



تحلیل ارتعاشات آزاد غیر خطی صفحات نانو کامپوزیت پلیمری ویسکوالاستیک حاوی نانولوله کربنی

سید عیسی کرانیان¹، سیامک اسماعیلزاده خادم^{2*}، مهرداد کوبکی³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استاد، مهندسی پلیمر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* صندوق پستی 315-51665 khadem@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 31 مرداد 1395

پذیرش: 23 مهر 1395

ارائه در سایت: 24 آبان 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات غیر خطی

نانوکامپوزیت

مواد ویسکوالاستیک

روش مقیاس‌های چندگانه

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد غیر خطی ورقه‌ای کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی مورد بررسی قرار گرفته است. ورقه به صورت ویسکو الاستیک فرض می‌شود. برای این منظور از مدل ویسکوالاستیک کلین-ویت استفاده می‌شود. معادلات حرکت با در نظر گرفتن غیر خطی‌های فون-کارمن با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود. برای تحلیل معادلات غیر خطی حرکت در حالت آزاد از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده می‌شود. با استفاده از این روش فرکانس‌های طبیعی غیر خطی سیستم بدست آورده می‌شود. اثر عوامل مختلفی همانند ضریب میرایی یا ویسکوزیته ماده، کسر حجمی نانولوله کربنی و همچنین نسبت ضخامت به بعد صفحه بر فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفته شده است. مشاهده می‌شود که افزایش نسبت ضخامت صفحه به طول آن، باعث افزایش فرکانس طبیعی غیر خطی صفحه می‌گردد. همچنین با افزایش کسر حجمی نانولوله کربنی فرکانس طبیعی غیر خطی سیستم افزایش می‌یابد. علاوه بر این تأثیر توزیع متفاوت نانو لوله بر روی فرکانس طبیعی غیر خطی و پاسخ زمانی سیستم بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس غیر خطی برای توزیع FG-O بیشتر از حالت یکنواخت و برای توزیع FG-X کمتر از حالت توزیع یکنواخت است.

Nonlinear free vibration analysis of the polymeric nanocomposite viscoelastic plates containing carbon nanotubes

Seyed Eisa Koranian¹, Siamak Esmaealzadeh Khadem^{1*}, Mehrdad Kokabi²

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Department of Chemical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

*P.O.B. 51665-315 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 21 August 2016

Accepted 14 October 2016

Available Online 14 November 2016

Keywords:

Multiple scales method

Nonlinear Vibration

Nanocomposite

Viscoelastic materials

ABSTRACT

The present study probes the nonlinear free vibrations of viscoelastic polymeric composite plate reinforced by carbon nanotubes. For this purpose, Kelvin-Voigt model is utilized. Moreover, the equations of motion are extracted by the Hamilton principle and take Von Karman nonlinearity into account. In order to solve and analyze nonlinear free vibrations, the researchers utilized multiple scales method. Using this method, the normal nonlinear frequencies of the system were obtained and the impact of various factors such as dampness coefficient, material viscosity and carbon nanotubes volume fraction were investigated. Besides, the thickness-dimension ratio of the plate and its impact on the normal frequency was also studied. The findings of the study highlighted that an increase in the ratio of plate's thickness to its length causes an increase in the normal nonlinear frequency of the plate. Additionally, as the volume fraction of the carbon nanotubes increases, system's normal nonlinear frequency increases as well. Finally, the impact of different distribution of carbon nanotubes on the normal nonlinear frequency and system's time response was also probed. As was observed, nonlinear frequency for FG-O distribution was more than that of for the uniform distribution, but the trend was reverse for FG-X distribution.

1- مقدمه

ارتعاشات صفحه انجام داده بود. در سال 1975، لانرا و دوران [3] روش گلرکین را برای دستیابی به پاسخ یک صفحه گیردار نسبت به تحریک هارمونیک به کار بردند. در این راستا، برای صفحات مورق کامپوزیتی تائو و کیم با استفاده از نظریه تغییر شکل غیر خطی فون-کارمن و قانون برهم‌نهی

معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات صفحه در اوایل قرن نوزدهم توسط ریلی بیان گردید، [1]. روند پیشرفت در ارتعاشات ورقه‌ها بوسیله لیزا [2] در سال 1969 منتشر شد که در این مقاله، او مروری بر روش‌های رایج تحلیل

حداکثر اتلاف انرژی در نتیجه اصطکاک بین نانولوله‌های کربنی و پلیمر - که مهم‌ترین نکته در ساخت نانوکامپوزیت‌های پلیمری است - به چشم می‌خورد. محققان به این نتیجه رسیده‌اند که به منظور بهتر پراکنده کردن نانولوله‌های کربنی در پلیمر، می‌بایست سطح آن‌ها را به نوعی تغییر داد که باعث انتقال بهتر تنش بین نانولوله‌های کربنی و پلیمر شده و پراکندگی بهتر آن‌ها را نتیجه دهد [18].

