



بررسی پایداری و رفتار غیرخطی بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای با روش مقیاس‌های چندگانه

موسی رضائی^{*1}، لیلا قربانپور²

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 51665-315، m_rezaee@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 دی 1395

پذیرش: 28 اسفند 1395

ارائه در سایت: 29 فروردین 1396

کلید واژگان:

بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای

پاسخ دینامیکی

پایداری

روش مقیاس‌های چندگانه

چکیده

نامیزانی دورانی ماشین‌های دوار می‌تواند باعث عملکرد غیرعادی و خرابی دستگاه گردد، بنابراین بایستی علل نامیزانی مطالعه و مقدار آن اندازه‌گیری و برطرف شود. در سیستم‌هایی که نامیزانی دورانی ناشی از خروج از مرکزی جرم از مرکز هندسی وجود دارد، ارتعاشات خود تحریک ایجاد می‌شود. استفاده از بالانسر دینامیکی اتوماتیک ساچمه‌ای یکی از روش‌های مورد استفاده برای کنترل و رفع نابالانسی می‌باشد. در تحقیقات پیشین، مطالعات گسترده‌ای در زمینه رفتار دینامیکی و پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای انجام شده است. در این تحقیقات عموماً از روش‌های عددی برای بدست آوردن پاسخ سیستم استفاده گردیده و از روش‌های اغتشاشات، تنها برای بررسی پایداری استفاده شده است. در مقاله حاضر به علت مزایای متعدد تحلیل پاسخ با روش‌های نیمه تحلیلی، برای اولین بار روش مقیاس‌های چندگانه برای به‌دست آوردن پاسخ دینامیکی و بررسی پایداری روتور نابالانس مجهز به بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای بکار رفته است. بدین منظور ابتدا معادلات غیرخطی سیستم با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شده، سپس پایداری و پاسخ سیستم با روش مقیاس‌های چندگانه با در نظر گرفتن یک جمله و دو جمله از تقریب به دست آمده است. برای صحت سنجی نتایج، پاسخ به دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه با روش عددی رانگ-کوتا مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که پاسخ به‌دست آمده با دو جمله از تقریب در روش مقیاس‌های چندگانه کاملاً با نتایج حاصل از روش عددی منطبق است. همچنین محدوده‌ی پایداری به دست آمده با روش مقیاس‌های چندگانه و مقایسه نتایج حاصل با روش اول لیاپانوف، حاکی از صحت و دقت روش مقیاس‌های چندگانه می‌باشد.

Investigating the nonlinear behavior and stability analysis of the automatic ball balancer by the multiple scales method

Mousa Rezaee^{1*}, Leila Ghorbanpour²

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 51665-315, Tabriz, Iran, m_rezaee@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 December 2016
Accepted 18 March 2017
Available Online 18 April 2017

Keywords:
Automatic Ball Balancer
Dynamic Response
Stability
Multiple Scale Method

ABSTRACT

Unbalance in rotating machines causes malfunction of the system operation and may lead to its failure. Therefore, the sources for imbalance should be investigated, identified, and measured to solve the mentioned challenges. Rotating unbalance appears when the geometric and the inertia axes of the rotor do not coincide, and as a result this causes self-excited vibrations. One of the methods to control and reduce the unbalances is utilizing automatic ball balancer (ABB). In previous studies, the stability and the dynamic behavior of ABB have been mostly investigated using numerical methods, and the perturbation methods are applied only for stability analysis. Because of the advantages of the analytical methods in studying the dynamics of the systems, in the present study, for the first time the dynamic behavior as well as the stability of a rotor equipped with an ABB is analyzed by the multiple scales method. To this end, nonlinear equations of the systems are derived using the Lagrange's equations and, firstly, the multiple scales method is applied to investigate the stability of system and then the response of the system is achieved considering one and two terms of approximation. The results demonstrate that the stability analysis using the multiple scales method and the first method of Lyapunov lead to the same results. Moreover, the responses obtained by the multiple scales method and the mostly used numerical method, Runge-Kutta technique, are in a good agreement.

1- مقدمه

نهایت باعث اختلال در عملکرد ماشین مثلاً شل شدن اتصالات و خرابی یاتاقان‌ها گردد. بنابراین بالانس سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بالانس سیستم‌های دوار طبق تعریف ارائه شده از طرف مؤسسه بین‌المللی استاندارد، فرایندی است که در آن، همه تلاش‌ها در جهت توزیع جرم یک جسم صورت می‌گیرد، به نحوی که بتواند در یاتاقان‌های خود بدون نیروهای

نامیزانی دورانی در ماشین‌های دوار یکی از منابع متداول ایجاد ارتعاشات است. نامیزانی دورانی در این نوع ماشین‌ها اغلب هنگامی بروز می‌کند که مرکز جرم روتور بر محور دوران منطبق نباشد. وجود خروج از مرکزی، نیروهایی را ایجاد می‌کند که ممکن است باعث ارتعاشات با دامنه زیاد و در

Please cite this article using:

M. Rezaee, L. Ghorbanpour, Investigating the nonlinear behavior and stability analysis of the automatic ball balancer by the multiple scales method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 188-198, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

گریز از مرکز ناشی از نامیزانی به دوران درآید [1]. برای بالانس کردن روتورها روش‌های متعددی وجود دارد که هر کدام از این روش‌ها را می‌توان در یکی از دو دسته کلی بالانس در حالت توقف و بالانس در حین کارکرد قرار داد. در روش‌های دسته اول عملیات بالانس پس از متوقف کردن دستگاه انجام می‌گیرد. به این ترتیب که ابتدا صفحاتی جهت انجام عملیات بالانس بر روی روتور نصب می‌گردد و در هنگام نابالانسی پس از توقف دستگاه با افزودن و یا برداشتن وزنه‌هایی از این صفحات عمل بالانس صورت می‌گیرد ولی در روش‌های دسته دوم توقف دستگاه جهت انجام عملیات بالانس لازم نیست. از جمله روش‌های بالانس در حین کارکرد، می‌توان به استفاده از بالانسر دینامیکی اتوماتیک اشاره کرد، که این روش به دو دسته فعال و غیرفعال تقسیم می‌شود. برای بالانس برخی از ماشین‌آلات و تجهیزات از بالانسر دینامیکی اتوماتیک ساچمه‌ای از انواع بالانس‌های غیرفعال استفاده می‌شود که وسیله ساده‌ای شامل یک دیسک دوار شیاردار با تعدادی ساچمه در داخل آن است و در فضای خالی بین ساچمه‌ها در داخل شیار، مایع لزج وجود دارد. در فرایند بالانس، این ساچمه‌ها نهایتاً در وضعیتی قرار می‌گیرند که نابالانسی سیستم را جبران کرده و آن را به حالت بالانس درمی‌آورند [2]. تعداد و ابعاد گلوله‌ها و همچنین ابعاد رینگ به دامنه‌ی نابالانسی متغیر روتور بستگی دارد. بنابراین مطالعه‌ی رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به این نوع بالانسر دارای اهمیت می‌باشد.

اتوبالانسر ساچمه‌ای کاربردهای متنوعی از جمله در سی‌دی رام¹، دی‌وی‌دی² درایوها و ماشین‌های ابزار دارد [3-5]. در سال 1960 تیارل [6] ابزاری را معرفی کرد که روتورهای صفحه‌ای را می‌توانست به طور اتوماتیک بالانس کند. این وسیله شامل یک شیار حلقوی بود که در آن یک یا دو ساچمه با استهلاک لزج وجود داشت. در سال 1964 بالانسر ساچمه‌ای توسط الکساندر [7] مورد تحلیل قرار گرفت ولی طرز کار سیستم به خوبی تشریح نشد. در سال 1965 کید [8]، ملزومات این سیستم را تشریح کرد اما مبانی تئوری سیستم را بیان نکرد. در سال 1999 چانگ و رو [9] با در نظر گرفتن بالانسر با دو ساچمه و با به‌کارگیری معادلات لاگرانژ، معادلات غیرخطی حرکت را برای یک سیستم خودگردان³ نسبت به یک دستگاه مختصات قطبی استنتاج نمودند، از معادلات حرکت برای سیستم خودگردان، وضعیت‌های تعادل را به‌دست آورده و به حل معادلات و بررسی پایداری سیستم حول نقاط تعادل با توجه به معیار پایداری راو-هرویتز پرداختند سپس جهت بررسی صحت روش تحلیل پایداری، پاسخ زمانی سیستم را به وسیله روش آلفای تعمیم یافته⁴ بررسی کردند. در مدل ارائه شده‌ی ایشان علاوه بر بررسی رفتار دینامیکی سیستم، اثرات میرایی در بالانسینگ نیز در نظر گرفته شده بود. چانگ و ژنگ [10] در سال 2003 به بررسی رفتار دینامیکی مدل روتور استودلا- گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. جهت فرمول‌بندی انرژی پتانسیل و جنبشی، اثر زوایای اوپلر را در نظر گرفته و سپس معادلات لاگرانژ را جهت استخراج معادلات حاکم به کار بردند. پس از حل عددی معادلات حاکم نشان دادند که تحت شرایط خاص، بالانسر ساچمه‌ای علاوه بر کاهش ارتعاشات شعاعی، در تصحیح زوایای اوپلر نیز موفق عمل می‌کند. چو و سانگ [11] در سال 2005 با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای با دو ساچمه را با در نظر گرفتن حرکت چرخشی در صفحه مورد ارزیابی قرار دادند. در سال 2009 لو و همکارانش [12] به بررسی

