجر به روابط زیر می‌شود:

$$v_j^- = \frac{\rho_j A_j \Delta x_j v_{j,0} + \rho_{j-1}A_{j-1}\Delta x_{j-1} v_{j-1,0}}{\rho_j A_j \Delta x_j + \rho_{j-1}A_{j-1}\Delta x_{j-1} + 0.5\eta_{\mathrm{v}} v_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right)\Delta t_i} + \frac{\left(T_j^* + T_{j,0} - T_{j-1,0}\right)\Delta t_i}{\rho_j A_j \Delta x_j + \rho_{j-1}A_{j-1}\Delta x_{j-1} + 0.5\eta_{\mathrm{v}} v_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right)\Delta t_i} \tag{32}$$

$$\omega_j^- = \frac{\rho_j C_{4_j}\Delta x_j \omega_{j,0} + \rho_{j-1}C_{4_{j-1}}\Delta x_{j-1}\omega_{j-1,0}}{\rho_j C_{4_j}\Delta x_j + \rho_{j-1}C_{4_{j-1}}\Delta x_{j-1} + 0.5\eta_\omega \omega_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right)\Delta t_i} + \frac{\left(H_j^* + H_{j,0} - H_{j-1,0}\right)\Delta t_i}{\rho_j C_{4_j}\Delta x_j + \rho_{j-1}C_{4_{j-1}}\Delta x_{j-1} + 0.5\eta_\omega \omega_j\left(\Delta x_j + \Delta x_{j-1}\right)\Delta t_i} \tag{33}$$

جهت محاسبه تنش‌های نیرویی و مزدوج با استفاده از نیروها و ممان‌های روابط (18-21)، می‌توان از روابط (34-37) استفاده کرد.

$$\varepsilon_j = \frac{C_{3_j}H_j - C_{2_j}T_j}{C_{3_j}^2 - C_{1_j}C_{2_j}} \tag{34}$$

$$\gamma_j = \frac{C_{3_j}T_j - C_{1_j}H_j}{C_{3_j}^2 - C_{1_j}C_{2_j}} \tag{35}$$

$$\sigma_j = C_{1_j}\varepsilon_j + C_{3_j}\gamma_j \tag{36}$$

$$\mu_j = C_{3_j}\varepsilon_j + C_{2_j}\gamma_j \tag{37}$$

برای محاسبه مقدار گام زمانی Δt_i که برای کل سیستم مشترک است باید از تعادل انرژی کل جسم استفاده شود. قانون تعادل انرژی برای کل جسم به صورت رابطه (38) نوشته می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta K_j + \Delta P_j - \Delta W_j\right) = 0 \tag{38}$$

که در آن $\Delta K_j = K_j - K_{j,0}$ و $\Delta P_j = P_j - P_{j,0}$ به صورت رابطه

(39) است.

$$\sum_{j=1}^{n}(K_j+P_j)-\sum_{i=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}=0 \qquad (39)$$

این روش یک حل پایدار نامشروط را ارائه می‌دهد. برای میله همگن گام زمانی Δt برای کل المان‌ها یکسان است و تعادل انرژی برای هر المان درست خواهد بود.

4- مثال‌های عددی

در این بخش پنج مثال برای سنجش صحت و دقت معادله‌های پیشنهادی، همچنین قابلیت روش المان محدود موج برای حل مسائل میله میکروپولار حل شده‌اند که نتایج آن‌ها در حالت بی‌بعد نمایش داده شده‌اند.

