مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1396، دوره 17، شماره 5، ص‌ص 287-294

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری برای سیستم کوادروتور

مهدی فرهادی[1]، مرضیه کمالی[2*]، جواد عسگری[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

3- دانشیار، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

* اصفهان، کدپستی 84156-83111، m.kamali@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 14 دی 1395

پذیرش: 05 فروردین 1396

ارائه در سایت: 17 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

کنترل کننده مد لغزشی

معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری

چترینگ

کوادروتور

چکیده

کوادروتورها یک نمونه از هواپیماهای بدون سرنشین هستند که دارای ویژگی‌های منحصر به فردی در مقایسه با دیگر پهپادها می‌باشند که می‌توان به برخواست و فرود به صورت عمودی، پرواز در محیط‌های کوچک و قابلیت مانور بالای آن‌ها اشاره کرد. همچنین ساختار نسبتا ساده، مقرون به صرفه و سیستم پرواز آسان کوادروتورها سبب شده است که به صورت گسترده‌ای به منظور توسعه، پیاده سازی و تست انواع روش‌های کنترل استفاده شوند. یکی از روش‌های کنترل مقاوم، کنترل مد لغزشی می‌باشد که با وجود قابلیت‌های بالای کنترل مد لغزشی این روش یک اشکال عمده دارد و آن نوسان فرکانس بالا در سیگنال ورودی کنترل است که به پدیده‌ی چترینگ و یا وزوز معروف است. در چند دهه گذشته معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری به زمینه‌های کاربردی مهندسی از جمله طراحی کنترل کننده‌ها وارد شده‌اند و امکان طراحی کنترل کننده‌هایی در جهت بهبود عملکرد مطلوب سیستم را فراهم کرده‌اند. در این مقاله از یک سطح لغزش مرتبه کسری برای طراحی قانون کنترل مد لغزشی برای کوادروتور استفاده شده است. هدف، بهبود عملکرد و کم کردن پدیده چترینگ در روش مد لغزشی می‌باشد. در این راستا با تعریف سطح لغزش PD^{α} قانون کنترل در دو حالت مختلف $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < \alpha < 2$ طراحی گردیده و تأثیر α در عملکرد سیستم کنترل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. با بررسی شبیه‌سازی‌ها بر روی مدل ریاضی کوادروتور می‌توان گفت که با تعیین مقدار بهینه α در سطح لغزش مرتبه کسری PD^{α} می‌توان مقدار دامنه چترینگ در ورودی کنترل را بهبود بخشید.

Fractional order sliding mode controller design for quadrotor system

Mehdi Farhadi, Marzieh Kamali*, Javad Askari

Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
* P.O.B. 84156-83111 Isfahan, Iran, m.kamali@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 January 2017
Accepted 25 March 2017
Available Online 07 May 2017

Keywords:
Sliding mode control
Fractional order equations
Chattering
Quadrotor

ABSTRACT

Quadrotors are types of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) which have unique features compared to conventional aircraft because of its vertical take-off and landing capability, flying in small areas and its high maneuverability. Also the relatively simple, economical and easy flight system of quadrotors, allows it to be widely used as a good platform for development, implementation and testing a variety of control methods. One of the robust control methods is sliding mode control. In spite of the high capabilities of this approach, it has one main problem which is high frequency switching of the control signal which is known as the chattering phenomenon. In the past several decades, fractional order differential equations have been implemented in engineering application field, including controller design and provides the possibility of using controllers for improving the performance of system. In this paper, a fractional order sliding surface has been employed for designing sliding mode control rule for quadrotors. The main objective of this study is to improve the performance and reduce the chattering phenomenon in sliding mode method. In this regard, by introducing sliding PD^{α} surface, the control rule is designed in two different modes of $0 < \alpha \leq 1$ and $1<\alpha<2$ and the effect of α in the performance of the system is evaluated. Based on conducted simulations, it can be inferred that using an optimal value for α in fractional order sliding PD^{α} surface decreases the chattering in control input.

1- مقدمه

یکی از موضوعات اصلی در طراحی کنترل کننده‌ها، کنترل تحت شرایط نامعینی و عدم قطعیت در پارامترها می‌باشد. به همین دلیل در سال‌های اخیر پژوهش‌ها و مطالعات زیادی بر روی فرآیندهایی که دارای نامعینی هستند انجام گرفته است و با وجود توسعه‌ی گسترده‌ی انواع روش‌های موفق کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم هنوز علاقه‌مندی فزاینده‌ای برای استفاده از روش‌های کنترل مد لغزشی به‌دلیل مشخصه‌ی مقاوم بودن بالا و نیز سادگی آن در مقابله با عدم قطعیت و نامعینی‌های غیرپارامتری و دینامیک‌های مدل نشده وجود دارد [1]. با وجود قابلیت‌های بالای کنترل مد لغزشی، این روش یک اشکال عمده دارد و آن نوسان در ورودی کنترل به‌دلیل وجود تابع ناپیوسته‌ی علامت در ورودی کنترل است که به پدیده‌ی چترینگ و یا وزوز معروف است. پدیده‌ی چترینگ می‌تواند منجر به نوسانات ناخواسته در سیستم کنترل شود

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Farhadi, M. Kamali, J. Askari, Fractional order sliding mode controller design for quadrotor system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 287-294, 2017 (in Persian)

و رفتار سیستم را از حالت ایده‌آل خارج کند. همچنین به‌دلیل داشتن فرکانس‌های بالای سوئیچینگ ممکن است باعث ایجاد رزونانس و تحریک دینامیک‌های مدل نشده سیستم شود که درنهایت موجب افت عملکرد سیستم خواهد شد [2].

برای حذف پدیده‌ی چترینگ چندین روش وجود دارد. یکی از روش‌های پرکاربرد برای کاهش لرزش یا نوسانات ناخواسته روش تقریب پیوسته است که نسبت به روش‌های دیگر کاربرد بیشتری دارد. این روش با ایجاد یک لایه مرزی باریک در اطراف سطح لغزش، ناپیوستگی سیگنال کنترل را هموار می‌کند. استفاده از روش تقریب پیوسته در هر صورت منجر به کاهش دقت کنترلی می‌شود و خطای ماندگار در این روش صفر نمی‌گردد [3]. روش دیگر هموار کردن نوسانات ناخواسته، استفاده از الگوریتم فازی در تعیین دامنه لایه مرزی باریکی در اطراف سطح لغزش است که مشکل این روش، کند شدن روش کنترلی است [5,4]. از روش‌های دیگر برای کاهش پدیده‌ی چترینگ استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه‌ی بالا است که با استفاده از این روش، علاوه بر حفظ مزیت‌های اصلی روش کنترل مد لغزشی استاندارد می‌توان از رخ دادن پدیده‌ی چترینگ بدون کاهش دقت جلوگیری کرد [2]. یکی از مشکلات این روش زمانی است که دینامیک‌های مزاحم باعث افزایش درجه نسبی سیستم می‌شوند و در این حالت الگوریتم کنترل مد لغزشی مرتبه بالا نیز با مشکل چترینگ مواجه می‌شود. علاوه بر این، طراحی قانون کنترل برای تضمین خواص همگرایی سیستم با استفاده از روش‌های سیستماتیک برای کنترل مد لغزشی مرتبه بالا و حتی مرتبه دوم نیز مشکل به‌نظر می‌رسد [6].