تحلیلی پایداری اتوبالانسر پرداختند. آن‌ها محدوده‌ی پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را به‌وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسئله مقدار ویژه بررسی کردند. نتایج حاصل از بررسی آن‌ها نشان داد برای اتوبالانسری با دو ساچمه شش حالت برای نقاط تعادل وجود دارد که از این شش حالت معمولاً چهار حالت ناپایدار است. در ضمن برای دوره‌های زیر دور بحرانی اول حالت بالانس پایدار وجود ندارد. در سال 2009 احیایی و مقدم [13] به بررسی تحلیلی و عددی یک شفت انعطاف‌پذیر دوار نابالانس واقع بر روی دو تکیه‌گاه خطی و مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. آن‌ها با فرض توزیع نابالانسی به‌صورت جرم‌های نقطه‌ای در طول محور دوار بدون جرم، معادلات حرکت را استخراج کردند و نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای بالانس می‌توان روتور را بالانس نمود و هنگامی که بالانسرها در نزدیکی نابالانسی‌ها قرار داده شوند، نتایج بهتری حاصل می‌شود. در سال 2011 چان و همکارانش [14] تأثیر غیرخطی بودن سیستم در عملکرد بالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با مدل کردن سیستم تعلیق با فنرهای غیرخطی، معادلات حرکت را به‌دست آورده و سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، نقاط تعادل را در حالت پایا که نشانگر میزان ارتعاشات باقی‌مانده و موقعیت ساچمه‌ها در حالت بالانس است، به‌دست آورده و پایداری آن را با تئوری فلوکوئنت بررسی کردند. نتایج نشان داد غیرخطی در نظر گرفتن سیستم باعث تغییر در موقعیت ساچمه‌ها در هنگام پایداری و همچنین محدوده پایداری پیش‌بینی شده نسبت به حالت خطی می‌شود. در سال 2014 رضائی و فتحی [15] تأثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور مجهز به اتوبالانسر در غیاب اثر ژيروسکوپیی را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که انتخاب بهینه‌ی پارامترهای سیستم باعث کاهش قابل ملاحظه‌ی همزمان ماکزیمم دامنه نیروی وارد بر یاتاقان‌ها و زمان بالانس می‌شود. در سال 2015 رضائی و همکارانش [16] با لحاظ کردن اثرات ژيروسکوپیی و با استفاده از الگوریتم سیمپلکس نلد-ر-مید پارامترهای بهینه اتوبالانسر به منظور کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر کردن زوایای اوپلر را استخراج کردند. آن‌ها نشان دادند که وجود ضریب میرایی پایین باعث کاهش زمان بالانس و میرایی سریع زوایای اوپلر می‌شود و همچنین با افزایش جرم ساچمه‌ها زمان مورد نیاز برای بالانس افزایش می‌یابد. در سال 2016 رضائی و همکارانش [17, 18] طرح جدیدی از اتوبالانسر ارائه کردند و معادلات حاکم بر سیستم را با معادلات لاگرانژ استخراج و محدوده‌ی بالانس سیستم را تعیین کردند. آن‌ها برای مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی این سیستم از روش رانگ-کوتا و برای تحلیل پایداری آن از روش اول لیاپانوف استفاده کردند.

مطالعه و بررسی تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که برای بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسرها عموماً از روش‌های عددی استفاده شده است و روش‌هایی مانند روش اغتشاشات، تنها برای بررسی پایداری به‌کار گرفته شده‌اند. روش‌های عددی گرچه کاربردی سهل و سریع را برای دستیابی به پاسخ زمانی و فرکانسی برای پارامترهای انتخابی و مشخص سیستم به کاربر ارائه می‌دهد ولی با این وجود معمولاً جواب‌های تحلیلی تقریبی با وجود دشواری حل، ترجیح داده می‌شوند. از این‌رو که می‌توان آن‌ها را برای پیش‌بینی مسیرهای حرکت، تحلیل تأثیر پارامترهای مختلف و اخذ نتایج کیفی به کار برد. در این مقاله برای اولین بار با روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ روتور نابالانس مجهز به بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای استخراج و پایداری سیستم مذکور بررسی شده است. بدین منظور روتور جفکات مجهز به بالانسر ساچمه‌ای به عنوان یک سیستم دوار در نظر گرفته شده و معادلات غیرخطی

¹ CD ROM² DVD³ autonomous⁴ generalized-a method

که در آن T انرژی جنبشی، V انرژی پتانسیل، F تابع اتلاف ریلی و q_k مختصات تعمیم یافته می‌باشد. برای سیستم مذکور، مختصات تعمیم یافته عبارت از $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ و $\phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ است. سرعت مرکز هندسی، سرعت مرکز جرم و سرعت ناآمین ساچمه به ترتیب طبق روابط (2)، (3) و (4) بیان می‌شود:

$$\vec{v}_c = (\dot{\bar{x}} - \bar{y}\bar{\omega})\vec{i} + (\dot{\bar{y}} - \bar{x}\bar{\omega})\vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{v}_G = (\dot{\bar{x}} - \bar{y}\bar{\omega})\vec{i} + (\dot{\bar{y}} - \bar{x}\bar{\omega} + \bar{e}\bar{\omega})\vec{j} \quad (3)$$

$$\vec{v}_{m_b} = [(\dot{\bar{x}} - \bar{y}\bar{\omega}) - R \sin \phi_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega})]\vec{i} + [(\dot{\bar{y}} + \bar{x}\bar{\omega}) + R \cos \phi_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega})]\vec{j} \quad (4)$$

با فرض این‌که ساچمه‌ها دارای قطر کوچک و جرم برابر باشند، انرژی جنبشی روتور مجهز به اتوبالانسر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m_a\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}m_b \sum_{i=1}^n \vec{v}_{m_b}^2 \\ &= \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m_a[\bar{y}^2\bar{\omega}^2 + \dot{\bar{x}}^2 - 2\bar{y}\bar{\omega}\dot{\bar{x}} + \bar{x}^2\bar{\omega}^2 + \bar{e}^2\bar{\omega}^2 \\ &\quad + \dot{\bar{y}}^2 + 2\bar{x}\bar{e}\bar{\omega}^2 + 2\bar{x}\bar{\omega}\dot{\bar{y}} + 2\bar{e}\bar{\omega}\dot{\bar{y}}] + \frac{1}{2}m_b \sum_{i=1}^n [\bar{y}^2\bar{\omega}^2 + \dot{\bar{x}}^2 \\ &\quad - 2\bar{y}\bar{\omega}\dot{\bar{x}} + R^2(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \sin^2 \phi_i + \dot{\bar{y}}^2 + \bar{x}^2\bar{\omega}^2 + 2\bar{x}\bar{\omega}\dot{\bar{y}} \\ &\quad - 2R(\dot{\bar{x}} - \bar{y}\bar{\omega})(\dot{\phi}_i + \bar{\omega}) \sin \phi_i + R^2(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \cos^2 \phi_i \\ &\quad + R^2(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \cos^2 \phi_i] \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن J ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم است. برای ساده‌سازی معادله‌ی مربوط به انرژی جنبشی، پارامتر جدیدی به نام M که به مفهوم مجموع جرم دیسک و ساچمه‌ها است، به صورت رابطه‌ی (6) تعریف می‌شود:

$$M = m_a + n \times m_b \quad (6)$$

با تعریف پارامتر M ، معادله (5) به صورت رابطه‌ی (7) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M[\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 + 2(\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}})\bar{\omega} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\bar{\omega}^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}m_a[\bar{e}^2\bar{\omega}^2 + 2\bar{x}\bar{e}\bar{\omega}^2 + 2\bar{e}\bar{\omega}\dot{\bar{y}}] \\ &\quad + \frac{1}{2}m_b \sum_{i=1}^n [R^2(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 + 2R(\dot{\bar{y}} + \bar{x}\bar{\omega})(\dot{\phi}_i + \bar{\omega}) \cos \phi_i \\ &\quad - 2R(\dot{\bar{x}} - \bar{y}\bar{\omega})(\dot{\phi}_i + \bar{\omega}) \sin \phi_i] \end{aligned} \quad (7)$$

انرژی پتانسیل الاستیک طبق رابطه‌ی (8) بیان می‌شود:

$$V = \frac{1}{2}k(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (8)$$

تابع اتلاف ریلی را نیز می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}c[\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 + 2(\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}})\bar{\omega} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\bar{\omega}^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}c_b R^2 \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i^2 \end{aligned} \quad (9)$$

در نهایت معادلات حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ، به صورت دسته معادلات بیان شده در روابط (10)، به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} M\ddot{\bar{x}} - m_b R \sum_{i=1}^n [(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \cos \phi_i + (\ddot{\phi}_i + \ddot{\bar{\omega}}) \sin \phi_i] + c\dot{\bar{x}} \\ - m_a \bar{e}\bar{\omega}^2 - 2M\bar{\omega}\dot{\bar{y}} + (k - M\bar{\omega}^2)\bar{x} - (c\bar{\omega} + M\dot{\bar{\omega}})\bar{y} = 0 \end{aligned} \quad (10-الف)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{\bar{y}} - m_b R \sum_{i=1}^n [(\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \sin \phi_i - (\ddot{\phi}_i + \ddot{\bar{\omega}}) \cos \phi_i] + c\dot{\bar{y}} \\ + 2M\bar{\omega}\dot{\bar{x}} + (k - M\bar{\omega}^2)\bar{y} + (c\bar{\omega} + M\dot{\bar{\omega}})\bar{x} + m_a \bar{e}\bar{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (10-ب)$$

$$\begin{aligned} m_b R [(\ddot{\bar{y}} + 2\bar{\omega}\dot{\bar{x}} + \ddot{\bar{\omega}}\bar{x} - \bar{\omega}^2\bar{y}) \cos \phi_i - (\ddot{\bar{x}} - 2\bar{\omega}\dot{\bar{y}} + \ddot{\bar{\omega}}\bar{y} \\ - \bar{\omega}^2\bar{x}) \sin \phi_i + R\ddot{\phi}_i + R\dot{\bar{\omega}}] + c_b R^2 \dot{\phi}_i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (10-ج)$$

برای کسب نتایج عمومی‌تر، متغیرهای بی بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج گردیده است. سپس با روش مقیاس‌های چندگانه با در نظر گرفتن یک جمله و دو جمله از تقریب، پاسخ دینامیکی سیستم مذکور به صورت تحلیلی محاسبه شده است. برای صحت‌سنجی نتایج، پاسخ به دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه با روش عددی رانگ-کوتا نیز مقایسه شده و نتایج حاکی از دقت بالای پاسخ این روش با در نظر گرفتن دو جمله از تقریب می‌باشد. محدوده‌ی پایداری نیز با دو روش مقیاس‌های چندگانه و روش اول لیاپانوف به دست آمده و مقایسه شده است.

2- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

در "شکل 1" شمای کلی یک دیسک دوار نابالانس مجهز به بالانسر ساچمه‌ای اتوماتیک به همراه سیستم تعلیق نشان داده شده است. دیسک با جرم m_a با سرعت زاویه‌ای $\bar{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\ddot{\bar{\omega}}$ می‌چرخد. مرکز جرم دیسک، G ، در فاصله‌ی $\bar{e}$ از مرکز هندسی، C ، قرار دارد. بنابراین نابالانسی دیسک برابر $m_a \bar{e}$ می‌باشد. شعاع مسیر حرکت ساچمه‌ها در شیار بالانسر ساچمه‌ای دینامیکی، c_b ، ثابت میرایی ویسکوز مایع لزج و m_b جرم هر یک از ساچمه‌ها است. بنابراین عبارت $m_b R$ مقدار نابالانسی است که توسط یک ساچمه ایجاد می‌شود. سیستم تعلیق با یک فنر خطی با ضریب سفتی k و یک دمپر ویسکوز با ثابت میرایی c مدل شده است.

مبدأ دستگاه مختصات $x-y$ در نقطه‌ی O که خط واصل یاتاقان‌ها از آن می‌گذرد، قرار دارد. امتداد محور x در هر لحظه به موازات CG در نظر گرفته می‌شود. این دستگاه حول نقطه ثابت O با سرعتی برابر با سرعت زاویه‌ای دیسک می‌چرخد. زمانی که دیسک نمی‌چرخد، مرکز هندسی بر نقطه‌ی O منطبق می‌گردد و فنرها در حالت آزاد قرار دارند و در زمان چرخش، دیسک تنها دارای حرکت انتقالی نسبت به دستگاه $x-y$ است، که در آن مختصات مرکز هندسی با $(\bar{x}, \bar{y})$ بیان می‌شود. موقعیت ساچمه‌ی i ام با زاویه‌ی ϕ_i که از مرکز جرم دیسک سنجیده می‌شود، مشخص می‌گردد.