4-1- میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی

مثال نخست یک میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی تحت اثر نیروی فشاری ثابت 0.1N است، که به طور ناگهانی در زمان $t=0$ اعمال می‌شود (شکل 3). پارامترهای ساختاری به صورت رابطه (40) انتخاب شده است.

$$C_1=10.8\,,\quad C_2=1\,,\quad C_3=-1\,,\quad C_4=0.02743 \qquad (40)$$

شرایط اولیه به صورت رابطه (41) و شرایط مرزی به صورت رابطه (42) است.

$$v_{j,in}=0,\qquad \omega_{j,in}=0$$
$$u_{j,in}^{\pm}=0,\qquad \psi_{j,in}^{\pm}=0,\qquad j=1,2,\dots,n \qquad (41)$$
$$T_1^-=T_0,\qquad H_1^-=H_0,\qquad v_n^+=0,\qquad \omega_n^+=0 \qquad (42)$$

نتایج مربوط به پیشینه زمانی جابه‌جایی، دوران و تنش در وسط میله در شکل‌های 4-6 نشان داده شده و دقت نتایج نیز بسیار خوب است.

4-2- میله کانتیلور میکروپولار یک بعدی دو لایه

در این مثال انعکاس و انکسار امواج تنش به دلیل تفاوت امپدانس در لایه مشترک یک میله دو لایه مورد مطالعه قرار گرفته است. یک میله کانتیلور تحت اثر بار فشاری در شکل 7 نشان داده شده است. لایه اول این میله

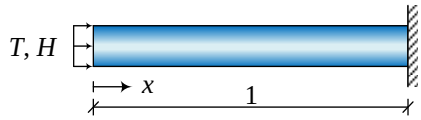


Fig. 3 A 1D micropolar cantilever rod subjected to a constant force and moment

شکل 3 میله کانتیلور میکروپولار تحت اثر نیرو و ممان ثابت

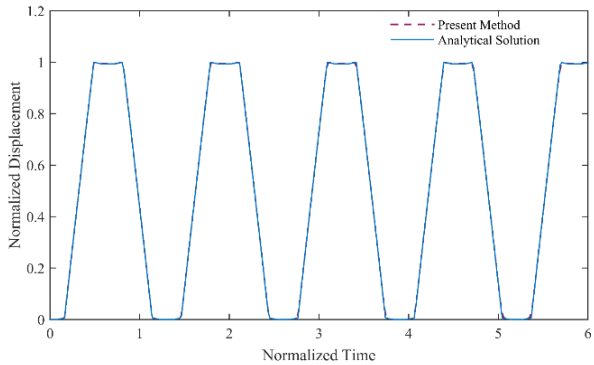


Fig. 4 Normalized displacement at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 4 جابه‌جایی نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

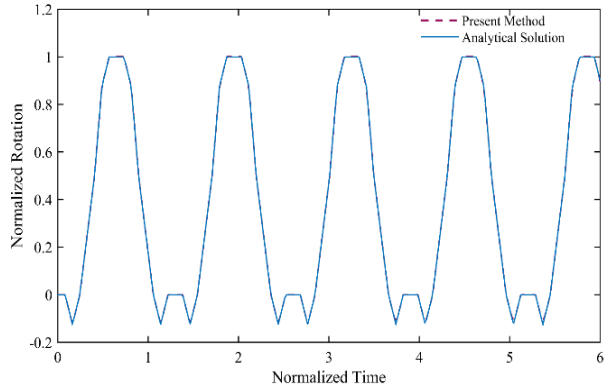


Fig. 5 Normalized rotation at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 5 دوران نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

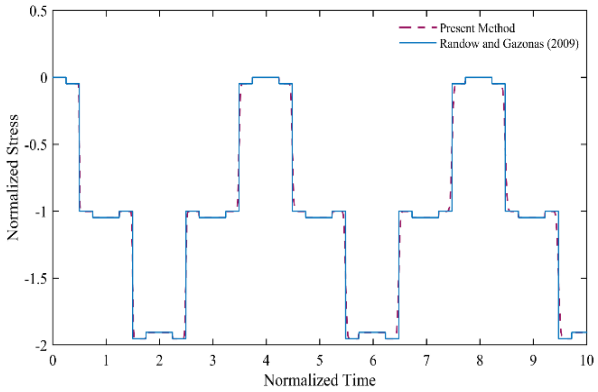


Fig. 6 Normalized stress at the midpoint of the micropolar rod for the first example