در چند سال گذشته و پس از توسعه مفاهیم معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در زمینه‌های کاربردی مهندسی، مشخص شد که بسیاری از سیستم‌ها می‌توانند توسط این معادلات توصیف شوند [7]. همچنین با به‌کارگیری این معادلات، امکان طراحی کنترل کننده‌هایی با عملکرد بهتر در قیاس با کنترل کننده‌های مرتبه صحیح فراهم شده است. محاسبات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری، سابقه‌ی قدیمی و در حدود 300 سال در علم ریاضیات دارد و قدمت آن بر می‌گردد به معادلات دیفرانسیل معمولی و زمانی که معادلات دیفرانسیل توسط لایبنز و نیوتن کشف شد. مسئله معادلات مرتبه کسری اولین بار توسط لایبنز در نامه‌ای در سپتامبر سال 1695 میلادی درباره‌ی مشتق مرتبه‌ی کسری، مطرح و به موضوعی که تحقیق در مورد آن برای مدت بیش از 100 سال ادامه داشت، تبدیل گردید [3]. در بسیاری از سال‌ها این شاخه از علم به عنوان یک موضوع نظری مطرح بود و تقریباً هیچ برنامه‌ی کاربردی برای آن در نظر گرفته نشده بود اما در دهه‌های اخیر، محاسبات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی کسری به یک موضوع جالب توجه در میان محققان تبدیل شده است [7].

ایده‌ی طراحی کنترل کننده‌های مرتبه‌ی کسری، اولین بار توسط اوستلوپ در سال 1988 میلادی مطرح شد. او طرح یک کنترل کننده‌ی مرتبه‌ی کسری مقاوم را معرفی کرد و آن را کرون[1] نام‌گذاری کرد. سپس در سال 1994 میلادی، پادلابنی یک کنترل کننده پی‌آی‌دی مرتبه‌ی کسری را معرفی کرد که امروزه جزء شناخته شده‌ترین، کنترل کننده‌های مرتبه کسری است. از آن زمان بسیاری از روش‌های مختلف در رابطه با کنترل کننده‌های مرتبه‌ی کسری بررسی شده‌اند که کنترل کننده‌های بهینه‌ی مرتبه‌ی کسری، کنترل کننده‌های تطبیقی و کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه‌ی کسری از آن دسته هستند [7]. در [3] یک کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری فازی برای یک دسته از سیستم‌های غیرخطی بیان شده است و از یک سطح لغزش مرتبه کسری با مرتبه‌ی کسری کمتر از یک برای طراحی قانون کنترل استفاده شده است. روش ارائه شده در مورد دو سیستم بازوی ربات و مخازن به هم متصل مورد بررسی قرار گرفته و به این نتیجه رسیده است که با استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری، سیستم کنترل در ردیابی مسیر مطلوب می‌تواند پاسخ مقاوم‌تر و سریع‌تری بدهد. سپس با هدف کاهش پدیده چترینگ از الگوریتم فازی در تعیین بهره تابع علامت، استفاده کرده است. در [6] روش کنترل مد لغزشی مرتبه کسری براساس تنظیم پارامترها به روش کنترل فازی در مورد یک سرو موتور بررسی شده است. این مقاله نیز در طراحی قانون کنترل مد لغزشی از سطح لغزش مرتبه کسری بهره برده و با استفاده از یک تابع لیاپانوف معروف پایداری آن اثبات شده است. نتایج حاصله در این مقاله نشان می‌دهد که ردیابی خطا و تضمین پایداری در حضور اختلال و نیز کاهش نوسانات در سیگنال خروجی در روش کنترل مد لغزشی مرتبه کسری براساس تنظیم پارامترها توسط کنترل فازی نسبت به مرتبه صحیح آن عملکرد بهتری دارد. همچنین در [8] یک روش کنترل مد لغزشی مرتبه کسری برای سیستم ترمز ضد قفل و برای تنظیم لغزش به مقدار موردنظر ارائه شده است. در این مقاله از یک سطح لغزش PD^{α} برای طراحی قانون کنترل مد لغزشی استفاده شده است و نتایج آزمایشات تجربی در این مقاله نشان می‌دهد که این روش در مقایسه با به‌کارگیری سطح لغزش مرتبه صحیح PI و P در مقابله با نامعینی در سیستم ترمز ضد قفل و رساندن سرعت لغزش به مقدار مطلوب عملکرد بهتری دارد.

هدف در این مقاله، بررسی تأثیر استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری در طراحی قانون کنترل در مورد سیستم کوادروتور با استفاده از روش کنترل مد لغزشی و نیز بهبود و مقایسه عملکرد آن با نوع مرتبه صحیح می‌باشد. برای این منظور در ابتدا مروری بر تعاریف اولیه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بیان می شود. سپس مدل ریاضی کوادروتور و معادلات کنترل موقعیت آن برحسب زوایای مطلوب معرفی می‌شود. درنهایت با استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری PD^{α} قانون کنترل به‌ازای $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < \alpha < 2$ به‌طور جداگانه طراحی و تأثیر سطح لغزش به ازای α های مختلف در عملکرد سیستم کنترل و حذف پدیده چترینگ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و نتایج حاصله با یکدیگر قیاس می‌شوند. همچنین در این مقاله مشتق مرتبه کسری بر هر دو بخش کنترل پیوسته و کنترل گسسته تاثیر می‌گذارد و پایداری قانون کنترل نیز بر این مبنا اثبات می‌شود. برخلاف پژوهش‌های پیشین مانند مقالاتی چون [3] و [6] که در آن‌ها استفاده از معادلات مرتبه کسری در طراحی قانون کنترل بر کاهش میزان چترینگ بی تاثیر بوده و از روش‌های هوشمند مانند روش تنظیم پارامترها به‌وسیله کنترل فازی برای کاهش دامنه‌ی نوسانات سیگنال ورودی کنترل بهره برده‌اند، در این مقاله تاثیر مستقیم مشتق مرتبه کسری سطح لغزش در طراحی قانون کنترل مد لغزشی بر کاهش پدیده چترینگ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- تعاریف اولیه در محاسبات مرتبه‌ی کسری

معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی کسری، تعمیم یافته‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی یک هستند. در واقع، تلاش برای گسترش تعاریف خاصی از مرتبه‌ی صحیح به مرتبه‌های اختیاری منجر به ایجاد تعاریف مختلفی برای مشتقات و انتگرال‌های مرتبه‌ی کسری گردید. از معروف‌ترین این تعاریف، تعریف ریمان – لیویل[2] و تعریف کاپوتو[3] است.

[1] CRONE (Command Robust d'Order Non-Entier)

[2] Riemann–Liouville

[3] Caputo

فرض کنید اعداد حقیقی با $\mathbb{R}$، اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$، اعداد صحیح مثبت را با $\mathbb{Z}^+$ و همچنین اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان داده شوند. با در نظر گرفتن این فرض ابتدا تعاریفی از محاسبات مرتبه کسری ارائه می‌شود.