معادلات غیرخطی حرکت اتوبالانسر با استفاده از معادلات لاگرانژ که به صورت رابطه‌ی (1) می‌باشد، به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

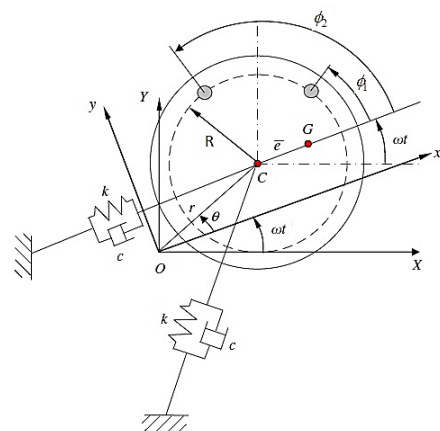


Fig. 1 Schematic of the Automatic Ball Balancer and the reference frames [12]

شکل 1 شماتیک بالانسر ساچمه‌ای اتوماتیک و دستگاه‌های مختصات [12]

$$\mu_b \omega^2 (x_0 \sin \phi_{i0} - y_0 \cos \phi_{i0}) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (17-ج)$$

در به‌دست آوردن روابط فوق، از ساده‌سازی زیر استفاده شده است:

$$\cos(\phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) = \cos \phi_0 - \varepsilon \phi_1 \sin \phi_0 - \varepsilon^2 \phi_2 \sin \phi_0 + O(\varepsilon^3) \quad (18-الف)$$

$$\sin(\phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2) = \sin \phi_0 + \varepsilon \phi_1 \cos \phi_0 - \varepsilon^2 \phi_2 \cos \phi_0 + O(\varepsilon^3) \quad (18-ب)$$

بردار $[x_0 \ y_0 \ \phi_{10} \ \phi_{20}]$ نشانگر نقطه‌ی تعادل سیستم است. بنابراین عناصر این بردار، اعدادی ثابت هستند و مشتقات در آن‌ها برابر صفر است. برای حل معادلات (17)، مختصات داده شده با تغییر متغیر (19) در دستگاه مختصات قطبی بیان می‌شوند:

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = r_0 \sin \theta_0 \quad (19)$$

بنابراین معادلات (17) به شکل زیر در می‌آیند:

$$(1 - \omega^2)r_0 \cos \theta_0 - 2\zeta \omega r_0 \sin \theta_0 - \mu_b \omega^2 (\cos \phi_{10} + \cos \phi_{20}) - \frac{\mu_b \omega^2}{\eta} = 0 \quad (20-الف)$$

$$(1 - \omega^2)r_0 \sin \theta_0 + 2\zeta \omega r_0 \cos \theta_0 - \mu_b \omega^2 (\sin \phi_{10} + \sin \phi_{20}) = 0 \quad (20-ب)$$

$$\mu_b \omega^2 r_0 \sin(\phi_{i0} - \theta_0) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (20-ج)$$

طبق معادله‌ی (20-ج)، در موقعیت تعادل باید یکی از شروط $r_0 = 0$ و یا $\sin(\phi_{i0} - \theta_0) = 0$ برقرار باشد. $r_0 = 0$ نشانگر حالت بالانس کامل و $r_0 \neq 0$ و $\sin(\phi_{i0} - \theta_0) = 0$ نشان‌دهنده‌ی نقطه‌ی تعادل نابالانس است. به جهت اهمیت حالت بالانس کامل، این حالت در ادامه بررسی خواهد شد. برای حالت بالانس کامل، با جای‌گذاری $r_0 = 0$ در معادلات (20)، معادلات (21) به دست می‌آیند:

$$\cos \phi_{10} + \cos \phi_{20} = -\frac{1}{\eta} \quad (21-الف)$$

$$\sin \phi_{10} + \sin \phi_{20} = 0 \quad (21-ب)$$

از حل معادلات (21) داریم:

$$\phi_{10} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2\eta}\right), \quad \phi_{20} = -\phi_{10} \quad (22)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که در حالت بالانس کامل، دو ساچمه به صورت متقارن نسبت به مرکز جرم دیسک قرار می‌گیرد. طبق معادلات (22)، ϕ_{i0} فقط در حالتی که $\eta \geq 1/2$ برقرار است، وجود دارد.

3-1- پاسخ با یک جمله از تقریب

برای به‌دست آوردن پاسخ سیستم با در نظر گرفتن یک جمله از تقریب، پاسخ معادلات (12) به شکل معادلات (23) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \\ y(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \\ \phi_1(\tau; \varepsilon) &= \phi_{10} + \varepsilon \phi_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 \phi_{12}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \\ \phi_2(\tau; \varepsilon) &= \phi_{20} + \varepsilon \phi_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 \phi_{22}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (23)$$

با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم درجه از ε ، معادلات دیفرانسیل مربوط به جملات با ضرایب ε^1 و ε^2 به ترتیب مطابق روابط (24) و (25) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + 2\zeta D_0 x_1 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i1} + \dot{\omega} \phi_{i1}) \cos \phi_{i0} \\ + (-\omega^2 \phi_{i1} + D_0^2 \phi_{i1}) \sin \phi_{i0}] - 2\omega D_0 y_1 - \dot{\omega} y_1 \\ + (1 - \omega^2) x_1 - 2\zeta \omega y_1 = 0 \end{aligned} \quad (24-الف)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{R}, \quad y = \frac{\bar{y}}{R}, \quad \tau = \omega_n t, \quad e = \frac{\bar{e}}{R} \\ c &= 2M\zeta\omega_n, \quad c_b = 2m_b\beta\omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \\ \omega &= \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}, \quad \mu_b = \frac{m_b}{M}, \quad \eta = \frac{m_b R}{m_d \bar{e}} \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط اخیر ω نشانگر نسبت سرعت زاویه‌ای به فرکانس طبیعی سیستم و η نسبت نابالانسی ایجاد شده توسط یک ساچمه به نابالانسی دیسک است. با جایگذاری معادلات (11) در معادلات (10)، معادلات حرکت بی‌بعد به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} x'' - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(\phi'_i + \omega)^2 \cos \phi_i + (\phi''_i + \dot{\omega}) \sin \phi_i] + 2\zeta x' \\ - 2\omega y' + (1 - \omega^2)x - (2\zeta\omega + \dot{\omega})y = \frac{\mu_b \omega^2}{\eta} \end{aligned} \quad (12-الف)$$

$$\begin{aligned} y'' - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(\phi'_i + \omega)^2 \sin \phi_i - (\phi''_i + \dot{\omega}) \cos \phi_i] + 2\zeta y' \\ + 2\omega x' + (1 - \omega^2)y + (2\zeta\omega + \dot{\omega})x = \frac{-\mu_b \dot{\omega}}{\eta} \end{aligned} \quad (12-ب)$$

$$\begin{aligned} \mu_b [(y'' + 2\omega x' + \dot{\omega}x - \omega^2 y) \cos \phi_i - (x'' - 2\omega y' + \dot{\omega}y \\ - \omega^2 x) \sin \phi_i + \phi''_i + \dot{\omega}] + 2\beta \mu_b \phi'_i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (12-ج)$$

که در آن $(\cdot)$ به معنای مشتق نسبت به τ است و تغییرات فرکانس بی‌بعد نسبت به زمان با $\dot{\omega}$ نشان داده شده است.

3- اعمال روش مقیاس‌های چندگانه

برای حل معادلات (12) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ به صورت رابطه‌ی (13) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ y(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \phi_1(\tau; \varepsilon) &= \phi_{10} + \varepsilon \phi_{11}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \phi_{12}(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \phi_2(\tau; \varepsilon) &= \phi_{20} + \varepsilon \phi_{21}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \phi_{22}(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن مقیاس‌های زمانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

مشتقات اول و دوم زمانی به شکل بی‌بعد عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + O(\varepsilon^3) \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

بعد از اعمال روابط (13) و (15) در معادلات (12)، از مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم درجه از ε ، دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌دست می‌آیند. دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به ضرایب جمله‌ی ε^0 طبق رابطه (17) می‌باشد:

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)x_0 - 2\zeta \omega y_0 - \mu_b \omega^2 (\cos \phi_{10} + \cos \phi_{20}) \\ - \frac{\mu_b \omega^2}{\eta} = 0 \\ (1 - \omega^2)y_0 + 2\zeta \omega x_0 - \mu_b \omega^2 (\sin \phi_{10} + \sin \phi_{20}) = 0 \end{aligned} \quad (17-الف)$$

(17-ب)

شرط وجود جواب غیربدیهی برای c_i ها در دستگاه معادلات (27)، صفر بودن ماتریس ضرایب می‌باشد. به این ترتیب از معادله‌ی مربوط به دترمینان، هشت جواب برای λ به دست می‌آید. شرط لازم برای پایداری، منفی بودن قسمت حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه است. به این ترتیب پاسخ کلی دسته معادلات (24) به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i T_0}, & y_1 &= \sum_{i=1}^8 c_{2i} C_i e^{\lambda_i T_0} \\ \phi_{11} &= \sum_{i=1}^8 c_{3i} C_i e^{\lambda_i T_0}, & \phi_{21} &= \sum_{i=1}^8 c_{4i} C_i e^{\lambda_i T_0}, \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن c_{ij} ها معرف ضرایب به دست آمده از دستگاه (27) طبق مسأله‌ی مقدار ویژه با فرض $c_1 = 1$ به ازای جایگذاری هر λ_j برای c_i ، $i = 2, 3, 4$ هستند. برای کامل شدن حل (29)، باید ضرایب مجهول C_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ محاسبه شود. شرط کافی پایداری بعد از به دست آمدن $C_i(T_1)$ ها مشخص خواهد شد. برای به دست آوردن $C_i(T_1)$ ها از معادلات (25) استفاده می‌گردد که پاسخ همگن آن به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^8 Q_{1i} e^{\lambda_i T_0}, & y_1 &= \sum_{i=1}^8 Q_{2i} e^{\lambda_i T_0} \\ \phi_{11} &= \sum_{i=1}^8 Q_{3i} e^{\lambda_i T_0}, & \phi_{21} &= \sum_{i=1}^8 Q_{4i} e^{\lambda_i T_0}, \end{aligned} \quad (30)$$

با جایگذاری معادلات (29) و (30) در معادلات (25) و مرتب‌سازی بر حسب ضرایب عبارات $e^{\lambda_i T_0}$ داریم:

$$[A]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} Q_{1i} \\ Q_{2i} \\ Q_{3i} \\ Q_{4i} \end{Bmatrix} = \{G\}_{4 \times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (31)$$