شکل 6 تنش نرمال در وسط میله میکروپولار مثال اول

$(0\le x\le 1/2)$ غیر میکروپولار، در حالی که لایه دوم $(1/2\le x\le 1)$ میکروپولار در نظر گرفته شده است. پارامترهای ساختاری برای این دو لایه به صورت روابط (44,43) است.

$$0\le x\le\frac{1}{2}$$
$$C_1=10.8,\qquad C_2=10^6,$$
$$C_3=10^{-6},\qquad C_4=0.02743\times10^6 \qquad (43)$$
$$\frac{1}{2}\le x\le 1$$
$$C_1=10.8,\qquad C_2=10^2$$
$$C_3=27.57,\qquad C_4=0.02743\times10^2 \qquad (44)$$

نتایج مربوط به روش کنونی در $x=0.4$ و $x=0.6$ با نتایج ارائه شده در مرجع [35] مقایسه شده و در شکل‌های 8 و 9 نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشخص است روش المان محدود موج با موفقیت برای حل مسائل میله میکروپولار به کار برده شده است.

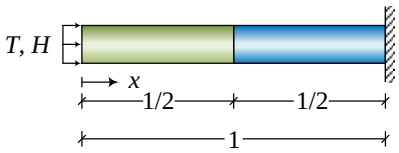


Fig. 7 A two-layer 1D micropolar cantilever rod subjected to a constant force and moment

شکل 7 یک میله کانتیلور یک بعدی میکروپولار دو لایه تحت اثر نیرو و ممان ثابت

4-3- برخورد دو میله میکروپولار

برخورد دو میله میکروپولار در این قسمت شبیه‌سازی شده، میله اول به طول 1/3 و میله دوم به طول 2/3 است (هندسه این مثال در شکل 10 نشان داده شده است). پارامترهای ساختاری مشابه مثال دوم است. این مثال با استفاده از معادلات توسعه داده شده روش المان محدود موج حل شده است. شکل 11 پیشینه زمانی سرعت نرمال شده در $x = 1$، شکل 12 انتقال موج‌های تنش به وجود آمده ناشی از برخورد دو میله میکروپولار را در چهار زمان مختلف نشان می‌دهد. نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از روش المان محدود موج تطابق خوبی با نتایج ارائه شده در مرجع [35] دارند.

4-4- برخورد دو میله میکروپولار با مصالح مختلف

این مثال جهت مدل‌سازی برخورد دو میله میکروپولار با مصالح مختلف به یکدیگر در نظر گرفته شده است (مشابه شکل 10). پارامترهای ساختاری این

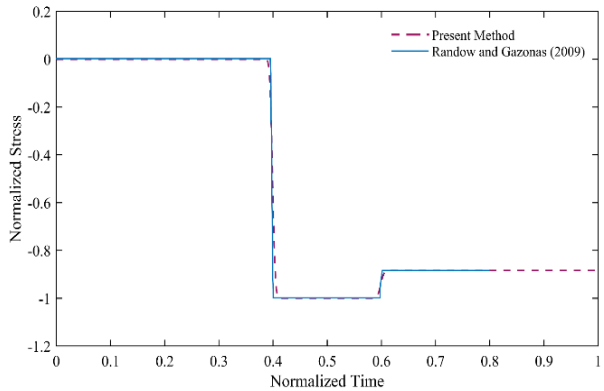


Fig. 8 Normalized stress at $x = 0.4$ of the micropolar rod for the second example