اطلاع از طبیعت ارتعاشی سازه و نیز شناخت عوامل مؤثر و همچنین میزان تأثیر آن‌ها بر پاسخ سازه به دلیل تأثیرات مخرب ارتعاشات پیش‌بینی نشده بر روی یک سازه از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. بدین جهت مفهوم ارتعاشات صفحات که از جمله مهم‌ترین اجزاء سازه‌ای به شمار می‌آیند، در کانون توجه محققان بوده است. به طور کلی هنگامی که خیز صفحه کم باشد، می‌توان رفتار را خطی فرض نموده و از فرضیات کیرشهف بهره گرفت به‌طوری که در این وضعیت شاهد تغییر شکلی در صفحه میانی در طول بارگذاری نخواهیم بود. از طرفی از کرنش‌ها و تنش‌های برشی و عمودی در راستای عمود بر صفحه میانی صرف‌نظر شده و صفحه تحت خمش خالص فرض می‌گردد. این نظریه، به نظریه کلاسیک صفحات موسوم است. از دیگر نظریه‌های مهمی که به جهت بررسی صفحات استفاده می‌گردند، می‌توان به نظریه تغییر شکل برشی و نیز تغییر شکل برشی مراتب بالا اشاره کرد به‌نحوی که در این نظریه‌ها تأثیر کرنش‌های برشی بر روی تغییر مکان صفحه لحاظ می‌گردد. در حالتی که خیز صفحه در حدود ضخامت آن باشد، تغییر طول صفحه میانی قابل اغماض نبوده و در این صورت اثر غشایی با خمش خالص مقایسه شده و میزان تحمل بار بیش از آن‌چه که نظریه کلاسیک صفحات پیش‌بینی می‌کند، خواهد بود. در این حالت، برای تحلیل رفتار صفحه باید اثر غشایی را نیز در معادلات حرکت صفحه در نظر گرفت. مزدوج شدن اثرات خمش با اثرات غشایی باعث می‌شود که معادلات دینامیکی فون-کارمن که یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی غیرخطی است، بدست آیند. از آن‌جا که معادلات بدست آمده غیرخطی‌اند، برای حل آن‌ها می‌بایست به روش‌های عددی متوسل شد. باید توجه داشت که پاسخ دینامیکی چنین سیستم‌های غیرخطی تابعی از دامنه نوسان آن‌ها خواهد بود.

با توجه به مطالعات بالا می‌توان دریافت که لازمه شناخت یک سامانه دینامیکی، بدست آوردن خواص دینامیکی و ارتعاشاتی آن شامل فرکانس طبیعی و شکل مواد آن می‌باشد. در تحلیل اینگونه ارتعاشات، کلیه عواملی که سبب غیرخطی شدن رفتار صفحه می‌شوند و یا به عبارت بهتر همه انواع ترم‌های غیرخطی که در معادلات حرکت می‌توانند ظاهر شوند، شامل ترم‌های سفتی یا هندسه غیرخطی، اینرسی غیرخطی و میرایی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. در اینجا معادلات حرکت یک صفحه نانو کامپوزیتی ویسکوالاستیک بر اساس تئوری ویسکوالاستیک با استفاده از روش هامیلتونین استخراج گردیده، سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادلات تحلیل شده‌اند. شکل مود و فرکانس طبیعی غیرخطی بدست آمده و اثرات پارامترهای مختلف سیستم همچون ویسکوزیته یا خاصیت میرایی ماده ویسکوالاستیک، نسبت ضخامت، توزیع نانولوله‌های کربنی، درصد حجمی نانولوله و بر مشخصات ارتعاشی صفحه بررسی شده است.