تعریف1 [9]. انتگرال کسری با مرتبه کسری $\alpha \in \mathbb{R}^+$ از تابع $f(t)$ به صورت

$$D_{t_0,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{1}$$

تعریف می‌شود. که در آن به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\Gamma(x)$ تابع گامای اویلر می‌باشد.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{2}$$

تعریف2 [9]. مشتق کسری ریمان لیویل با مرتبه کسری $\in \mathbb{R}^+$ به صورت

$$D_{t_0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{3}$$

تعریف می‌شود. که در آن $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+$ و m کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از α است.

تعریف3 [9]. مشتق کسری کاپوتو با مرتبه کسری $\alpha \in \mathbb{R}^+$ از تابع $f(t)$ به صورت

$$D_{t_0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \tag{4}$$

تعریف می‌شود.

تعریف4 [9]. لاپلاس مشتق مرتبه کسری کاپوتو به صورت

$$\mathrm{L}\{D_{0,t}^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{K=0}^{m-1} S^{\alpha-1-K} f^{(K)}(0) \tag{5}$$

تعریف می‌شود جایی که $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و s اپراتور تبدیل لاپلاس می‌باشد.

لم1 [10]. اگر مشتق مرتبه کسری کاپوتو با مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ از تابع $f(t)$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه

$$D_{t_0,t}^{\alpha}\left(D_{t_0,t}^{-\alpha} f(t)\right) = f(t) \tag{6}$$

لم2 [10]. اگر مشتق مرتبه کسری کاپوتو با مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ از تابع $f(t)$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$D_{t_0,t}^{-\alpha}\left(D_{t_0,t}^{\alpha} f(t)\right) = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!} (t-t_0)^j \tag{7}$$

3- کوادروتور[1]

پرنده‌های هدایت‌پذیر از راه دور (با نماد اقتصادی پهپاد) و یا هواپیماهای بدون سرنشین[2]، یک دسته از وسایل نقلیه‌ی هدایت محور هستند که بدون نیاز به خلبان از راه دور و یا به‌صورت خودکار هدایت می‌شوند. این وسایل پرنده از نیروهای آیرودینامیک[3] برای پرواز در مسیر دلخواه استفاده می‌کنند. پهپادها برای انجام عملیات‌هایی که برای انسان خطرناک و کسل‌کننده هستند بسیار مناسب‌اند. در حال حاضر از پهپادها در برنامه‌های نظامی که شامل جاسوسی و حمله می‌شود، استفاده می‌کنند. این هواپیماها همچنین در برنامه‌های غیرنظامی مانند مطالعات جغرافیایی و نقشه‌برداری و کاربردهایی مانند تجسس و نجات و بیشتر در حوادث غیرمترقبه‌ی طبیعی استفاده می‌شوند. هر یک از مأموریت‌های ذکر شده در دسته اعمال کسل‌کننده و خطرناک جای می‌گیرند و جایگزین کردن یک هواپیمای بدون سرنشین، می‌توان ایمنی و بهره‌برداری را افزایش داد و به‌جای محدود کردن خلبان در کابین خلبان از یک سیستم کنترل استفاده کرد که می‌تواند ساعت‌ها و بدون وجود عامل خستگی به انجام مأموریت بپردازد.

تعداد و تنوع زیادی از لحاظ طراحی برای هواپیماهای بدون سرنشین وجود دارد. با وجود مزایا و کاربردهای مخصوص برای انواع این پرنده‌ها، می‌توان از کوادروتور به‌عنوان یکی از چند منظوره‌ترین این وسایل، نام برد [11].

3-1- مدل ریاضی کوادروتور

کوادروتور یک سیستم چند ورودی- چند خروجی و حساس به اغتشاش با 6 درجه آزادی و 4 خروجی می‌باشد. همچنین نیروی اصلی برای حرکت کوادروتور توسط چهار موتور که چهار پروانه‌ی ثابت بر آن سوار شده به‌وجود می‌آید که هر جفت پروانه در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و با کم و زیاد کردن سرعت چرخش و جهت چرخش پروانه‌ها حرکت و یا فرود و اوج آن کنترل می‌گردد (شکل1) [12].

معادلات دینامیکی کوادروتور به‌صورت

$$\ddot{x} = \frac{u_1}{m}(\cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) \tag{8}$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m}(\cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \sin\psi) \tag{9}$$

$$\ddot{z} = \frac{u_1}{m}(\cos\theta \cos\varphi) - \mathrm{g} \tag{10}$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) - J\dot{\theta}\omega + lu_2\right)/I_x \tag{11}$$

$$\ddot{\theta} = \left(\dot{\varphi}\dot{\psi}(I_z - I_x) - J\dot{\varphi}\omega + lu_3\right)/I_y \tag{12}$$

$$\ddot{\psi} = \left(\dot{\varphi}\dot{\theta}(I_x - I_y) + lu_4\right)/I_z \tag{13}$$

می‌باشد و رابطه‌ی ورودی‌های کنترل و سرعت زاویه‌ای موتورها[4] به صورت

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

می‌باشد [13]. همچنین پارامترهای معادلات سیستم کوادروتور در جدول (1) تعریف شده است.

3-2- کنترل موقعیت

با تغییر سرعت روتورها می‌توان نیروی بالارونده و حرکت عرضی را تغییر داد. به‌عنوان مثال افزایش و یا کاهش سرعت چهار پروانه با یکدیگر نیروی عمودی را تولید می‌کند که توسط ورودی u_1 کنترل می‌شود. همچنین تغییر سرعت جفت پروانه‌های روبروی هم به صورت معکوس سبب چرخش حول محور x و

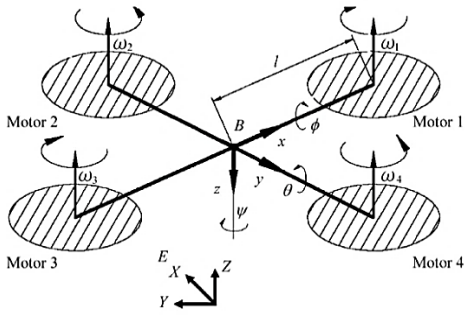

Fig.1 Forces and moments acting on a quadrotor [12]

شکل 1 نیرو وگشتاور وارد بر کوادروتور [12]

[1] Quadrotor
[2] Unmanned Aerial Vehicles
[3] Aerodynamic
[4] Motor angular speed

جدول 1 تعریف پارامترهای معادلات سیستم کوادروتور

Table 1 The definition system parameters of the quadrotor

علائم	شرح
l	نصف فاصله بین مرکز دو موتور
m	جرم وسیله
g	ثابت شتاب گرانشی
$I_{x,y,z}$	ممان اینرسی حول محورهای بدنه
φ	زاویه چرخش حول محور x
θ	زاویه چرخش حول محور y
ψ	زاویه چرخش حول محور z
J	ممان اینرسی پروانه‌ها
K_d	ضریب نیروی موتور
K_p	ضریب اصطکاک
u	سیگنال ورودی کنترل
ω	سرعت زاویه‌ای موتور

y و حرکت عرضی در راستای این محورها می‌شود که توسط ورودی‌های u_2 و u_3 کنترل می‌شوند. چرخش حول محور z ماهرانه‌تر است و در نتیجه اختلاف متقابل گشتاور بین هر چهار پروانه می‌باشد و کنترل آن توسط ورودی u_4 انجام می‌گیرد. اما برخلاف پارامترهای ارتفاع و چرخش کوادروتور، موقعیت‌های x و y را نمی‌توان مستقیماً به وسیله کنترل یکی از ورودی‌های u_1 تا u_4 کنترل کرد. به‌عبارت دیگر، موقعیت‌های x و y می‌توانند توسط کنترل زوایای رول و پیچ (θ_d,φ_d) کنترل شوند و زوایای (θ_d,φ_d) بایستی براساس (x_d,y_d,z_d) محاسبه شوند و درنهایت به سیستم اعمال شود (شکل2) [14].