شکل 8 تنش نرمال در $x = 0.4$ میله میکروپولار مثال دوم

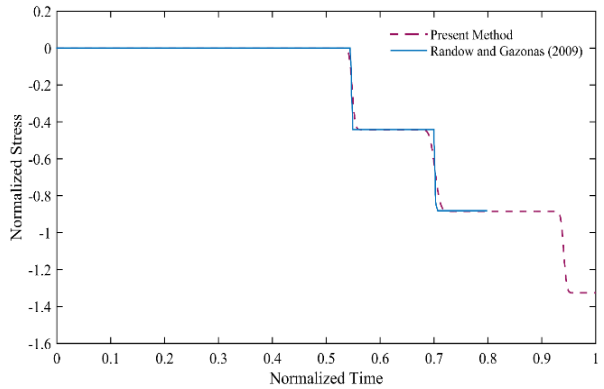


Fig. 9 Normalized stress at $x = 0.6$ of the micropolar rod for the second example

شکل 9 تنش نرمال در $x = 0.6$ میله میکروپولار مثال دوم

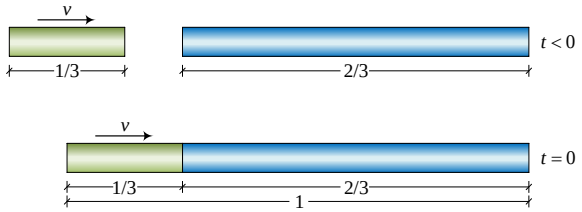


Fig. 10 Impact of two micropolar and non-micropolar rods of the third example

شکل 10 برخورد دو میله میکروپولار و غیرمیکروپولار در مثال سوم

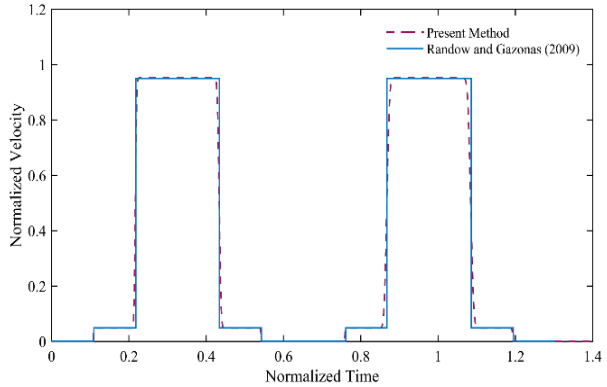
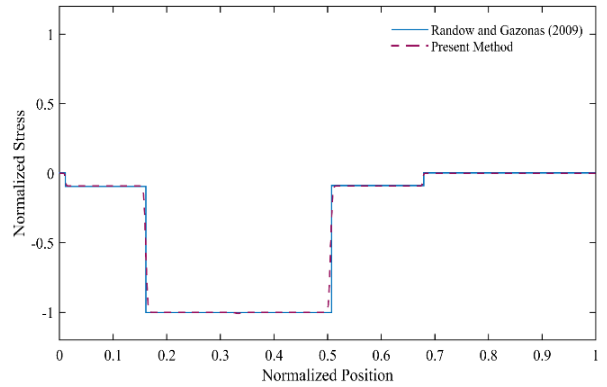
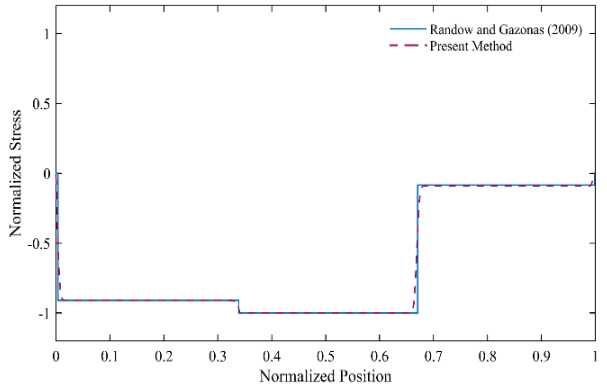