که در آن $[A]_{4 \times 4}$ ماتریس ضرایب رابطه‌ی (27) با جایگذاری هر کدام از λ_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ است و درایه‌های بردار $\{G\}$ ضرایب $e^{\lambda_i T_0}$ در طرف دوم دسته معادلات (25) هستند، که پس از ساده‌سازی به شکل روابط (32) خواهند بود:

$$G(1,1) = \dot{C}_1(T_1) [\mu_b (2\omega c_{3i} \cos \phi_{10} + 2\omega c_{4i} \cos \phi_{20}) - 2\lambda_i - 2\zeta + 2\omega c_{2i} + \mu_b (2\lambda_i c_{3i} \sin \phi_{10} + 2\lambda_i c_{4i} \sin \phi_{20})] \quad (32-الف)$$

$$G(2,1) = \dot{C}_1(T_1) [\mu_b (2\omega c_{3i} \sin \phi_{10} + 2\omega c_{4i} \sin \phi_{20}) - 2c_{2i} \lambda_i - 2\zeta c_{2i} - 2\omega - \mu_b (2\lambda_i c_{3i} \cos \phi_{10} + 2\lambda_i c_{4i} \cos \phi_{20})] \quad (32-ب)$$

$$G(3,1) = \dot{C}_1(T_1) [-\mu_b (2c_{2i} \lambda_i + 2\omega) \cos \phi_{10} - 2\beta \mu_b c_{3i} + \mu_b (2\lambda_i - 2\omega c_{2i}) \sin \phi_{10} - 2\lambda_i \mu_b c_{3i}] \quad (32-ج)$$

$$G(4,1) = \dot{C}_1(T_1) [-\mu_b (2c_{2i} \lambda_i + 2\omega) \cos \phi_{20} - 2\beta \mu_b c_{4i} + \mu_b (2\lambda_i - 2\omega c_{2i}) \sin \phi_{20} - 2\lambda_i \mu_b c_{4i}] \quad (32-د)$$

چون دترمینان ماتریس $[A]_{4 \times 4}$ به ازای λ_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ برابر صفر است، برای به دست آوردن پاسخ غیرصفر برای $\{Q_{1i} \ Q_{2i} \ Q_{3i} \ Q_{4i}\}$ باید دترمینان ماتریس حاصل از جایگذاری بردار $\{G\}$ به جای یکی از ستون‌های ماتریس $[A]_{4 \times 4}$ برابر صفر باشد. بدین ترتیب به ازای $i = 1, 2, \dots, 8$ هشت معادله به دست می‌آید که از آن‌ها هشت مجهول C_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ محاسبه خواهد شد. در مسأله‌ی مذکور، طبق رابطه‌ی (32) تمامی درایه‌های بردار $\{G\}$ در $\dot{C}_1(T_1)$ ضرب شده‌اند. بنابراین دترمینان ماتریس حاصل از جایگذاری این بردار با یکی از ستون‌های ماتریس $[A]_{4 \times 4}$ به شکل ضرب یک عدد ثابت در

$$D_0^2 y_1 + 2\zeta D_0 y_1 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i1} + \dot{\omega} \phi_{i1}) \sin \phi_{i0} + (-\omega^2 \phi_{i1} - D_0^2 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0}] + 2\omega D_0 x_1 + \dot{\omega} x_1 + (1 - \omega^2) y_1 + 2\zeta \omega x_1 = 0 \quad (24-ب)$$

$$\begin{aligned} \mu_b [(D_0^2 y_1 + 2\omega D_0 x_1 - \omega^2 y_1 + \dot{\omega} x_1 + \omega^2 x_0 \phi_{i1} - \dot{\omega} y_0 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0} + (\omega^2 y_0 \phi_{i1} - \dot{\omega} x_0 \phi_{i1} - D_0^2 x_1 + 2\omega D_0 y_1 + \omega^2 x_1 - \dot{\omega} y_1) \sin \phi_{i0} + D_0^2 \phi_{i1}] \\ + 2\beta \mu_b D_0 \phi_{i1} = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (24-ج)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + 2\zeta D_0 x_2 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i2} + \dot{\omega} \phi_{i2}) \cos \phi_{i0} - (\omega^2 \phi_{i2} - D_0^2 \phi_{i2}) \sin \phi_{i0}] - 2\omega D_0 y_2 - \dot{\omega} y_2 - 2\zeta \omega y_2 \\ + (1 - \omega^2) x_2 = -2D_0 D_1 x_1 + \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2D_0 D_1 \phi_{i1} - 2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i1}) \sin \phi_{i0} - 2\zeta D_1 x_1 + 2\omega D_1 y_1 \\ + (2\omega D_1 \phi_{i1} + (D_0 \phi_{i1})^2 + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0}] \end{aligned} \quad (25-الف)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 y_2 + 2\zeta D_0 y_2 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i2} + \dot{\omega} \phi_{i2}) \sin \phi_{i0} + (\omega^2 \phi_{i2} - D_0^2 \phi_{i2}) \cos \phi_{i0}] + 2\omega D_0 x_2 + \dot{\omega} x_2 + 2\zeta \omega x_2 \\ + (1 - \omega^2) y_2 = -2D_0 D_1 y_1 + \mu_b \sum_{i=1}^2 [(-2D_0 D_1 \phi_{i1} + 2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0} - 2\zeta D_1 y_1 - 2\omega D_1 x_1 \\ + (2\omega D_1 \phi_{i1} + (D_0 \phi_{i1})^2 + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i1}) \sin \phi_{i0}] \end{aligned} \quad (25-ب)$$

$$\begin{aligned} \mu_b [(D_0^2 y_2 + 2\omega D_0 x_2 - \omega^2 y_2 + \dot{\omega} x_2 + \omega^2 x_0 \phi_{i2} - \dot{\omega} y_0 \phi_{i2}) \cos \phi_{i0} + (\omega^2 y_0 \phi_{i2} - \dot{\omega} x_0 \phi_{i2} - D_0^2 x_2 + 2\omega D_0 y_2 + \omega^2 x_2 - \dot{\omega} y_2) \sin \phi_{i0} + D_0^2 \phi_{i2}] \\ + 2\beta \mu_b D_0 \phi_{i2} = -\mu_b [2D_0 D_1 \phi_{i1} + (2D_0 D_1 y_1 + 2\omega D_1 x_1 - \phi_{i1} D_0^2 x_1 + 2\omega \phi_{i1} D_0 y_1 + \phi_{i1} \omega^2 x_1 - \phi_{i1} \dot{\omega} y_1) \cos \phi_{i0} \\ + (-2D_0 D_1 x_1 + 2\omega D_1 y_1 - \phi_{i1} D_0^2 y_1 - 2\omega \phi_{i1} D_0 x_1 + \phi_{i1} \omega^2 y_1 - \phi_{i1} \dot{\omega} x_1) \sin \phi_{i0}] - 2\beta \mu_b D_1 \phi_{i1}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (25-ج)$$

با توجه به همگن بودن معادلات دیفرانسیل (24)، برای حل این دسته از معادلات، پاسخ به صورت نمایی و مطابق روابط (26) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda T_0}, & y_1 &= c_2 e^{\lambda T_0}, \\ \phi_{11} &= c_3 e^{\lambda T_0}, & \phi_{12} &= c_4 e^{\lambda T_0} \end{aligned} \quad (26)$$

با جای گذاری معادلات (26) در (24) داریم:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1 - \omega^2 & -2\omega\lambda - 2\zeta\omega - \dot{\omega} & -\mu_b S_1^1 & -\mu_b S_2^1 \\ 2\omega\lambda + 2\zeta\omega + \dot{\omega} & \lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1 - \omega^2 & -\mu_b S_1^2 & -\mu_b S_2^2 \\ \mu_b S_1^3 & \mu_b S_1^4 & \mu_b S_1^5 & 0 \\ \mu_b S_2^3 & \mu_b S_2^4 & 0 & \mu_b S_2^5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_1^1 &= (2\omega\lambda + \dot{\omega}) \cos \phi_{i0} + (\lambda^2 - \omega^2) \sin \phi_{i0} \\ S_1^2 &= (2\omega\lambda + \dot{\omega}) \sin \phi_{i0} - (\lambda^2 - \omega^2) \cos \phi_{i0} \\ S_1^3 &= (2\omega\lambda + \dot{\omega}) \cos \phi_{i0} - (\lambda^2 - \omega^2) \sin \phi_{i0} \\ S_1^4 &= (2\omega\lambda - \dot{\omega}) \sin \phi_{i0} + (\lambda^2 - \omega^2) \cos \phi_{i0} \\ S_1^5 &= (\omega^2 y_0 - \dot{\omega} x_0) \sin \phi_{i0} + (\omega^2 x_0 - \dot{\omega} y_0) \cos \phi_{i0} + \lambda^2 + 2\beta\lambda \end{aligned} \quad (28)$$

$\hat{C}_i(T_1)$ خواهد بود و چون این دترمینان برابر صفر است، بنابراین باید $\hat{C}_i(T_1)$ برابر صفر باشد. با اعمال شرایط اولیه در معادلات (29) و در نظر گرفتن فقط دو جمله از معادلات (23)، داریم:

$$\varepsilon \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ c_{21}\lambda_1 & c_{22}\lambda_2 & c_{23}\lambda_3 & c_{24}\lambda_4 & c_{25}\lambda_5 & c_{26}\lambda_6 & c_{27}\lambda_7 \\ c_{31}\lambda_1 & c_{32}\lambda_2 & c_{33}\lambda_3 & c_{34}\lambda_4 & c_{35}\lambda_5 & c_{36}\lambda_6 & c_{37}\lambda_7 \\ c_{41}\lambda_1 & c_{42}\lambda_2 & c_{43}\lambda_3 & c_{44}\lambda_4 & c_{45}\lambda_5 & c_{46}\lambda_6 & c_{47}\lambda_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) - x_0 \\ y(0) - y_0 \\ \phi_1(0) - \phi_{10} \\ \phi_2(0) - \phi_{20} \\ \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} \quad (33)$$

به این ترتیب ثوابت C_i به دست می‌آیند، و در نهایت حل کامل می‌شود.