2- تعریف مسأله و فرضیات

تئوری کلاسیک ورق‌ها و پوسته‌ها ساده‌ترین و در عین حال رایج‌ترین تئوری موجود جهت تحلیل ورق‌ها می‌باشد. این تئوری برای اولین بار توسط

بولتزمن، با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت غیرخطی حاکم بر صفحات ویسکوالاستیک را استخراج نمودند، [4]. با توجه به کارهای انجام پذیرفته مشاهده می‌گردد که روش حساب تغییرات یا در واقع روش هامیلتون از رایج‌ترین و سودمندترین روش‌ها برای تعیین و استخراج معادلات حرکت حاکم بر سیستم‌های غیرخطی است. از معروف‌ترین محققانی که از این روش در حل سیستم‌های غیرخطی بهره می‌گیرند، نایفه بوده که در این زمینه کتاب‌ها و مقالات متعددی به چاپ رسانیده است [5-7]. او و همکارانش با استفاده از روش شاو و پیری مدل کاملی برای سیستم‌های پیوسته دو بعدی با لحاظ غیرخطی بودن در ترم‌های سختی و اینرسی ارائه نموده و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به حل آن پرداختند، [8]. در مرجع [9] پاسخ‌های الاستودینامیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از رهیافت اشل بای-موری-تاناکا¹، و در مرجع [10] ارتعاشات آزاد ورقه‌های نازک کامپوزیتی حاوی نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار گرفته‌اند. باگمان و همکارانش نشان دادند که تشکیل کلاف‌های نانولوله‌ای کربنی باعث کاهش خواص الکتریکی و مکانیکی ساختار می‌شود [11].

از اواسط دهه 1980 مبحث نانولوله‌های کربنی بیشتر مورد توجه جامعه علمی قرار گرفته است [12,13]. اکثر مطالعات انجام پذیرفته در زمینه کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی روی خواص آن‌ها تأکید دارد [14,15]. به عنوان مثال، مابین خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها و رفتار مکانیکی الیاف تعبیه شده ارتباط مستقیمی برقرار است به‌طوری که می‌توان با جایگزینی الیاف با اندازه‌های میکرو با نانولوله‌های کربنی، خواص کامپوزیتی از جمله مدول الاستیسیته و استحکام کششی را بهبود بخشید. می‌توان از نانولوله‌های کربنی با توجه به خواص مکانیکی، حرارتی و الکترونیکی منحصر به فرد این نوع مواد، مانند مدول الاستیک بسیار بالا، استحکام کششی، چگالی کم و در ادواتی چون نانوترانزیستورها، نیمه هادی‌ها، دستگاه‌های ذخیره‌سازی هیدروژن، مواد ساختمانی، سنسورهای مولکولی و بهره گرفت. همچنین می‌توان از این مواد با توجه به خواص منحصربفرد و فرآوری به نسبت ساده آن‌ها، به‌عنوان جایگزینی مناسب برای تقویت‌کننده‌هایی نظیر الیاف کربن، گرافیت، شیشه و کولار یاد نمود تا با اصلاح پلیمرها، به منظور کاهش هزینه و نیز افزایش کارایی، در صنایعی چون هوافضا، خودرو، نفت، ورزشی، الکترونیک و مورد استفاده قرار گیرند. در چندین سال اخیر، تحقیقات بر روی نانوکامپوزیت‌ها جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. از میان مواد مختلفی نظیر فلزات، سرامیک‌ها و پلیمرها که برای ساخت حسگرها و عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرند، مواد کامپوزیتی مطلوب‌ترین خواص را با توجه به موارد فوق دارا بوده و در میان مواد کامپوزیتی، کامپوزیت‌های نانولوله‌کربنی به علت خواص مکانیکی استثنایی نانولوله‌ها، یکی از بهترین مواد به شمار می‌آیند [16,17]. عموماً، کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی به عنوان یک ماده ویسکوالاستیک مطرح می‌گردد.