با توجه به معادلات موقعیت کوادروتور می‌توان زوایای θ_d و φ_d را برحسب x_d، y_d و z_d به‌دست آورد. با ترکیب معادلات (9-7) داریم:

$$\begin{cases} \ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi - (\ddot{z}+\mathrm{g})\tan\theta = 0 \\ \ddot{x}\sin\psi - \ddot{y}\cos\psi - \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+(z\ddot{+}g)^2\sin\varphi} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

از حل دستگاه معادله (14) داریم:

$$\theta_d = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{x}_d\cos\psi + \ddot{y}_d\sin\psi}{(\ddot{z}_d+g)}\right) \tag{16}$$

$$\varphi_d = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{x}_d\sin\psi - \ddot{y}_d\cos\psi}{\sqrt{\ddot{x}_d^2+\ddot{y}_d^2+(\ddot{z}_d+g)^2\sin\varphi}}\right) \tag{17}$$

قابل ذکر است که در معادلات (16) و (17) برای محاسبه $\ddot{x}_d$، $\ddot{y}_d$ و $\ddot{z}_d$ از یک کنترل کننده PD مجازی استفاده می‌شود [15].

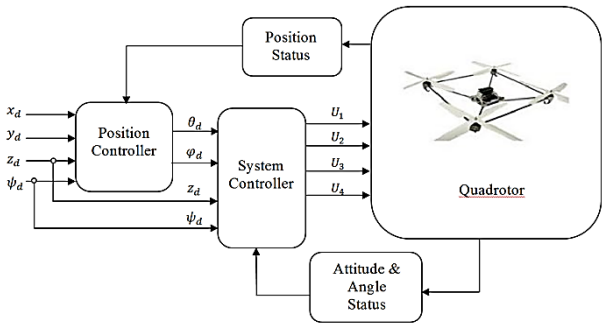

Fig.2 The structure of the position controllers for the quadrotor

شکل 2 ساختارکنترل موقعیت برای کوادروتور

$$\ddot{x}_d = K_{ip}(x_d - x) + K_{id}\dot{x} \tag{18}$$

$$\ddot{y}_d = K_{ip}(y_d - y) + K_{id}\dot{y} \tag{19}$$

$$\ddot{z}_d = K_{ip}(z_d - z) + K_{id}\dot{z} \tag{20}$$

با جایگزینی $\ddot{x}_d$ ، $\ddot{y}_d$ و $\ddot{z}_d$ در معادلات (16) و (17)، θ_d و φ_d به‌دست می‌آیند.

4- طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری

در کنترل مد لغزشی ایده‌آل از یک سطح لغزش با مشتق و انتگرال مرتبه صحیح برای طراحی قانون کنترل استفاده می‌شود، حال آن‌که در طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری در سطح لغزش می‌توان به جای مشتق و انتگرال مرتبه صحیح از مشتق و انتگرال مرتبه کسری استفاده نمود. با توجه به این‌که معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری از درجه‌ی آزادی بیشتری نسبت به معادلات مرتبه صحیح برخوردارند این امکان وجود دارد که بتوان عملکرد سیستم کنترل را در مقایسه با کنترل‌کننده‌های مرتبه‌ی صحیح بهبود بخشید. در این بخش از یک سطح لغزش PD^{α} برای به‌دست آوردن قانون کنترل مد لغزشی استفاده می‌شود و تاثیر آن را بر کاهش میزان چترینگ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

4-1- کنترل مد لغزشی با سطح لغزش مرتبه کسری با مرتبه کمتر از یک

معادله دینامیکی ارتفاع را مجدداً مطابق

$$\ddot{z} = \frac{u_1}{m}\cos\varphi\cos\psi - g \tag{21}$$

و مقدار خطای حالت سیستم را به صورت:

$$e_z(t) = z_d(t) - z(t) \tag{22}$$

در نظر بگیرید. آن‌گاه سطح لغزشی مرتبه‌ی کسری PD^{α} را به صورت:

$$s_z(t) = \lambda_z e_z(t) + D^{\alpha}e_z(t) \qquad ,0<\alpha<1 \tag{23}$$

تعریف می‌شود که در آن λ_z یک ثابت مثبت است. همچنین توجه داشته باشید که در این‌جا، علامت D^{α} نشان‌دهنده مشتق کسری کاپوتو می‌باشد.

معادله‌ی (23) را می‌توان به صورت:

$$s_z(t) = \lambda_z e_z(t) + D^{\alpha-1}(\dot{e}_z(t)) \tag{24}$$

بازنویسی کرد. با جایگزینی (22) در (24) داریم:

$$s_z(t) = \lambda_z\big(z_d(t) - z(t)\big) + D^{\alpha-1}\big(\dot{z}_d(t) - \dot{z}(t)\big). \tag{25}$$

با مشتق گرفتن از هر دو طرف معادله داریم:

$$\dot{s}_z(t) = \lambda_z(\dot{z}_d(t) - \dot{z}(t)) + D^{\alpha-1}\big(\ddot{z}_d(t) - \ddot{z}(t)\big). \tag{26}$$

با برقراری رابطه‌ی $\dot{s}_z(t) = 0$ و جایگزین کردن (21) در آن، قانون کنترل معادل به صورت:

$$u_{eq} = \frac{m}{\cos\varphi\cos\psi}\big(\ddot{z}_d + \mathrm{g} + D^{1-\alpha}\lambda(\dot{z}_d - \dot{z})\big) \tag{27}$$

به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن شرایط عدم قطعیت پارامترها و نامعینی، قانون کنترل به‌صورت:

$$u_1 = \frac{m}{\cos\varphi\cos\psi}(\ddot{z}_d + \mathrm{g} + D^{1-\alpha}[\lambda(\dot{z}_d - \dot{z}) + k_z\mathrm{sign}(s) + L_z s]) \tag{28}$$

در نظر گرفته می‌شود که $K_z, L_z \in \mathbb{R}^+$ و $\mathrm{sign}(.)$ تابع علامت است که به صورت:

$$\mathrm{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad s>0 \\ 0 & \text{for} \quad s=0 \\ -1 & \text{for} \quad s<0 \end{cases} \tag{29}$$

تعریف می‌شود.

4-1-1- آنالیز پایداری

در آنالیز پایداری باید شرایط رسیدن به سطح لغزش و پایدار ماندن سیستم در سطح لغزش، هر دو برآورده شود. از این رو تجزیه و تحلیل پایداری به دو مرحله تقسیم می‌شود.