2-3- پاسخ با دو جمله از تقریب

پاسخ معادلات (12) با در نظر گرفتن دو جمله از تقریب را به صورت معادله‌ی (34) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_2) \\ &\quad + \varepsilon^3 x_3(T_0, T_2) + O(\varepsilon^4) \\ y(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_2) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_2) \\ &\quad + \varepsilon^3 y_3(T_0, T_2) + O(\varepsilon^4) \\ \phi_1(\tau; \varepsilon) &= \phi_{10} + \varepsilon \phi_{11}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 \phi_{12}(T_0, T_2) \\ &\quad + \varepsilon^3 \phi_{13}(T_0, T_2) + O(\varepsilon^4) \\ \phi_2(\tau; \varepsilon) &= \phi_{20} + \varepsilon \phi_{21}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 \phi_{22}(T_0, T_2) \\ &\quad + \varepsilon^3 \phi_{23}(T_0, T_2) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (34)$$

در رابطه‌ی (34)، استقلال پاسخ از مقیاس زمانی T_1 لحاظ شده است. پس از اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم درجه از ε ، معادلات دیفرانسیل مربوط به ضرایب جمله‌ی ε^1 مطابق معادلات (24) بدست می‌آید. همچنین معادلات به دست آمده از ضرایب جملات ε^2 و ε^3 به ترتیب مطابق روابط (35) و (36) می‌باشد:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + 2\zeta D_0 x_2 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i2} + \dot{\omega} \phi_{i2}) \cos \phi_{i0} \\ - (\omega^2 \phi_{i2} - D_0^2 \phi_{i2}) \sin \phi_{i0}] - 2\omega D_0 y_2 - \dot{\omega} y_2 - 2\zeta \omega y_2 \\ + (1 - \omega^2) x_2 = \mu_b \sum_{i=1}^2 [(-2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i1}) \sin \phi_{i0} \\ + ((D_0 \phi_{i1})^2 + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0}] \end{aligned} \quad (35\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} D_0^2 y_2 + 2\zeta D_0 y_2 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i2} + \dot{\omega} \phi_{i2}) \sin \phi_{i0} \\ + (\omega^2 \phi_{i2} - D_0^2 \phi_{i2}) \cos \phi_{i0}] + 2\omega D_0 x_2 + \dot{\omega} x_2 + 2\zeta \omega x_2 \\ + (1 - \omega^2) y_2 = \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0} \\ + ((D_0 \phi_{i1})^2 + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i1}) \sin \phi_{i0}] \end{aligned} \quad (35\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} \mu_b [(D_0^2 y_2 + 2\omega D_0 x_2 - \omega^2 y_2 + \dot{\omega} x_2 + \omega^2 x_0 \phi_{i2} \\ - \dot{\omega} y_0 \phi_{i2}) \cos \phi_{i0} + (\omega^2 y_0 \phi_{i2} - \dot{\omega} x_0 \phi_{i2} - D_0^2 x_2 \\ + 2\omega D_0 y_2 + \omega^2 x_2 - \dot{\omega} y_2) \sin \phi_{i0} + D_0^2 \phi_{i2}] \\ + 2\beta \mu_b D_0 \phi_{i2} = \mu_b [(+\phi_{i1} D_0^2 x_1 - 2\omega \phi_{i1} D_0 y_1 \\ - \phi_{i1} \omega^2 x_1 + \phi_{i1} \dot{\omega} y_1) \cos \phi_{i0} + (\phi_{i1} D_0^2 y_1 \end{aligned}$$

$$+ 2\omega \phi_{i1} D_0 x_1 - \phi_{i1} \omega^2 y_1 + \phi_{i1} \dot{\omega} x_1) \sin \phi_{i0}] \quad i = 1, 2 \quad (35\text{-ج})$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_3 + 2\zeta D_0 x_3 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i3} + \dot{\omega} \phi_{i3}) \cos \phi_{i0} \\ - (\omega^2 \phi_{i3} - D_0^2 \phi_{i3}) \sin \phi_{i0}] - 2\omega D_0 y_3 - \dot{\omega} y_3 - 2\zeta \omega y_3 \\ + (1 - \omega^2) x_3 = -2D_0 D_2 x_1 + \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2D_0 D_2 \phi_{i1} \\ - 2\omega \phi_{i2} D_0 \phi_{i1} + \dot{\omega} \phi_{i1} \phi_{i2} - 2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i2} \\ - \phi_{i1} (D_0 \phi_{i1})^2) \sin \phi_{i0} + (2\omega D_2 \phi_{i1} + 2D_0 \phi_{i1} D_0 \phi_{i2} \\ + \phi_{i2} D_0^2 \phi_{i1} + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i2} - \omega^2 \phi_{i1} \phi_{i2}) \cos \phi_{i0}] \\ - 2\zeta D_2 x_1 + 2\omega D_2 y_1 \end{aligned} \quad (36\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} D_0^2 y_3 + 2\zeta D_0 y_3 - \mu_b \sum_{i=1}^2 [(2\omega D_0 \phi_{i3} + \dot{\omega} \phi_{i3}) \sin \phi_{i0} \\ + (\omega^2 \phi_{i3} - D_0^2 \phi_{i3}) \cos \phi_{i0}] + 2\omega D_0 x_3 + \dot{\omega} x_3 + 2\zeta \omega x_3 \\ + (1 - \omega^2) y_3 = -2D_0 D_2 y_1 + \mu_b \sum_{i=1}^2 [(-2D_0 D_2 \phi_{i1} \\ + 2\omega \phi_{i2} D_0 \phi_{i1} + \dot{\omega} \phi_{i1} \phi_{i2} + 2\omega \phi_{i1} D_0 \phi_{i2} \\ + \phi_{i1} (D_0 \phi_{i1})^2) \cos \phi_{i0} + (2\omega D_2 \phi_{i1} + 2D_0 \phi_{i1} D_0 \phi_{i2} \\ + \phi_{i2} D_0^2 \phi_{i1} + \phi_{i1} D_0^2 \phi_{i2} - \omega^2 \phi_{i1} \phi_{i2}) \sin \phi_{i0}] \\ - 2\zeta D_2 y_1 - 2\omega D_2 x_1 \end{aligned} \quad (36\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} \mu_b [(D_0^2 y_3 + 2\omega D_0 x_3 - \omega^2 y_3 + \dot{\omega} x_3 + \omega^2 x_0 \phi_{i3} \\ - \dot{\omega} y_0 \phi_{i3}) \cos \phi_{i0} + (\omega^2 y_0 \phi_{i3} - \dot{\omega} x_0 \phi_{i3} - D_0^2 x_3 \\ + 2\omega D_0 y_3 + \omega^2 x_3 - \dot{\omega} y_3) \sin \phi_{i0} + D_0^2 \phi_{i3}] \\ + 2\beta \mu_b D_0 \phi_{i3} = -\mu_b [2D_0 D_2 \phi_{i1} + (2D_0 D_2 y_1 + 2\omega D_2 x_1 \\ - \phi_{i2} D_0^2 x_1 - \phi_{i1} D_0^2 x_2 + 2\omega \phi_{i2} D_0 y_1 + 2\omega \phi_{i1} D_0 y_2 \\ + \phi_{i2} \omega^2 x_1 + \phi_{i1} \omega^2 x_2 - \phi_{i2} \dot{\omega} y_1 - \phi_{i1} \dot{\omega} y_2 \\ - \dot{\omega} x_0 \phi_{i1} \phi_{i2} + \omega^2 y_0 \phi_{i1} \phi_{i2}) \cos \phi_{i0} - (\phi_{i2} D_0^2 y_1 \\ + \phi_{i1} D_0^2 y_2 + 2\omega \phi_{i2} D_0 x_1 + 2\omega \phi_{i1} D_0 x_2 - \phi_{i2} \omega^2 y_1 \\ - \phi_{i1} \omega^2 y_2 + \phi_{i2} \dot{\omega} x_1 + \phi_{i1} \dot{\omega} x_2 - 2D_0 D_2 x_1 + 2\omega D_2 y_1 \\ - \dot{\omega} x_0 \phi_{i1} \phi_{i2} + \omega^2 y_0 \phi_{i1} \phi_{i2}) \sin \phi_{i0}] - 2\beta \mu_b D_2 \phi_{i1}, \\ i = 1, 2 \end{aligned} \quad (36\text{-ج})$$

شکل کلی پاسخ معادلات (24)، به صورت روابط (26) فرض می‌شود و پاسخ معادلات مربوط به ضرایب جمله‌ی ε به صورت معادلات (29) به دست می‌آید. با این تفاوت که در این معادلات با در نظر گرفتن دو جمله از تقریب، ضرایب C_i تابعی از مقیاس زمانی T_2 می‌باشند. طبق معادلات به دست آمده از ضرایب جمله‌ی ε^3 و مطابق روندی مشابه بخش قبل، استقلال C_i ها از مقیاس زمانی T_2 نیز اثبات می‌شود.

برای تقریب دوم باید پاسخ قسمت خصوصی معادلات مربوط به ضرایب جمله‌ی ε^2 نیز محاسبه شود. طرف دوم دسته معادلات (35) حاصل ضرب هر یک از جملات x_1 ، y_1 ، ϕ_{11} و ϕ_{21} و مشتقات آن‌ها نسبت به T_0 است. بنابراین برای در نظر گرفتن تمامی حالات با توجه به معادلات (29)، پاسخ خصوصی معادلات (35) به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} x_2 &= \sum_{i=1}^8 X_i e^{2\lambda_i T_0} + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 X_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j) T_0} \\ y_2 &= \sum_{i=1}^8 Y_i e^{2\lambda_i T_0} + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 Y_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j) T_0} \\ \phi_{12} &= \sum_{i=1}^8 B_i^1 e^{2\lambda_i T_0} + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 B_{ij}^1 e^{(\lambda_i + \lambda_j) T_0} \\ \phi_{22} &= \sum_{i=1}^8 B_i^2 e^{2\lambda_i T_0} + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 B_{ij}^2 e^{(\lambda_i + \lambda_j) T_0} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\vec{x} = [x, y, \phi_1, \phi_2, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2]^T \quad (41)$$

$$\vec{X} = [X_x, X_y, X_{\phi_1}, X_{\phi_2}, X_{\dot{x}}, X_{\dot{y}}, X_{\dot{\phi}_1}, X_{\dot{\phi}_2}]^T \quad (42)$$

و ماتریس A در رابطه‌ی (40) بیانگر ضرایب مشتقات مرتبه دوم معادلات حرکت است که مطابق رابطه‌ی (43) تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

در این رابطه، 1 ماتریس مربعی واحد از مرتبه‌ی $n + 2$ است و ماتریس A_1 به صورت رابطه‌ی (44) بیان می‌شود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mu_b \sin \phi_1 & -\mu_b \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & \mu_b \cos \phi_1 & \mu_b \cos \phi_2 \\ -\mu_b \sin \phi_1 & \mu_b \cos \phi_1 & \mu_b & 0 \\ -\mu_b \sin \phi_2 & \mu_b \cos \phi_2 & 0 & \mu_b \end{bmatrix} \quad (44)$$

به این ترتیب با بیان معادلات در فضای حالت، $2n + 4$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن $\vec{x} = 0$ ، وضعیت‌های تعادل به صورت رابطه (45) می‌باشد:

$$\vec{X}(\vec{x}^*) = 0 \quad (45)$$

که در آن $\vec{x}^*$ نشانگر بردار تعادل سیستم است. با در نظر گرفتن بردار $\vec{x}^*$ به صورت روابط (46)، معادلات تعادل به صورت رابطه‌ی (17) بیان می‌شوند.