Fig. 11 Normalized velocity at $x = 1$ for the third example

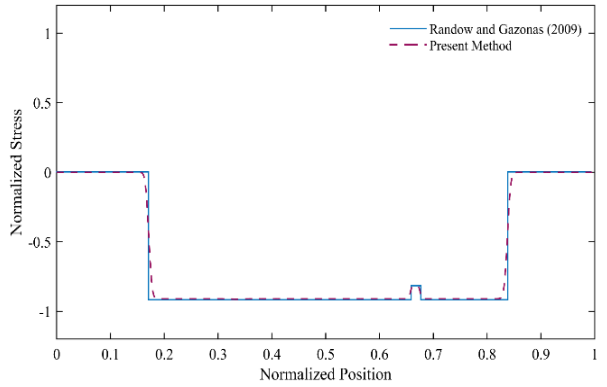
شکل 11 سرعت نرمال در $x = 1$ برای مثال سوم



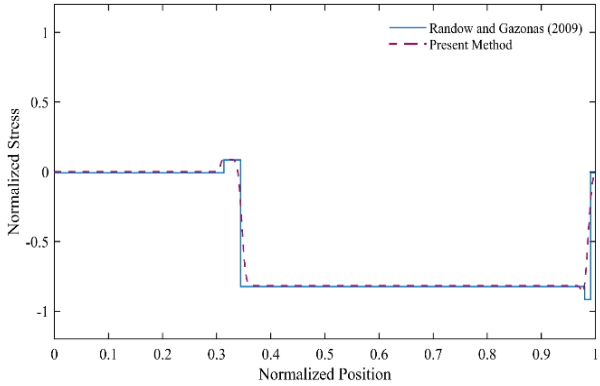
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 12 Transformation of the normalized stress along the rod at four various times, for the third example

شکل 12 انتقال تنش نرمال در طول میله در چهار زمان مختلف برای مثال سوم

مثال مشابه مثال دوم انتخاب شده است. نتایج مربوط به روش حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [35] برای سرعت نرمال در $x = 1$ مقایسه شده‌اند. این نتایج در شکل 13 باهم مقایسه شده‌اند که تطابق خوبی به‌دست‌آمده است.

4-5- اندرکنش دو موج در یک میله میکروپولار دوسر آزاد

به عنوان مثال آخر یک میله میکروپولار دوسر آزاد که دو نیروی کششی با دو فرم مختلف در دو انتهای آن وارد می‌شوند در نظر گرفته شده است. ضربه سمت راست مستطیلی شکل و ضربه سمت چپ مثلثی شکل است. انتقال امواج تنش به وجود آمده از این نیروها در شکل 14 برای شش لحظه زمانی مختلف نشان داده شده است که می‌توان دو موج سریع و کند را در این شکل‌ها مشاهده کرد.

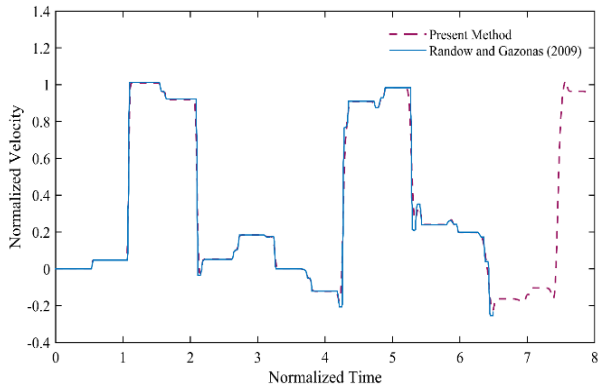
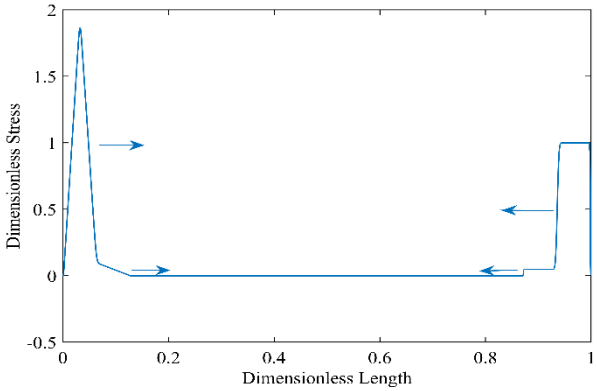
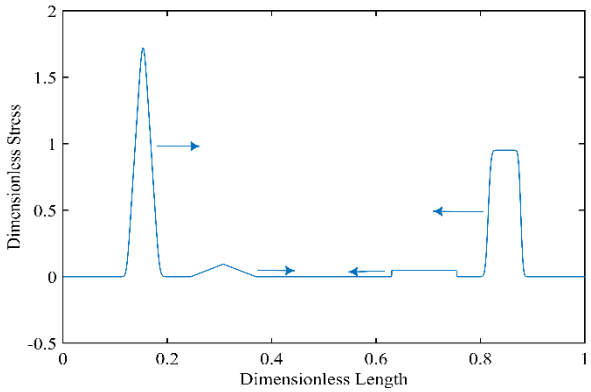