مرحله اول) بررسی شرایط رسیدن به سطح لغزش

قانون کنترل به‌دست آمده در معادله (28) باید تضمین کند که سیستم با هر شرایط اولیه‌ای درنهایت به سطح لغزش همگرا می‌شود. برای بررسی برقرار بودن شرایط رسیدن، تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t) = |s_z(t)| \tag{30}$$

مشتق $V(t)$ به صورت:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z(t))\dot{s}_z(t) \tag{31}$$

است. با جایگزینی (26) به جای $\dot{s}_z(t)$ داریم:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)\big(\dot{z}_d(t) - \dot{z}(t)\big) + D^{\alpha-1}\big(\ddot{z}_d(t) - \ddot{z}(t)\big). \tag{32}$$

با استفاده از معادله (21) و جایگزینی در معادله (32) داریم:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(\lambda_z\big(\dot{z}_d(t) - \dot{z}(t)\big) + D^{\alpha-1}(\ddot{z}_d(t) - \frac{u_1}{m}\cos\varphi\cos\psi + g) \tag{33}$$

با اعمال قانون کنترل (28) در معادله (33) به:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(\lambda_z\dot{e}_z(t) + D^{\alpha-1}(\ddot{z}_d(t) - \frac{\cos\varphi\cos\psi}{m}[\frac{m}{\cos\varphi\cos\psi}(\ddot{z}_d + g + D^{1-\alpha}(\lambda_z\dot{e}_z(t) + k_z\mathrm{sign}(s) + L_z s))] + g) \tag{34}$$

می‌رسیم. با ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(\lambda_z\dot{e}_z + D^{\alpha-1}[D^{1-\alpha}(\lambda_z\dot{e}_z + k_z\mathrm{sign}(s) + L_z s)]). \tag{35}$$

براساس لم (2) برای مشتق کاپوتو، هنگامی که زمان اولیه صفر باشد، آنگاه:

$$D_{0,t}^{-\beta}\left(D_{0,t}^{\beta} f(t)\right) = f(t) - f(0) \tag{36}$$

با انتخاب $\beta = 1 - \alpha$ رابطه‌ی (35) را به صورت:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(\lambda_z\dot{e}_z + D^{-\beta}[D^{\beta}(\lambda_z\dot{e}_z + k_z\mathrm{sign}(s) + L_z s)]) \tag{37}$$

بازنویسی می‌شود و براساس (36)، رابطه (37) به صورت:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(-k_z\mathrm{sign}(s) - L_z s + k_z\mathrm{sign}\big(s(0)\big) + L_z s(0) + \lambda_z\dot{e}_z(0)) \tag{38}$$

ساده می‌شود. برای اثبات شرط رسیدن $\left(\dot{V} \le \eta|s|\right)$ اگر:

$$\left|k_z\mathrm{sign}\big(s(0)\big) + L_z s(0) + \lambda_z\dot{e}_z(0)\right| \le \delta < \infty$$

آنگاه:

$$\dot{V}(t) = \mathrm{sign}(s_z)(-k_z\mathrm{sign}(s) - L_z s + \delta) = -\mathrm{k_z} - \mathrm{L_z}|s| + \mathrm{sign}(\mathrm{s_z})\delta \le -(\mathrm{k_z} - \delta) - \mathrm{L_z}|s| \tag{39}$$

که برای $k_z \ge \delta$ شرط رسیدن برقرار است.

مرحله دوم) پایداری سیستم در سطح لغزش

هنگامی که مد لغزشی رخ می‌دهد معادله‌ی $s = 0$ برقرار است. در این حالت سیستم باید به سمت نقطه تعادل‌اش همگرا شود و در آن پایدار بماند.

هنگامی که مد لغزشی رخ می‌دهد، معادله‌ی $\mathrm{s} = 0$ برقرار است. در این حالت، با صفر قرار دادن سطح لغزش (23) داریم:

$$s_z = \lambda_z e(t) + D^{\alpha}e(t) = 0 \quad \rightarrow D^{\alpha}e(t) = -\lambda_z e(t) \tag{40}$$

مطابق [16] سیستم مرتبه کسری (40) پایدار است اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$|\arg(-\lambda_z)| > \alpha\frac{\pi}{2} \tag{41}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن $\lambda_z > 0$ و $0 < \alpha < 1$ سیستم (40) پایدار است و در نتیجه سطح لغزش مرتبه کسری (23) پایدار است.

به همین ترتیب دیگر ورودی ها نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$u_2 = \frac{I_x}{l}(\ddot{\varphi}_d + \frac{J}{I_x}\dot{\theta}\omega - \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) + D^{1-\alpha}\big[\lambda_\varphi(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}) + k_\varphi\mathrm{sign}(s) + L_\varphi s\big]) \tag{42}$$

$$u_3 = \frac{I_y}{l}(\ddot{\theta}_d - \frac{J}{I_y}\dot{\varphi}\omega - \dot{\varphi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + D^{1-\alpha}\big[\lambda_\theta\big(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}\big) + k_\theta\mathrm{sign}(s) + L_\theta s\big]) \tag{43}$$

$$u_4 = I_z(\ddot{\psi}_d - \dot{\varphi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + D^{1-\alpha}\big[\lambda_\psi\big(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}\big) + k_\psi\mathrm{sign}(s) + L_\psi s\big]) \tag{44}$$

4-1-2- نتایج شبیه‌سازی قسمت اول

در این قسمت به شبیه‌سازی عملکرد قانون کنترل مد لغزشی طراحی شده برای کوادروتور پرداخته می‌شود. مقادیر مطلوب را به‌صورت:

$$[x_d, y_d, z_d, \psi_d]^T = [\cos(0.1\times t), \sin(0.1\times t), 0.01\times t^2, 0]^T \tag{45}$$

در نظر بگیرید. پارامترهای سیستم نیز برای تمامی شبیه‌سازی‌ها یکسان در نظر گرفته شده و در جدول 2 درج گردیده است. همچنین پارامترهای استفاده شده برای کنترل کننده در شبیه‌سازی به‌صورت جدول 3 می باشد.

توجه داشته باشید هنگامی که در (23)، $\alpha = 1$ باشد با یک سطح لغزش مرتبه صحیح مواجه هستید که در واقع همان کنترل مد لغزشی استاندارد است. در این صورت نتایج شبیه‌سازی برای ردیابی موقعیت و زوایای مطلوب با استفاده از روش کنترل مد لغزشی استاندارد و براساس روش کنترل موقعیت و بادر نظر گرفتن شرایط اولیه حرکت از مبدا مختصات به‌صورت "شکل 3 و 4" می‌باشد. "شکل 5" نیز مسیر حرکت کوادروتور در مسیر مطلوب و شروع از مبدا مختصات را به‌صورت سه بعدی نشان می‌دهد.

برای آنالیز دقیق‌تر روش کنترلی و مقایسه با روش‌های دیگر، تنها رفتار ارتفاع کوادروتور را مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به‌ذکر است که طراحی قانون کنترل برای تمامی زوایا مشابه است.