$$\vec{x}^* = [x_0, y_0, \phi_{10}, \phi_{20}] \quad (46)$$

حل دستگاه معادلات (17) بعد از تبدیل به دستگاه مختصات قطبی و برای حالت بالانس کامل، قبلاً در روابط (21) و (22) به دست آمده است. برای بررسی انحراف کوچک سیستم حول نقاط تعادل، از مختصه‌های اغتشاشی به صورت رابطه (47) استفاده می‌شود:

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{\Delta x} \quad (47)$$

که در آن $\vec{x}^*$ نقطه تعادل سیستم است و بردار $\vec{\Delta x}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\Delta x} = [\Delta x, \Delta y, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{\phi}_1, \Delta \dot{\phi}_2]^T \quad (48)$$

در واقع مؤلفه‌های Δx ، Δy ، $\Delta \phi_1$ ، $\Delta \phi_2$ ، $\Delta \dot{x}$ ، $\Delta \dot{y}$ ، $\Delta \dot{\phi}_1$ و $\Delta \dot{\phi}_2$ تغییرات بسیار کوچکی هستند که به ترتیب در $\dot{x}$ ، $\dot{y}$ ، $\dot{\phi}_1$ و $\dot{\phi}_2$ ایجاد شده‌اند. پس با در نظر گرفتن روابط (47) و (48)، معادلات حرکت در فضای حالت به صورت رابطه (49) به دست می‌آید:

$$A(\vec{x}^* + \vec{\Delta x})\vec{\Delta x} = \vec{X}(\vec{x}^* + \vec{\Delta x}) - \vec{X}(\vec{x}^*) \quad (49)$$

ساده‌سازی و بسط دادن رابطه (49) و صرف‌نظر کردن از جملات با مرتبه دوم و بالاتر $\vec{\Delta x}$ ، به رابطه‌ی (50) منجر می‌شود:

$$A(\vec{x}^*)\vec{\Delta x} = B(\vec{x}^*)\vec{\Delta x} \quad (50)$$

در رابطه (50)، B ماتریس مربعی از مرتبه $2n + 4$ است که به صورت رابطه (51) تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B_1 & -B_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

و ماتریس‌های B_1 و B_2 طبق روابط (52) و (53) برابر هستند با:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 & -2\zeta\omega & \mu_b\omega^2s1 & -\mu_b\omega^2c1 & \mu_b\omega^2s1 & \mu_b\omega^2s2 \\ 2\zeta\omega & 1 - \omega^2 & -\mu_b\omega^2c1 & -\mu_b\omega^2c2 & -\mu_b\omega^2c1 & -\mu_b\omega^2c2 \\ \mu_b\omega^2s1 & -\mu_b\omega^2c1 & \mu_b\omega^2(x_0c1 + y_0s1) & 0 & 0 & 0 \\ \mu_b\omega^2s2 & -\mu_b\omega^2c2 & 0 & \mu_b\omega^2(x_0c2 + y_0s2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

با جایگذاری این معادلات در معادلات (35) و مرتب کردن طرفین روابط برحسب عبارات نمایی با توان‌های یکسان و با استفاده از روابط (29)، هر کدام از ضرایب به صورت تابعی از C_i ها به دست می‌آیند. بنابراین پاسخ نهایی برحسب C_i ها به صورت رابطه‌ی (38) خواهد شد:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3) \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + O(\varepsilon^3) \\ \phi_1 &= \phi_{10} + \varepsilon \phi_{11} + \varepsilon^2 \phi_{12} + O(\varepsilon^3) \\ \phi_2 &= \phi_{20} + \varepsilon \phi_{21} + \varepsilon^2 \phi_{22} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن $[x \ y \ \phi_1 \ \phi_2]$ تنها تابعی از ضرایب C_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ هستند. برای تکمیل حل ضرایب C_i ها در روابط (38) با اعمال شرایط اولیه که هشت معادله‌ی غیرخطی به صورت روابط (39) هستند، محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^8 C_i + \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 X_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 X_{ij} \right) \\ y(0) &= y_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^8 c_{2i} C_i + \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 Y_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 Y_{ij} \right) \\ \phi_1(0) &= \phi_{10} + \varepsilon \sum_{i=1}^8 c_{3i} C_i + \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 B_i^1 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 B_{ij}^1 \right) \\ \phi_2(0) &= \phi_{20} + \varepsilon \sum_{i=1}^8 c_{4i} C_i + \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 B_i^2 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 B_{ij}^2 \right) \\ \dot{x}(0) &= \varepsilon \sum_{i=1}^8 \lambda_i C_i \\ &+ \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 2\lambda_i X_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 (\lambda_i + \lambda_j) X_{ij} \right) \\ \dot{y}(0) &= \varepsilon \sum_{i=1}^8 \lambda_i c_{2i} C_i \\ &+ \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 2\lambda_i Y_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 (\lambda_i + \lambda_j) Y_{ij} \right) \\ \dot{\phi}_1(0) &= \varepsilon \sum_{i=1}^8 \lambda_i c_{3i} C_i \\ &+ \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 2\lambda_i B_i^1 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 (\lambda_i + \lambda_j) B_{ij}^1 \right) \\ \dot{\phi}_2(0) &= \varepsilon \sum_{i=1}^8 \lambda_i c_{4i} C_i \\ &+ \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^8 2\lambda_i B_i^2 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 (\lambda_i + \lambda_j) B_{ij}^2 \right) \end{aligned} \quad (39)$$

با حل هشت معادله‌ی غیرخطی فوق و به دست آوردن ثوابت C_i از این معادلات، پاسخ با دو جمله از تقریب کامل می‌شود.

4- بررسی پایداری با روش اول لیاپانوف

برای بررسی پایداری سیستم با استفاده از روش اول لیاپانوف، از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در رابطه‌ی (11) استفاده می‌شود. برای تعیین موقعیت‌های تعادل، معادلات حرکت (12) در فضای حالت به صورت رابطه (40) بیان می‌شوند:

$$A(\vec{x})\vec{x} = \vec{X}(\vec{x}) \quad (40)$$

که در آن «نقطه» معرف مشتق نسبت به زمان بی‌بعد است. بردار حالت و بردار تحریک سیستم به ترتیب مطابق روابط (41) و (42) می‌باشد:

$$\beta = 0.01, \omega = 3, e = 0.01, \zeta = 0.1, \mu_b = 0.03$$

این معادلات به صورت رابطه‌ی (58) فرض شده است:

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \phi_1(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_2(0) = \frac{3\pi}{2} \\ \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{\phi}_1(0) = 0, \quad \dot{\phi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

برای مشاهده‌ی دقت حل و مقایسه‌ی آن در روش مقیاس‌های چندگانه با روش رانگ-کوتا، پاسخ به ازای بازه‌ی زمانی کوچکتر نیز رسم شده است.

همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود، پاسخ به دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه با وجود دو جمله از تقریب بسیار به پاسخ به دست آمده از روش رانگ-کوتا نزدیک است. "شکل‌های 3 و 4" به ترتیب مولفه‌ی y پاسخ زمانی مرکز هندسی دیسک و موقعیت زاویه‌ای هر دو ساچمه را به ازای پارامترهای ذکر شده نشان می‌دهد.

دقت روش مقیاس‌های چندگانه با در نظر گرفتن دو جمله از تقریب در "شکل‌های 3 و 4" نیز مشاهده می‌شود. همگرایی پاسخ به صفر در "شکل‌های 2 و 3" نشان می‌دهد که به ازای پارامترهای ذکر شده، بالانس اتوماتیک ساچمه‌ای کاملاً قادر به بالانس سیستم است و وضعیت تعادل بالانس کامل، پایدار می‌باشد.

در "شکل‌های 5 و 6" برای نشان دادن تأثیر ضریب میرایی لزج در رفتار سیستم، پاسخ به ازای پارامترهای $\mu_b = 0.03, \zeta = 0.1, e = 0.01, \omega = 3$

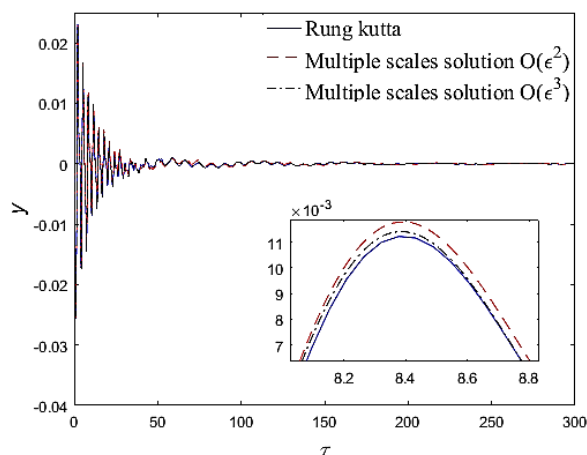
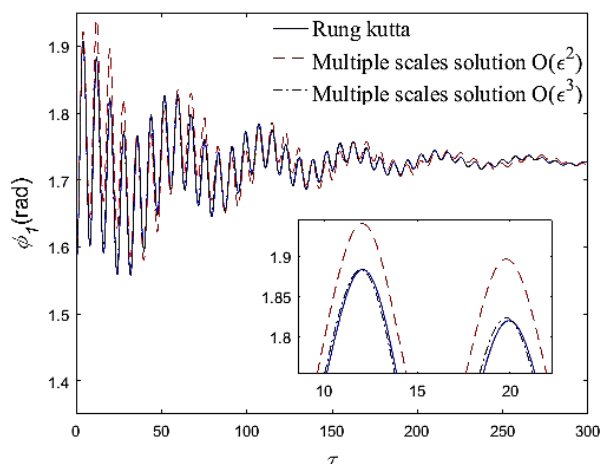


Fig. 3 Vibration response of the rotor with ABB for $\mu_b = 0.03, \zeta = 0.1, e = 0.01, \omega = 3$ and $\beta = 0.01$

شکل 3 پاسخ زمانی روتور مجهز به بالانس اتوماتیک ساچمه‌ای به ازای پارامترهای $\beta = 0.01$ و $\omega = 3, e = 0.01, \zeta = 0.1, \mu_b = 0.03$



$$B_2 = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\omega & -2\mu_b\omega c_1 & -2\mu_b\omega c_2 \\ 2\omega & 2\zeta & -2\mu_b\omega s_1 & -2\mu_b\omega s_2 \\ 2\mu_b\omega c_1 & 2\mu_b\omega s_1 & 2\mu_b\beta & 0 \\ 2\mu_b\omega c_2 & 2\mu_b\omega s_2 & 0 & 2\mu_b\beta \end{bmatrix} \quad (53)$$

در دو رابطه‌ی اخیر از اختصارات $\sin \phi_{i0} = si, \cos \phi_{i0} = ci$ استفاده شده است.