Fig. 13 Normalized velocity at $x = 1$ for the fourth example

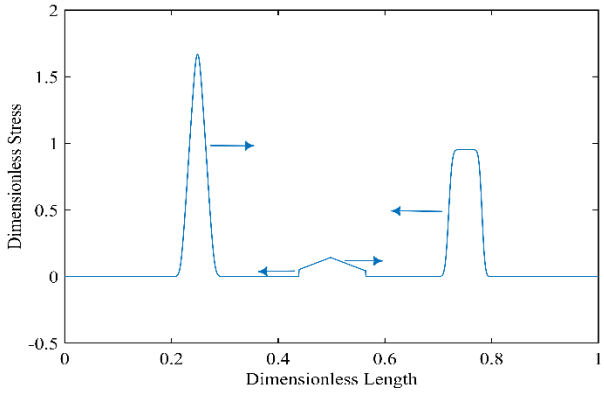
شکل 13 سرعت نرمال در $x = 1$ مثال چهارم



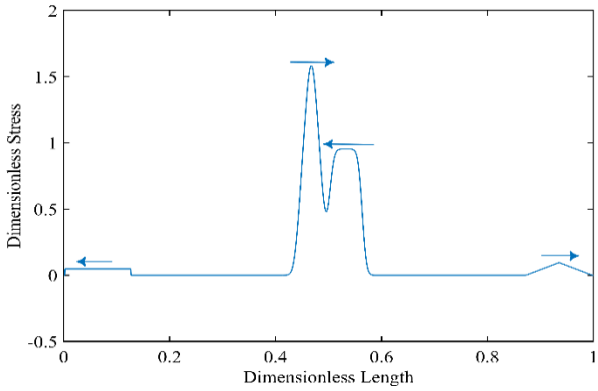
(a)



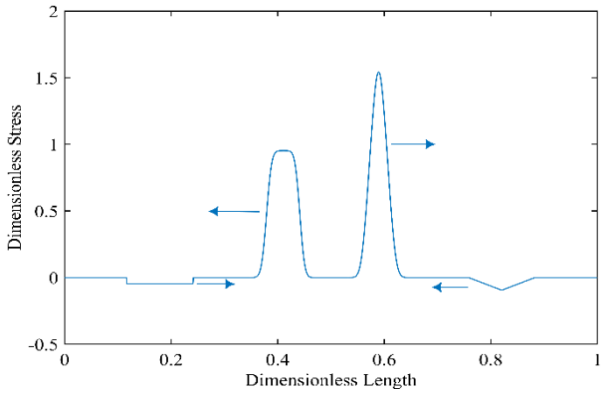
(b)