همان‌طور که در "شکل 3" دیده می‌شود، با استفاده از روش کنترل مد لغزشی استاندارد، سیگنال $z(t)$ که معرف ارتفاع کوادروتور در هر لحظه از زمان است، به خوبی مسیر مطلوب $z_d(t)$ را دنبال کرده است، اما سیگنال خطا که برابر با اختلاف این دو است و در "شکل 6" نشان داده شده، به صورت نوسانی است و با وجود این‌که بسیار ناچیز است اما هیچ گاه به صورت دقیق صفر نمی‌شود.

"شکل 7" نیز سیگنال ورودی $u_1(t)$ را نشان می‌دهد که بیانگر اشکال عمده در روش کنترل مد لغزشی استاندارد است که همان نوسان شدید در

جدول 2 پارامترهای سیستم کوادروتور

Table 2 The system parameters of the quadrotor

$l = 0.3$ m	$I_x = 21\times10^{-3}$	$J = 3.357\times10^{-5}$
$m = 1.83$ kg	$I_y = 21\times10^{-3}$	$K_d = 1.14\times10^{-7}$
$g = 9.81$ m/s^2	$I_z = 43.2\times10^{-7}$	$K_p = 2.98\times10^{-6}$

جدول 3 پارامترهای استفاده شده برای کنترل کننده

Table 3 parameters used for the controller

$L_z = 3$	$K_z = 3$	$\lambda_z = 6$
$L_\varphi = 5$	$K_\varphi = 5$	$\lambda_\varphi = 6$
$L_\theta = 5$	$K_\theta = 5$	$\lambda_\theta = 6$
$L_\psi = 5$	$K_\psi = 5$	$\lambda_\psi = 6$

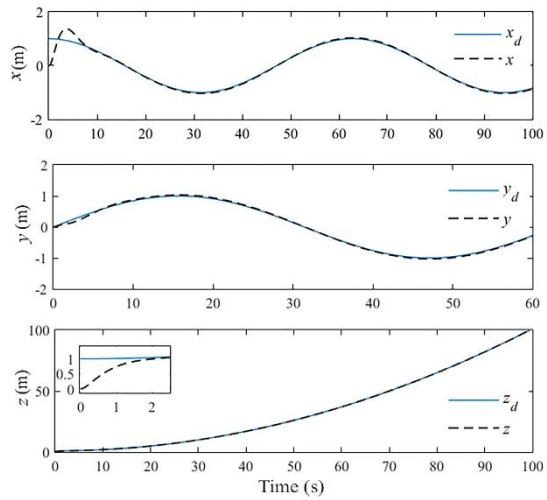

Fig.3 The desirable position tracking quadrotor

شکل 3 ردیابی موقعیت مطلوب کوادروتور

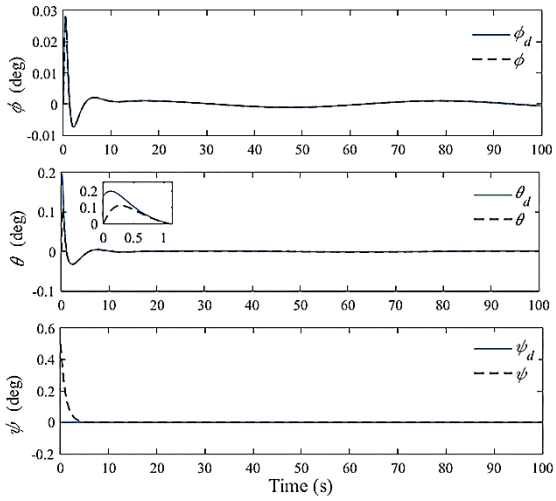

Fig.4 The desirable angles tracking quadrotor

شکل 4 ردیابی زوایای مطلوب کوادروتور

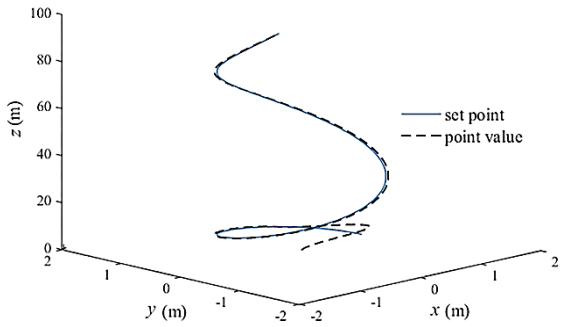

Fig.5 The Direction of the quadrotor according to the Desirable Direction

شکل 5 مسیر حرکت کوادروتور مطابق مسیر مطلوب

ورودی کنترل می‌باشد که دلیل آن، وجود تابع ناپیوسته‌ی علامت در ورودی کنترل است که به پدیده‌ی چترینگ و یا وزوز معروف است که می‌تواند

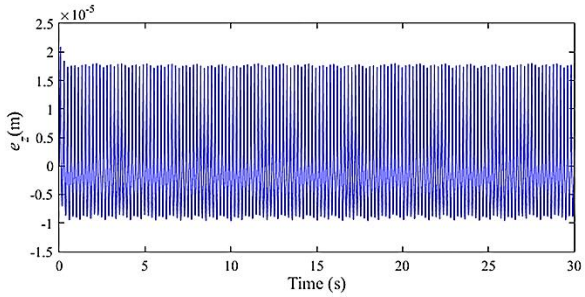

Fig.6 error signal at Tracking Desirable height in standard mode ($\alpha = 1$)

شکل 6 سیگنال خطا در ردیابی ارتفاع مطلوب در حالت استاندارد ($\alpha = 1$)

موجب افت عملکرد سیستم شود. هنگامی که در سطح لغزش (23)، $0 < \alpha < 1$ باشد با یک سطح لغزش مرتبه کسری با مرتبه پایین‌تر از یک روبرو هستید.

"شکل 8" نشان‌دهنده دامنه نوسان سیگنال $u_1(t)$ با در نظر گرفتن $\alpha = 0.7$ و همچنین "شکل 9" نیز نشان دهنده سیگنال خطا در این حالت می‌باشد. با دقت در "شکل 8" می‌توان نتیجه گرفت که با طراحی قانون کنترل با استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری (23) به انتظاراتی که در مورد کاهش دامنه نوسانات در ورودی سیگنال کنترل داشتیم دست نیافتیم و با کاهش α دامنه نوسان سیگنال ورودی $u_1(t)$ به شدت افزایش پیدا می‌کند. همچنین با توجه به "شکل 9" می‌توان دریافت که فرکانس نوسان سیگنال خطا نیز به شدت افزایش یافته و بهبودی در مقدار خطا نیز حاصل نشده است.