به منظور بررسی پایداری سیستم، پاسخ به صورت رابطه (54) در نظر گرفته می‌شود:

$$\overline{\Delta X} = \overline{\Delta X} e^{\lambda \tau} \quad (54)$$

λ مقدار ویژه و $\overline{\Delta X}$ بردار ویژه متناظر است. بردارهای ویژه را می‌توان به صورت رابطه (55) در نظر گرفت:

$$\overline{\Delta X} = [\Delta x, \Delta y, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{\phi}_1, \Delta \dot{\phi}_2]^T \quad (55)$$

معادلات حاکم به صورت مسئله مقدار ویژه‌ی رابطه (56) به دست می‌آید:

$$(B - \lambda A) \overline{\Delta X} = 0 \quad (56)$$

برای به دست آوردن جواب غیربدیهی باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر شود:

$$\det(B - \lambda A) = 0 \quad (57)$$

از رابطه‌ی فوق اگر جواب‌های حاصل برای λ دارای قسمت حقیقی منفی باشند، سیستم به صورت مجانبی پایدار است.

5- نتایج

با توجه به مباحث بخش‌های قبل، پاسخ سیستم با فرض یک جمله و دو جمله از تقریب در روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمد. روش‌های نیمه‌تحلیلی در عین حال که حجم محاسبات و عملیات را افزایش می‌دهند، این امکان را فراهم می‌سازند که خواص و تأثیر پارامترهای سیستم بر پاسخ زمانی یا فرکانسی آن قابل مطالعه باشد. بنابراین این روش‌ها بر روش‌های عددی که مسئله‌ی مذکور تا به حال با آن حل شده است، ترجیح داده می‌شود. در این بخش به منظور تأیید درستی تحلیل و همچنین بررسی رفتار دینامیکی سیستم، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به وسیله روش مقیاس‌های چندگانه و روش رانگ-کوتا استخراج شده است. "شکل 2" مولفه‌ی x پاسخ زمانی مرکز هندسی دیسک را به ازای پارامترهای $\mu_b = 0.03, \zeta = 0.1, e = 0.01, \omega = 3$ و $\beta = 0.01$ نشان می‌دهد. شرط اولیه برای حل

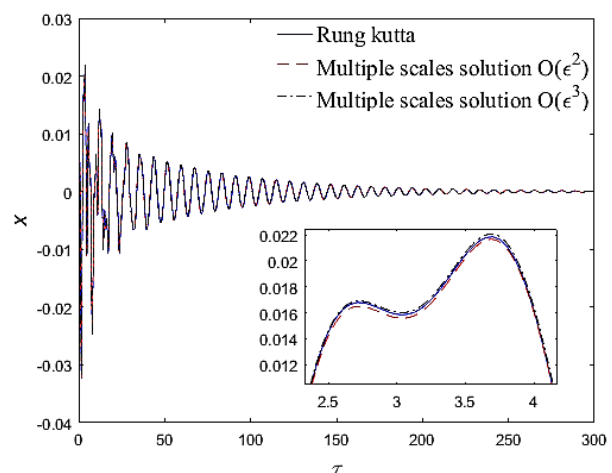


Fig. 2 Vibration response of the rotor with ABB for $\mu_b = 0.03, \zeta = 0.1, e = 0.01, \omega = 3$ and $\beta = 0.01$

شکل 2 پاسخ زمانی روتور مجهز به بالانس اتوماتیک ساچمه‌ای به ازای پارامترهای

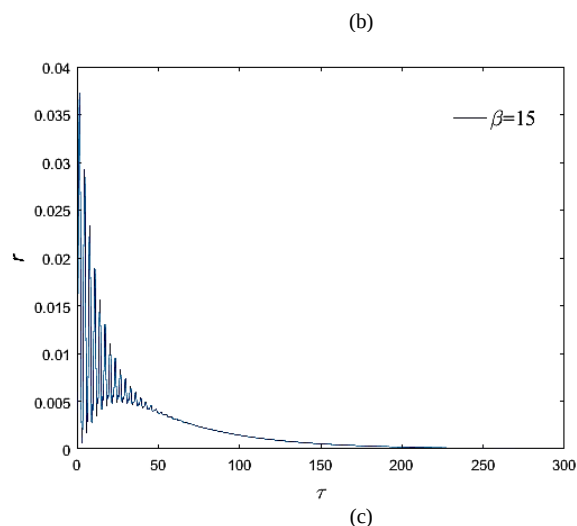


Fig. 5 The system vibration responses with $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$ and $\omega = 3$ for (a) $\beta = 0.01$, (b) $\beta = 1$ and (c) $\beta = 15$
 شکل 5 پاسخ زمانی سیستم به ازای $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$ و $\omega = 3$ به ترتیب برای (a) $\beta = 0.01$ ، (b) $\beta = 1$ و (c) $\beta = 15$

مشخص کردن محدوده‌های پایداری برای اطمینان از عملکرد ایمن دستگاه اهمیت فوق العاده‌ای دارد. برای بررسی محدوده‌ی پایداری از روش مقیاس‌های چندگانه، باید پایداری پاسخ رابطه‌ی (29) لحاظ گردد. پایداری این پاسخ به مقادیر λ_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ و C_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ وابسته است. طبق

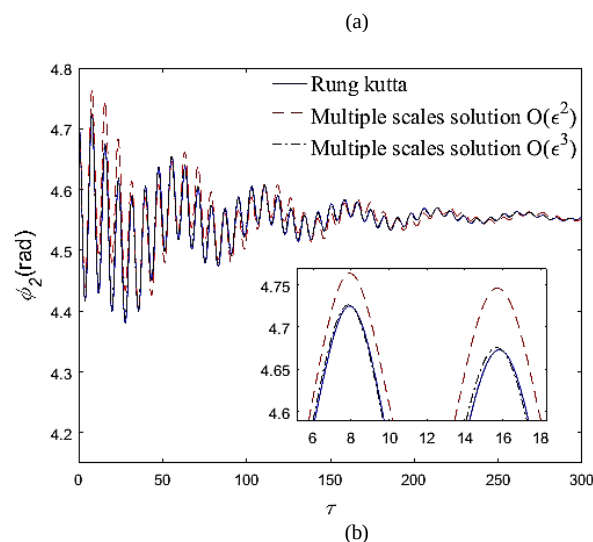
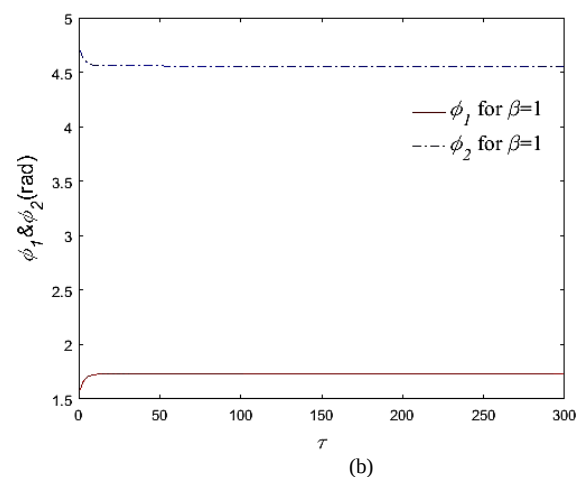
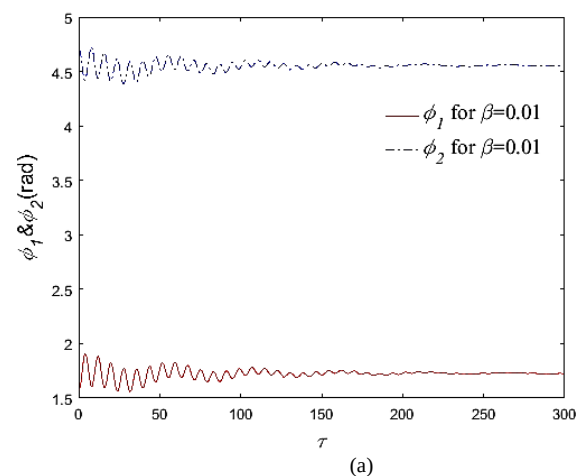
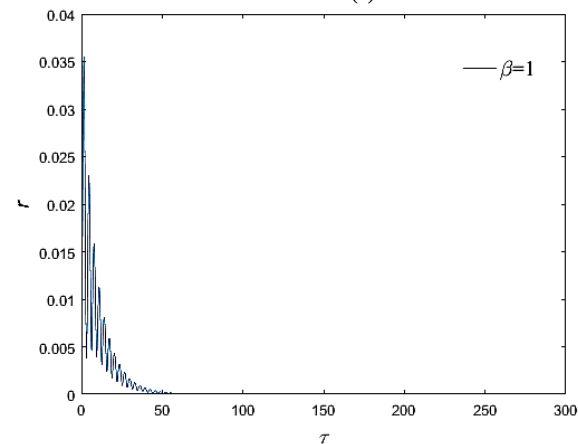
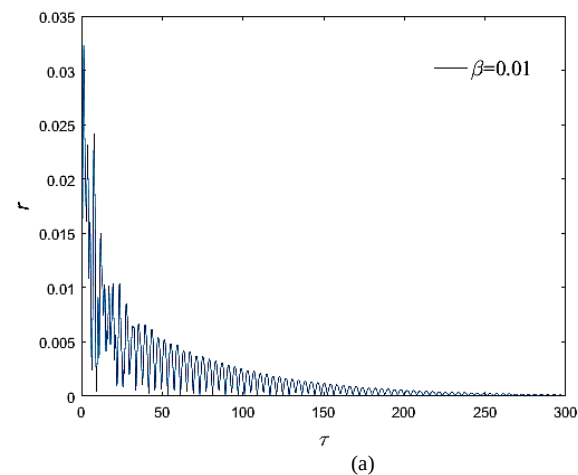
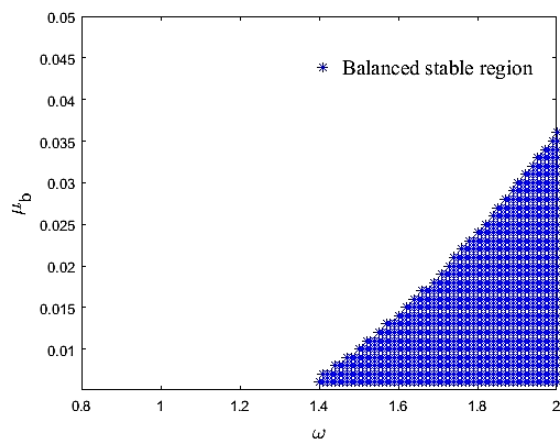


Fig. 4 Balls positions of (a) ϕ_1 and (b) ϕ_2 for $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$, $\omega = 3$ and $\beta = 0.01$

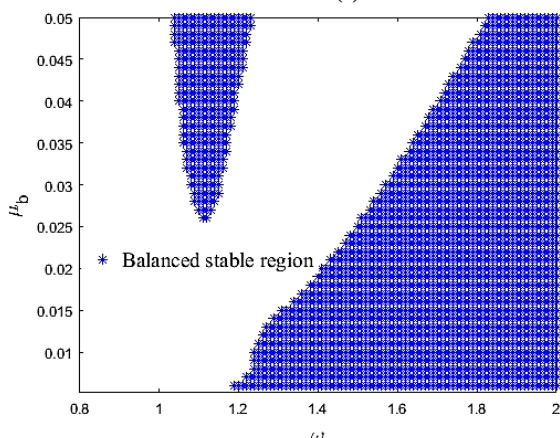
شکل 4 موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها ϕ_1 (a) و ϕ_2 (b) به ازای پارامترهای $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$ و $\omega = 3$

به ترتیب برای $\beta = 0.01$, $\beta = 1$ و $\beta = 15$ رسم شده است. همان‌طور که در این دو شکل مشاهده می‌شود، با افزایش ثابت میرایی لزج تا یک مقدار بهینه، رفتار نوسانی سیستم کاهش می‌یابد و سیستم در زمان کمتری بالانس می‌شود اما با افزایش این ضریب طبق نتایج مرجع [15]، زمان بیشتری برای بالانس سیستم لازم است.