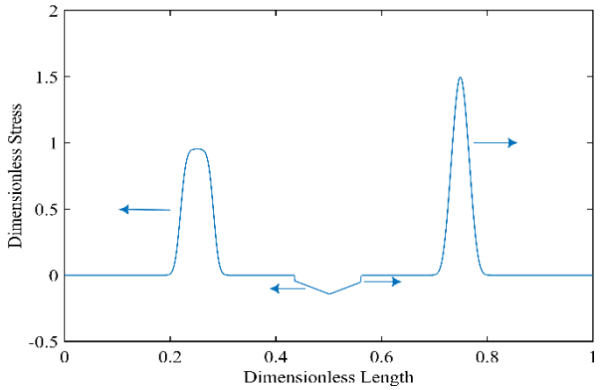
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 14 Transformation of different counter-waves in a free-free micropolar rod

شکل 14 انتقال امواج با شکل‌های مختلف در یک میله دو سر آزاد میکروپولار

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات روش المان محدود موج برای حل مسائل میله ناهمگن، ناهمسانگرد یک بعدی میکروپولار با سطح مقطع متفاوت توسعه داده شدند. دو نوع موج با دو سرعت مختلف شبیه‌سازی شدند. همان‌گونه که در فرایند حل روش المان محدود موج اشاره شد، شبیه‌سازی انتشار موج بدون فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل با حل‌های تقریبی انجام پذیرفت. جهت توصیف قابلیت و صحت این روش برای مسائل انتشار امواج و همچنین مسائل ضربه مثال‌های پایه میله میکروپولار مدل‌سازی شدند. تطابق بسیار خوبی بین نتایج روش پیشنهادی و حل‌های عددی و/ یا تحلیلی موجود به‌دست آمد که حاکی از قابلیت مناسب روش پیشنهادی است. در این مقاله نشان داده شد که روش المان محدود موج یک روش قدرتمند برای حل مسائل انتشار موج و ضربه در میله میکروپولار که روش المان محدود کلاسیک دارای ضعف ذاتی در حل این‌گونه از مسائل است.