در ادامه سطح لغزش مرتبه کسری دیگری را معرفی می‌شود و قانون کنترل مد لغزشی براساس آن به‌دست می‌آید و سپس تأثیر آن را بر پدیده‌ی

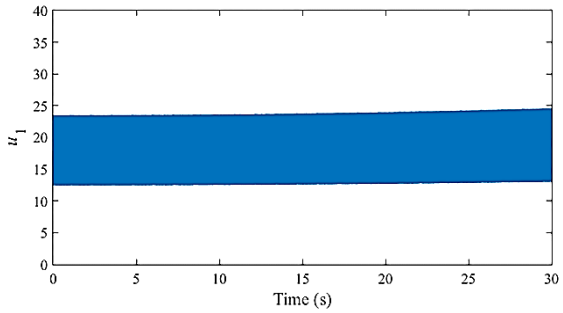

Fig. 7 Amplitude control input $u_1(t)$ in standard mode ($\alpha = 1$)

شکل 7 دامنه نوسان ورودی کنترل $u_1(t)$ در حالت استاندارد ($\alpha = 1$)

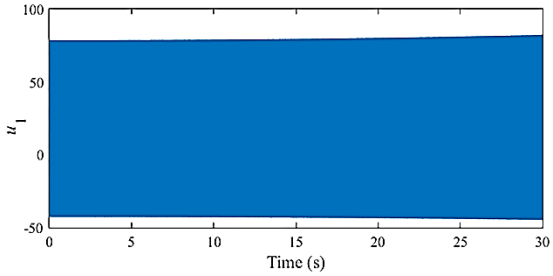

Fig.8 Amplitude control input $u_1(t)$ with $\alpha = 0.7$

شکل 8 دامنه نوسان ورودی کنترل $u_1(t)$ با $\alpha = 0.7$

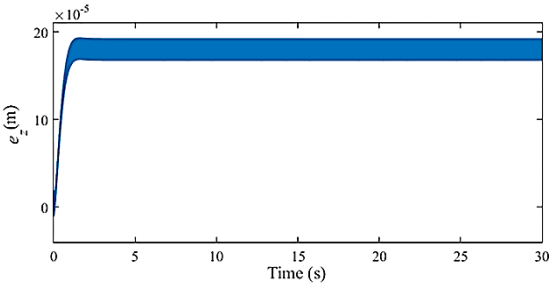

Fig.9 error signal at Tracking Desirable height with $\alpha = 0.7$

شکل 9 سیگنال خطا در ردیابی ارتفاع مطلوب با $\alpha = 0.7$

چترینگ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

2-4- کنترل مد لغزشی با سطح لغزش مرتبه کسری با مرتبه بیشتر از یک

سطح لغزشی مرتبه‌ی کسری نوع PD^{β} زیر را در نظر بگیرید.

$$s(t) = \lambda_z e_z(t) + D^{\beta+1} e_z(t) \quad ,\lambda_z > 0 \quad ,0 < \beta < 1 \tag{46}$$

می‌توانیم معادله (46) را به صورت:

$$s(t) = \lambda_z e_z(t) + D^{\beta} \dot{e}_z(t) \tag{47}$$

بنویسیم. با انجام مراحل مشابه معادلات (24) تا (27) قانون کنترل u_1 به صورت:

$$u_1 = \frac{m}{\cos\varphi\cos\psi}(\ddot{z}_d + g + D^{-\beta}(\lambda(\dot{z}_d - \dot{z}) + K_z \mathrm{sign}(s) + L_z s) \tag{48}$$

به‌دست می‌آید.

4-2-1- آنالیز پایداری

همانطور که در بخش قبل گفته شد برای آنالیز پایداری باید شرایط رسیدن به سطح لغزش و پایدار ماندن سیستم در سطح لغزش، هر دو برآورده شود.

مرحله اول) بررسی شرایط رسیدن به سطح لغزش

برای بررسی برقرار بودن شرایط رسیدن، تابع لیاپانوف:

$$V_z = |s_z| \tag{49}$$

را در نظر بگیرید مشتق تابع V_z به صورت:

$$\dot{V}_z = \mathrm{sign}(s_z)\dot{s}_z \tag{50}$$

است. با جایگزینی سطح لغزش (46) داریم:

$$\dot{V}_z = \mathrm{sign}(s_z)\left(\lambda \dot{e}_z(t) + D^{\beta+1}\dot{e}_z(t)\right) \tag{51}$$

که می‌توان معادله فوق را به صورت:

$$\dot{V}_z = \mathrm{sign}(s_z)\left(\lambda \dot{e}_z(t) + D^{\beta}\ddot{e}_z(t)\right) \tag{52}$$

نوشت با جایگزینی معادله (21) و با اعمال قانون کنترل (48) در معادله (52) داریم:

$$\dot{V}_z = \mathrm{sign}(s_z)(\lambda \dot{e}_z(t) + D^{\beta}(\ddot{z}_d - \frac{\cos\varphi\cos\psi}{m}[\frac{m}{\cos\varphi\cos\psi}(\ddot{z}_d + g + D^{-\beta}(\lambda_z \dot{e}_z(t) + k_z \mathrm{sign}(s) + L_z s))]) + g) \tag{53}$$

براساس لم (1) و بعد از ساده‌سازی معادله فوق داریم:

$$\dot{V}_z = \mathrm{sign}(s_z)(-K_z \mathrm{sign}(s) - L_z s) \tag{54}$$

و می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\dot{V}_z = -K_z - L_z|s_z| \le -L_z|s_z|. \tag{55}$$

بنابراین برطبق قضیه پایداری لیاپانوف، مسیر حالت سیستم (22) به سمت سطح لغزش $s_z = 0$ همگرا می‌شود.

مرحله دوم) پایداری سیستم در سطح لغزش

با صفر قرار دادن سطح لغزش (46) داریم:

$$\lambda_z e_z + D^{\beta+1} e_z = 0 \qquad \rightarrow D^{\beta+1} e_z = -\lambda_z e_z \tag{56}$$

قضیه1. معادله دینامیک مد لغزشی (56) را در نظر بگیرید، اگر $E_Z(s)(E_Z(s) = L\{e_z(t)\})$ محدود باشد، زمانی که $t \to \infty$، مسیر سیستم (55) به صفر همگرا می‌شود.

اثبات) با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (56) و با فرض این‌که $E_z(s) = L\{e_z(t)\}$ داریم:

$$s^{\beta+1}E_z(s) - s^{\beta}e_z(0) - s^{\beta-1}\dot{e}_z(0) + \lambda_z E_z(s) = 0 \tag{57}$$

با در نظر گرفتن قضیه مقدار نهایی، که به صورت:

$$e_{z,ss} = \lim_{t\to\infty} e_z(t) = \lim_{s\to 0} sE_z(s) \tag{58}$$

توصیف می‌شود، داریم:

$$\lim_{t\to\infty} e_z(t) = \lim_{s\to 0} sE_z(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s^{\beta+1}e_z(0) - s^{\beta}\dot{e}_z(0)}{s^{\beta+1} + \lambda_z} = 0 \tag{59}$$

و با فرض $|e_z(t)| \le \rho < \infty$، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{t\to\infty} e_z(t) = 0 \tag{60}$$

و در نتیجه سطح لغزش مرتبه کسری پایدار است.

4-2-2- نتایج شبیه‌سازی قسمت دوم

نتایج شبیه‌سازی طراحی قانون کنترل مد لغزشی مرتبه کسری با در نظر گرفتن سطح لغزش (46) در مورد کنترل ارتفاع و با در نظر گرفتن 0.9، 0.5، $\beta = 0.3$ به‌صورت "شکل 10" می‌باشد. تأثیر افزایش مقدار β در بازه‌ی $0 < \beta < 1$ در سطح لغزش (46) و سیگنال کنترل $u_1(t)$ کاملاً مشهود است و به ازای افزایش β دامنه نوسانات بسیار کاهش می‌یابد.