نانولوله‌های کربنی چنددیواره مورد استفاده در ساخت نانوکامپوزیت پلیمری طول متوسطی از مرتبه میکرومتر داشته و خارجی‌ترین قطر آن در حدود 50nm است. یکی از موانعی که بر سر راه ساخت نانوکامپوزیت‌های پلیمری بر پایه نانولوله‌های کربنی وجود دارد، محدودیتی بوده که در پراکندگی یکنواخت نانولوله‌های کربنی در پلیمر به منظور دست‌یابی به

¹ Eshelby-Mori-Tanaka

می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int (I_0(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - 2I_1(\dot{u}\dot{w}_{,x} + \dot{v}\dot{w}_{,y}) + I_2(\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2)) dA \quad (6)$$

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int \rho(z)\{1, z, z^2\} dz \quad (7)$$

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی به صورت رابطه (8) است:

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int ((I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_{,x})\delta u + (I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_{,y})\delta v \\ & + ((I_0\ddot{w}) - (I_2\ddot{w}_{,x} - I_1\ddot{u})_{,x} - (I_2\ddot{w}_{,y} - I_1\ddot{v})_{,y}) \\ & \delta w) dA - \int (I_2\ddot{w}_{,x} - I_1\ddot{u}) \Big|_x^x = a \delta w dy \\ & - \int (I_2\ddot{w}_{,y} - I_1\ddot{v}) \Big|_y^y = b \delta w dx \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین تغییرات انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان بصورت رابطه (9) نوشت:

$$V = \int \int (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}) dAdz \quad (9)$$

از طرفی رابطه‌ی بین کرنش و تنش بصورت رابطه (10) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - z(w_{,xx}) \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - z(w_{,yy}) \\ \varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - w_{,x}w_{,xy} - 2zw_{,xy} \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه‌ی (10) در رابطه‌ی (9)، رابطه (11) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta V = & - \int ((N_{1,x} + N_{6,y})\delta u + (N_{2,y} + N_{6,x})\delta v \\ & + M_{1,xx} + M_{2,yy} + 2M_{6,xy})\delta w) dA + \int [N_1\delta u \\ & + N_6\delta v + (M_{1,x} + 2M_{6,y})\delta w - M_1\delta w_{,x}] \Big|_x^x = a \\ & + \int [N_6\delta u + N_2\delta v + (M_{2,y} + 2M_{6,x})\delta w \\ & - M_2\delta w_{,y}] \Big|_y^y = b dx \end{aligned} \quad (11)$$

$$\{N_1, N_2, N_6\} = \int \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} dz$$

$$\{M_1, M_2, M_6\} = \int z \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} dz \quad (12)$$

بنابراین با جایگذاری تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل در اصل هامیلتون معادلات حرکت رابطه (13) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{1,x} + N_{6,y} &= I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_{,x} + \mu_1\dot{u} \\ N_{6,x} + N_{2,y} &= I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_{,y} + \mu_1\dot{v} \\ M_{1,xx} + 2M_{6,xy} + M_{2,yy} + (N_1w_{,x} + N_6w_{,y})_{,x} \\ &+ (N_6w_{,x} + N_2w_{,y})_{,y} = I_0\ddot{w} - (I_2\ddot{w}_{,x} - I_1\ddot{u})_{,x} \\ &- (I_2\ddot{w}_{,y} - I_1\ddot{v})_{,y} + \mu_3\dot{w} \end{aligned} \quad (13)$$

که μ_1 و μ_2 و μ_3 ضرایب میرایی خارجی هستند. در این‌جا از مدل کلون-ویت جهت مدلسازی ماده ویسکوالاستیک استفاده می‌گردد. زیرا مدل مذکور بخوبی می‌تواند پدیده‌های خزش و رهایی از تنش را در جامدات مدلسازی نماید و از طرف دیگر استفاده از این مدل امکان مقایسه حالت ویسکوالاستیک و الاستیک را بسیار خوب نمایان می‌سازد. این امر سبب می‌شود اثرات میرایی که یکی از مهمترین خواص مواد ویسکوالاستیک هستند به راحتی مورد بررسی قرار گیرد. بر این اساس روابط تنش-کرنش برای ماده ویسکو الاستیک همگن و برای حالت دو بعدی به صورت رابطه (14) می‌باشد:

کیرشهف و با تعمیم تئوری تیر برنولی برای ورق‌های با ضخامت نازک که در آن نسبت ضخامت ورق به ابعاد دیگر آن ناچیز می‌باشد بیان گردید. در این تئوری از اثرات نیروهای برشی صرف نظر می‌گردد و فرضیات آن به صورت زیر است:

1- خط مستقیم عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل نیز مستقیم می‌ماند.

2- خطوط عمود در جهت عمود بر سطح میانی، هیچ گونه تغییر طول نمی‌دهند.

3- خطوط عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل نیز عمود بر سطح میانی خواهند بود.