6- مراجع

[1] S. Diebels, H. Steeb, Stress and couple stress in foams, *Computational Materials Science*, Vol. 28, No. 3, pp. 714-722, 2003.
[2] A. C. Eringen, G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua I: Foundations and Solid Media*, pp. 128-179, New York: Springer, 1990.
[3] E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, pp. 1-6, Paris: Hermann et fils, 1909.
[4] R. Lakes, Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua, *in: H. B. Muhlhaus (Editor), Continuum Models for Materials with Microstructure*, pp. 1–25, Chichester, UK: Wiley, 1995.
[5] G. E. Exadaktylos, I. Vardoulakis, Microstructure in linear elasticity and scale effects: A reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics, *Tectonophysics*, Vol. 335, No. 1, pp. 81-109, 2001.
[6] W. T. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., Vol. 67, No. 1, pp.17-44, 1964.
[7] W. Nowacki, *Theory of asymmetric elasticity*, pp. 1–138, Pergamon-Press, Oxford, 1986.
[8] G. A. Maugin, On the structure of the theory of polar elasticity, *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences Royal Society*, Vol. 356, No. 1741, pp. 1367-1395, 1998.
[9] A. C. Eringen, *Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids*, pp. 101-248, New York: Springer, 1999.
[10] K. G. Tsepoura, S. Papargyri-Beskou, D. Polyzos, D. E. Beskos, Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6-7, pp. 483-497, 2002.
[11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM), *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, No. 1, pp. 263-268, 2013.
[12] R. D. Gauthier, W. E. Jahsman, A quest for micropolar elastic constants, *Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 2, pp. 369-374, 1975.
[13] J. F. C. Yang, R. S. Lakes, Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending, *Biomechanics*, Vol. 15, No. 2, pp. 91-98, 1982.
[14] R. S. Lakes, Size effects and micromechanics of a porous solid, *Materials Science*, Vol. 18, No. 9, pp. 2572-2580, 1983.
[15] R. S. Lakes, Experimental microelasticity of two porous solids, *Solids and Structures*, Vol. 22, No. 1, pp. 55-63, 1986.
[16] W. B. Anderson, R. S. Lakes, Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam, *Materials Science*, Vol. 29, No. 24, pp. 6413-6419, 1994.
[17] N. Hu, H. Sekine, H. Fukunaga, Z. H. Yao, Impact analysis of composite laminates with multiple delaminations, *Impact Engineering*, Vol. 22, No. 6, pp. 633-648, 1999.
[18] V. P. W. Shim, Y. B. Guo, R. Lan, Elastic stress transmission in cellular systems-Analysis of wave propagation, *Impact Engineering*, Vol. 35, No. 8, pp. 845-869, 2008.
[19] L. Maheo, P. Viot, Impact on multi-layered polypropylene foams, *Impact Engineering*, Vol. 53, No. 1, pp. 84-93, 2013.
[20] H. G. Georgiadis, E. G. Velgaki, High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects, *Solids and Structures*, Vol. 40, No.10, pp. 2501-2520, 2003.
[21] H. G. Georgiadis, I. Vardoulakis, E. G. Velgaki, Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity, *Elasticity*, Vol. 74, No. 1, pp. 17-45, 2004.
[22] D. Singh, S. K. Tomar, Longitudinal waves at a micropolar fluid/solid interface, *Solids and Structures*, Vol. 45, No. 1, pp. 225-244, 2008.
[23] R. Y. Vasudeva, R. K. Bhaskara, Wave motion in micropolar elastic bars with rectangular cross section, *Engineering Science*, Vol. 17, No. 8, pp. 965-971, 1979.
[24] M. Randrüüt, M. Braun, On one-dimensional solitary waves in microstructured solids, *Wave Motion*, Vol. 47, No. 4, pp. 217-230, 2010.
[25] T. Ariman, Wave propagation in a micropolar elastic half-space, *Acta mechanica*, Vol. 13, No. 1, pp. 11-20, 1972.
[26] K. G. Tsepoura, S. Papargyri-Beskou, D. Polyzos, D. E. Beskos, Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 483-497, 2002.
[27] A. Charalambopoulos, L. N. Gergidis, G. Kartalos, On the gradient elastic wave propagation in cylindrical waveguides with microstructure, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 6, pp. 2613-2627, 2012.
[28] S. Ham, K. J. Bathe, A finite element method enriched for wave propagation problems, *Computers & Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 1-12, 2012.
[29] G. Noh, S. Ham, K. J. Bathe, Performance of an implicit time integration scheme in the analysis of wave propagations, *Computers & Structures*, Vol. 123, No. 1, pp. 93-105, 2013.
[30] B. F. Shorr, Mathematical modelling of wave propagation in a rod of time-dependent material, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 397-416, 1997.
[31] B. F. Shorr, Analysis of wave propagation in elastic-plastic rods of a variable cross section using direct mathematical modelling, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 65, No. 8, pp. 537-547, 1995.
[32] B. F. Shorr, A wave approach to finite element analysis of solids, *Mechanics Research Communications*, Vol. 26, No. 2, pp. 191-196, 1999.
[33] B. F. Shorr, *The wave finite element method*, pp. 1-158, Berlin Heidelberg, New York: Springer, 2004.
[34] W. Nowacki, *Theory of Asymmetric Elasticity (Translated By H. Zorski)*, pp. 1-49, Poland and Oxford, United Kingdom: Polish Scientific Publishers (PWN) and Pergamon Press, Warsaw (Warszawa), 1986.
[35] C. L. Randow, G. A. Gazonas, Transient stress wave propagation in one-dimensional micropolar bodies, *Solids and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 1218-1228, 2009.
[36] H. Shahsavari, M. Ostoja-Starzewski, On elastic and viscoelastic helices, *Philosophical Magazine*, Vol. 85, No. 33-35, pp. 4213-4230, 2005.