"شکل 11" نیز نشان‌دهنده سیگنال خطای ردیابی ارتفاع کوادروتور می‌باشد که همان‌طور که مشخص است با وجود کاهش چشمگیر دامنه نوسان سیگنال ورودی کنترل، ردیابی ارتفاع مطلوب نیز به خوبی صورت گرفته است و فرکانس نوسان سیگنال خطا نیز با افزایش β کاهش پیدا می‌کند.

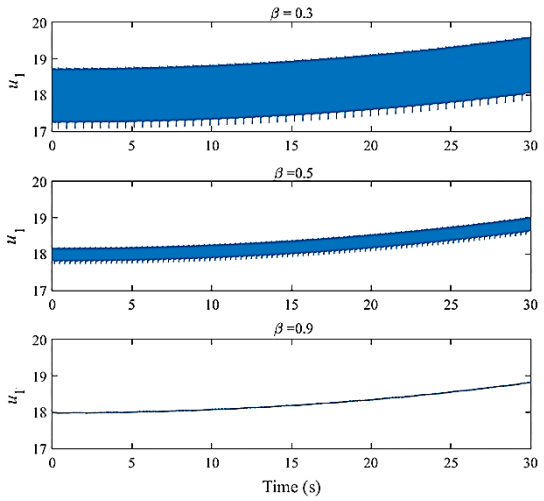

Fig.10 Amplitude control input $u_1(t)$ with $\beta = 0.3, 0.5, 0.9$

شکل 10 دامنه نوسان ورودی کنترل $u_1(t)$ با $\beta = 0.3, 0.5, 0.9$

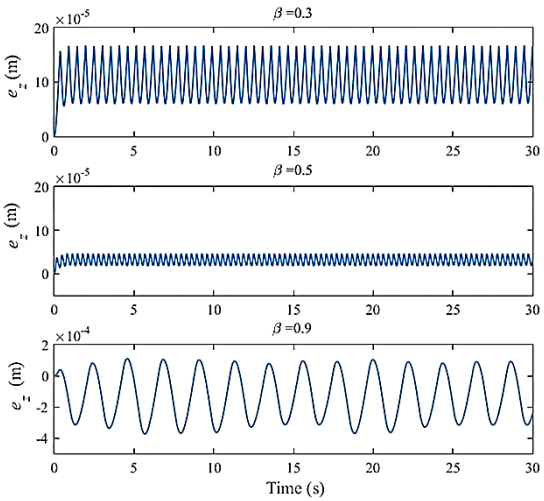

Fig.11 Frequency error signal with $\beta = 0.3, 0.5, 0.9$

شکل 11 فرکانس نوسان سیگنال خطا با $\beta = 0.3, 0.5, 0.9$

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله هدف بررسی تاثیر سطح لغزش مرتبه کسری در طراحی قانون کنترل مد لغزشی و تاثیر آن بر میزان چترینگ و بهبود آن بود. در این راستا برای طراحی قانون کنترل مد لغزشی از سطح لغزش مرتبه کسری $s = \lambda\, e(t) + D^{\alpha} e(t)$ و با در نظر گرفتن مقادیر مختلف α در بازه‌ی $0 < \alpha < 2$ در مورد کوادروتور طراحی گردید و نتایج به‌دست آمده را می‌توان به‌صورت زیر دسته بندی نمود

- هنگامی که $\alpha = 1$ باشد در واقع با یک سطح لغزش مرتبه صحیح (مرتبه اول) مواجه هستیم که همان کنترل مد لغزشی استاندارد است. در این حالت برای این‌که کوادروتور بتواند مسیر مطلوب را دنبال کند دامنه نوسان سیگنال کنترل دچار نوسانات شدید می‌گردید.
- هنگامی که $0 < \alpha < 1$ باشد، مرتبه سطح لغزش از نوع کسری و با مرتبه کمتر از یک می‌باشد. در این حالت دامنه نوسان در ورودی کنترل (چترینگ) از دامنه نوسان در روش مد لغزشی استاندارد، بزرگ‌تر می‌شود و در واقع نه تنها بهبودی در میزان چترینگ حاصل نشد بلکه دامنه نوسانات نیز افزایش می‌یابد.
- هنگامی که $1 < \alpha < 2$ باشد، با سطح لغزش مرتبه کسری بیشتر از یک روبرو هستیم. در این حالت دامنه نوسان در ورودی کنترل نسبت به روش کنترل مد لغزشی استاندارد، کاهش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد، در واقع با استفاده از این سطح لغزش می‌توان از چترینگ بسیار کمتری برخوردار بود که می‌تواند به عنوان یکی از مزایای مهم کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مطرح شود.

6- مراجع

[1] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, E. Usai, *On second order sliding mode controllers*, in: *Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control*, pp. 329-350, london: Springer, 1999 .
[2] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, E. Usai, A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems, *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9-10, pp. 875-892, 2003.
[3] H. Delavari, R. Ghaderi, A. Ranjbar, S. Momani, Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 4, pp. 963-978, 2010.
[4] M. R. Becan, Sliding Mode Control with Fuzzy Boundary Layer to Air-Air Interception Problem, *Proceeding of World Academy of Science*, Prague: Citeseer, pp. 108-111, 2005.
[5] L. Yang, Y. ZHang, X. CHen, Sliding Mode Control with Fuzzy Boundary Layer for a Class of Uncertain Nonlinear Systems [J], *Journal of System Simulation*, Vol. 21, No. 22, pp. 7262-7265, 2009 .
[6] B. Zhang, Y. Pi, Y. Luo, Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor, *ISA transactions*, Vol. 51, No. 5, pp. 649-656, 2012.
[7] S. Dadras, H. R. Momeni, Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 1, pp. 367-377, 2012.
[8] Y. Tang, X. Zhang, D. Zhang, G. Zhao, X. Guan, Fractional order sliding mode controller design for antilock braking systems, *Neurocomputing*, Vol. 111, pp. 122-130, 2013.
[9] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, pp. 41-117, London: Academic press, 1998.
[10] K .Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, pp. 49-65, New York: Springer, 2010.
[11] A. Fekih, Fault diagnosis and fault tolerant control design for aerospace systems: A bibliographical review, *Proceeding of American Control Conference*, Portland: IEEE, pp. 1286-1291, 2014 .
[12] A. A. Mian, W. Daobo, Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 DOF quadrotor helicopter, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 21, No. 3, pp. 261-268, 2008 .
[13] S. Bouabdallah, R. Siegwart, Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor, *Proceeding of International Conference on Robaticand Automation*, Spain: IEEE ,pp. 2247-2252, 2005.
[14] A. Modirrousta, M. Khodabandeh, A novel nonlinear hybrid controller design for an uncertain quadrotor with disturbances, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 45, pp. 294-308, 2015 .
[15] F. Sharifi, M. Mirzaei, B. W. Gordon, Y. Zhang, Fault tolerant control of a quadrotor UAV using sliding mode control, *Proceeding of the Conference on Control and Fault Tolerant Systems*, Nice: IEEE, pp. 239-244, 2010.
[16] E. Ahmed, A. El-Sayed, H. A. El-Saka, Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 325, No. 1, pp. 542-553, 2007.