بر این اساس یک صفحه ویسکوالاستیک مستطیل شکل با ابعاد a و b و ضخامت h که تحت تغییر شکل‌های بزرگ قرار گرفته است، در نظر گرفته می‌شود. تغییر مکان‌ها در جهت‌های x ، y و z همانطور که در شکل 1 نشان داده شده است به ترتیب با u ، v و w نمایش داده می‌شود.

در این‌جا برای بدست آوردن معادلات حرکت از اصل هامیلتون استفاده می‌شود. بدین صورت که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل صفحه بدست آورده می‌شود و سپس در معادله‌ی رابطه (1) که اصل هامیلتون می‌باشد قرار داده می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V + W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

که در این رابطه T ، انرژی جنبشی، V ، انرژی پتانسیل و W_{nc} معرف کار بوده و از رابطه (2) حاصل می‌شود:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} \int (-f_{vis}w) dx \quad (2)$$

به طوری که f_{vis} از رابطه (3) بدست آمده که مبین نیروی میرایی و نشانگر ثابت میرایی ویسکوز سیستم است.:

$$f_{vis} = B \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3)$$

انرژی جنبشی صفحه را می‌توان به صورت رابطه (4) تعریف نمود:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \rho(Z)(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dAdz \quad (4)$$

که U ، V و W بصورت رابطه (5) تعریف می‌شوند:

$$U = u - zw_{,x}, V = v - zw_{,y}, W = w \quad (5)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه‌ی (5) در رابطه‌ی (4)، رابطه‌ی (6) حاصل

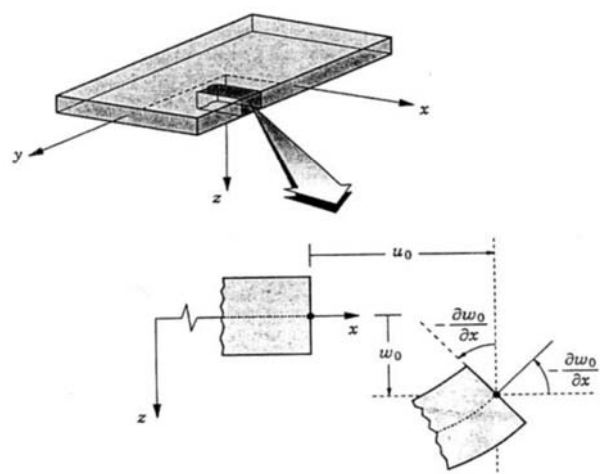


Fig. 1 A Perspective of Movement in the Classic Theory of Plates

شکل 1 نمای از جابجایی‌ها در تئوری کلاسیک ورقه‌ها

$$\begin{aligned}
 & +w_{,xx}\dot{w}_{,y} + w_{,x}\dot{w}_{,xy}) - B'_{22}\dot{w}_{,yyy} \\
 & - (B'_{12} + 2B'_{66})\dot{w}_{,xxy} = I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_{,y} \\
 D_{11}w_{,xxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxy} + D_{22}w_{,yyy} + \mu_3\dot{w}_{,y} \\
 & + (A_{11}e_1 + A_{12}e_2)w_{,xx} - (A_{12}e_1 + A_{22}e_2)w_{,yy} \\
 & - 2A_{66}\gamma_6w_{,xy} - B_{11}e_{1,xx} - B_{12}e_{2,xx} - B_{12}e_{1,yy} \\
 & + [(2B_{66}w_{,xy})w_{,y}]_{,x} + [(B_{12}w_{,xx} + B_{22} \\
 & w_{,yy})w_{,y}]_{,y} + [(2B_{66}w_{,xy})w_{,x}]_{,y} \\
 & + D'_{11}\dot{w}_{,xxx} + 2(2D'_{66} + D'_{12})\dot{w}_{,xxy} \\
 & + D'_{22}\dot{w}_{,yyy} - (A'_{11}\dot{e}_1 + A'_{12}\dot{e}_2)w_{,xx} \\
 & - (A'_{12}\dot{e}_1 + A'_{22}\dot{e}_2)w_{,yy} \\
 & + [(B'_{11}\dot{w}_{,xx} + B'_{12}\dot{w}_{,yy})w_{,x}]_{,x} \\
 & + [(2B'_{66}\dot{w}_{,xy})w_{,y}]_{,x} + [(B'_{12} \\
 & \dot{w}_{,xx} + B'_{22}\dot{w}_{,yy})w_{,y}]_{,y} \\
 & + [(2B'_{66}\dot{w}_{,xy})w_{,x}]_{,y} \\
 & = -I_0\ddot{w} + I_2(\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) + (I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_{,x})w_{,x} \\
 & + (I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_{,y})w_{,y} - I_1(\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y})
 \end{aligned} \quad (19)$$