(a)



(b)

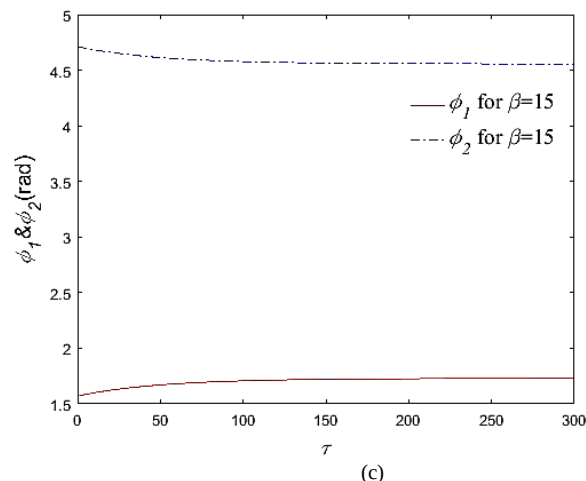
Fig 7 Stable region for a rotor equipped with ABB using the multiple scales method and the first method of Lyapunov: variation of μ_b versus ω for $e = 0.01$, $\beta = 0.01$ for (a) $\zeta = 0.01$ and (b) $\zeta = 0.1$

شکل 7 محدوده پایداری روتور مجهز به بالانسر با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و روش اول لیاپانوف: تغییرات μ_b در مقابل ω به‌ازای $e = 0.01$, $\beta = 0.01$ برای (a) $\zeta = 0.01$ و (b) $\zeta = 0.1$

همچنین ضمن استخراج پاسخ سیستم، استقلال پاسخ از مقیاس زمانی T_1 و T_2 نیز اثبات گردید و به این ترتیب در این مقاله بررسی پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای تنها با استفاده از روش مذکور و بدون کمک گرفتن از سایر معیارهای پایداری انجام شد. برای صحت‌سنجی نتایج به دست آمده، محدوده پایداری با استفاده از روش اول لیاپانوف نیز تعیین گردید. نتایج دو روش کاملاً بر هم منطبق بوده و هیچ‌گونه تفاوتی بین آن‌ها وجود ندارد. بنابراین ذکر این نکته ضروری است که با توجه به یکسان بودن نتایج، تعیین محدوده‌های پایداری با روش ارائه شده در مقاله‌ی حاضر نسبت به تئوری فلوکوئنت، روش اول لیاپانوف و یا روش راوت با انجام محاسبات کمتری امکان‌پذیر است که جنبه دیگری از نوآوری تحقیق حاضر است. همچنین در مقاله حاضر تأثیر ثابت میرایی لزج بر پاسخ سیستم نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشانگر کاهش رفتار نوسانی سیستم و زمان بالانس با افزایش ثابت میرایی لزج تا یک مقدار بهینه می‌باشد.

7- فهرست علائم

C	مرکز هندسی
c_b	ثابت میرایی ویسکوز مایع لزج
$\bar{e}$	میزان خروج از مرکز دیسک



(c)

Fig 6 Balls positions with $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$ and $\omega = 3$ for (a) $\beta = 0.01$, (b) $\beta = 1$ and (c) $\beta = 15$

شکل 6 موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها به ازای $\mu_b = 0.03$, $\zeta = 0.1$, $e = 0.01$ و $\omega = 3$ به ترتیب برای (a) $\beta = 0.01$ ، (b) $\beta = 1$ و (c) $\beta = 15$

بحث‌های اخیر، مقادیر C_i ها به مقیاس‌های زمانی وابسته نبوده و ثابتند که از شرایط اولیه به‌دست می‌آیند، بنابراین شرط پایداری این است که قسمت حقیقی ریشه‌های به‌دست آمده برای λ_i ها منفی باشد. در "شکل 7" محدوده پایداری بالانسر متداول با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و روش اول لیاپانوف به ازای پارامترهای $e = 0.01$ و $\beta = 0.01$ به ترتیب برای $\zeta = 0.01$ و $\zeta = 0.1$ نشان داده شده است.

همان‌گونه که از نتایج مشخص است محدوده پایداری از هر دو روش کاملاً یکسان است. این نتایج نشان می‌دهد که افزایش تعداد جملات در تقریب تأثیری در محدوده پایداری ندارد چرا که نتایج فقط با در نظر گرفتن یک جمله از تقریب به دست آمده‌اند.

6- نتیجه‌گیری

رفتار دینامیکی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای در تحقیقات پیشین غالباً با استفاده از روش‌های عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. در روش‌های عددی با وجود راحتی در محاسبه پاسخ به ازای پارامترهای مشخص، برای مشاهده تأثیر هر پارامتر بر رفتار سیستم باید پاسخ سیستم از اول به ازای پارامترهای جدید به‌دست آید. اما این مشکل در روش‌های نیمه‌تحلیلی وجود ندارد و مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف در پاسخ و پایداری سیستم به راحتی امکان‌پذیر است. این مزایا باعث می‌شود که علی‌رغم افزایش حجم محاسبات، روش‌های نیمه تحلیلی بر روش‌های عددی ترجیح داده شوند. در مقاله‌ی حاضر پاسخ روتور نابالانس مجهز به بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای با روش مقیاس‌های چندگانه استخراج و پایداری آن مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور ابتدا معادلات غیرخطی حاکم بر دینامیک سیستم با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج و سپس برای اولین بار با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و با در نظر گرفتن یک جمله و دو جمله تقریب پاسخ سیستم به‌دست آمد. برای صحت‌سنجی نتایج، پاسخ به‌دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه با روش عددی رانگ-کوتا نیز مقایسه شد. نتایج حاکی از دقت بالای روش مقیاس‌های چندگانه هم در زمان‌های کوتاه‌تر و هم در زمان‌های طولانی می‌باشد.

- [2] D. J. Rodrigues, A. R. Champneys, M. I. Friswell, R. E. Wilson, Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 3, pp 385–403, 2011.
- [3] C. Rajalingham, S. Rakheja, Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 3, pp. 453–466, 1998.
- [4] W. Kim, J. Chung, Performance of automatic ball balancers on optical disc drives, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 216, No. 11, pp. 1071–1080, 2002.
- [5] P.C. P. Chao, C. K. Sung, H. C. Leu, Effects of rolling friction of the balancing balls on the automatic ball balancer for optical disk drives, *Journal of Tribology*, Vol. 127, No. 4, pp. 845–856, 2005.
- [6] E. L. Thearle, Automatic dynamic balancers, *Journal of Machine Design and Manufacturing*, Vol. 22, pp. 119–124, 1950.
- [7] J. D. Alexander, An automatic dynamic balancer, *Proceeding for Second Southeastern Conference*, Vol. 2, pp. 415–426, 1964.
- [8] G. W. Cade, Self-compensating balancing in rotating mechanisms, *Journal of Mechanism Machine Theory*, Vol. 23, No. 1, pp. 71–78, 1965.
- [9] J. Chung, D. S. Ro, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanism, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035–1056, 1999.
- [10] J. Chung, I. Jang, Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, pp. 31–43, 2003.
- [11] P. C. P. Chao, C. K. Sung, C. C. Wang, Dynamic analysis of the optical disk drives equipped with an automatic ball balancer with consideration of torsional motions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 826–842, 2005.
- [12] C. J. Lu, M. C. Wang, Sh. H. Huang, Analytical study of the stability of a two ball automatic balancer, *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 3, pp. 884–896, 2009.
- [13] J. Ehyaei, M. Moghaddam, Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with automatic ball-balancers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 321, No. 3-5, pp. 554–571, 2009.
- [14] T. C. Chan, C. K. Sung, C. P. Chao, Non-linear suspension of an automatic ball balancer, *Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 2, pp. 415–424, 2011.
- [15] M. Rezaee, R. Fathi, The effect of damping ratio and balls mass on the stability of automatic ball balancer and determining their optimum values, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 110–118, 2014. (in Persian فارسی)
- [16] M. Rezaee, R. Fathi, A. M. Alizadeh Fard, Investigating the stability of automatic ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the Nelder-Mead simplex algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 155–166, 2015. (in Persian فارسی)
- [17] M. Rezaee, R. Fathi, Presenting and dynamic analysis of new type of three-ball automatic balancer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 97–103, 2015. (in Persian فارسی)
- [18] M. Rezaee, M. M. Etefagh, R. Fathi, Investigating the dynamic behavior of ball-spring automatic balancer in presence of gyroscopic effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 135–142, 2016. (in Persian فارسی)

e	خروج از مرکز بی‌بعد
F	تابع اتلاف ریلی
G	مرکز جرم دیسک
J	ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم
k	سفتی معادل روتور
M	جرم کل
m_b	جرم ساچمه
m_d	جرم دیسک
n	تعداد ساچمه
R	شعاع دیسک شیاردار
T	انرژی جنبشی
t	زمان
V	انرژی پتانسیل
$\vec{v}_c$	سرعت مرکز هندسی
$\vec{v}_G$	سرعت مرکز جرم
$\vec{v}_{m_b}$	سرعت نامین ساچمه
x	مؤلفه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد مرکز هندسی
y	مؤلفه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد مرکز هندسی
علائم یونانی	
β	نسبت میرایی بی‌بعد بالانس
ε	پارامتر غیرخطی
ζ	بیانگر نسبت میرایی بی‌بعد سیستم
η	نسبت نابالانسی ایجاد شده توسط یک ساچمه به نابالانسی دیسک
λ	مقدار ویژه
μ_b	نسبت جرمی
τ	زمان بی‌بعد
ϕ_{i0}	موقعیت تعادل زاویه‌ای ساچمه‌ی i ام
ϕ_i	موقعیت ساچمه‌ی i ام
ω	سرعت زاویه‌ای بی‌بعد
$\bar{\omega}$	سرعت زاویه‌ای
$\dot{\omega}$	شتاب زاویه‌ای
ω_n	فرکانس طبیعی بدون اتوبالانس
$\dot{\omega}$	شتاب زاویه‌ای بی‌بعد

8- مراجع

- [1] Iso 1940/1 balance quality requirements of rigid rotors part 1-1986-09-01.