روابط فوق بیانگر معادلات حرکت صفحه مستطیل شکل با خواص ویسکوالاستیک کلین- ویت می باشد. با توجه به این معادلات مشاهده می گردد به علت روابط غیرخطی هندسی موجود در جابجایی ها این معادلات شامل ترم های غیرخطی سفتی می باشند. همچنین معادلات فوق شامل ترم های میرایی غیرخطی و اینرسی غیرخطی نیز می باشند. بنابراین در این جا معادلات حرکت صفحه شامل ترم های غیرخطی میرایی، سفتی و اینرسی می باشد.

2-1- خصوصیات فیزیکی یک صفحه نانوکامپوزیتی

براساس قانون اختلاط [10] خواص فیزیکی برای یک نانو کامپوزیت به صورت رابطه (21) بیان می گردد:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \eta_1 V_{CNT} E_{1,CNT}^{\text{CNT}} + V_m E_m \\
 \frac{\eta_2}{E_2} &= \frac{V_{CNT}}{E_{2,CNT}^{\text{CNT}}} + \frac{V_m}{E_m} \\
 \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{CNT}}{G_{12,CNT}^{\text{CNT}}} + \frac{V_m}{G_m} \\
 \nu_{12} &= \bar{\nu}_{CNT} \nu_{12,CNT}^{\text{CNT}} + V_m \nu_m \\
 \rho &= V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m \\
 V_{CNT} + V_m &= 1
 \end{aligned} \quad (21)$$

که در این رابطه $E_{1,CNT}^{\text{CNT}}$ ، $G_{12,CNT}^{\text{CNT}}$ ، $\nu_{12,CNT}^{\text{CNT}}$ ، E_m ، G_m ، ν_m و ρ_m مدول الاستیسیته، مدول برشی، ضریب پواسن و چگالی نانو لوله کربنی (ماده زمینه) هستند. همچنین η_1 ، η_2 و η_3 پارامترهای بهره وری نانولوله کربنی هستند که در جدول 1 آورده شده اند. V_{CNT} و V_m کسرهای حجمی نانولوله کربنی و ماده زمینه می باشند که با رابطه (22) بیان می گردد $V_{CNT} = \bar{V}_{CNT} f(z)$ ، $V_m = \bar{V}_m f(z)$

$$\bar{V}_{CNT} = \frac{\bar{m}_{CNT}}{\bar{m}_{CNT} \left(1 - \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) + \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}} \quad (22)$$

که در این رابطه $\bar{m}_{CNT}$ میانگین کسر جرمی نانولوله کربنی در صفحه می باشد. همچنین $\bar{V}_{CNT}$ و $\bar{V}_m$ میانگین کسرهای حجمی نانولوله کربنی و ماده زمینه هستند. $f(z)$ تابع توزیع نانولوله کربنی می باشد که برای چهار حالت که در شکل 2 رسم شده است، در رابطه (23) ذکر شده است [10].

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 1, & \text{For UD} \\
 f(z) &= 4 \frac{|z|}{h}, & \text{For FG-X}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) & 0 \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (14)$$

که در رابطه (14) پارامترها بصورت رابطه (15) تعریف می شوند،

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \\
 Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, S_{11} = \frac{\eta(z)E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 S_{22} &= \frac{\eta(z)E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, S_{66} = \eta(z)G_{12} \\
 S_{12} &= S_{21} = \frac{\eta(z)\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}
 \end{aligned} \quad (15)$$

بطوری که ν_{12} و ν_{21} ضرایب پواسن، E_1 و E_2 مدول های الاستیسیته مؤثر نانوکامپوزیت، G_{12} مدول برشی نانوکامپوزیت و η ضریب میرایی ماده می باشد. بنابراین طبق روابط (14) و (15)، رابطه ی (12) بصورت رابطه (16) در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [B_{ij}] \\ [B_{ij}] & [D_{ij}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_6 \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} [A'_{ij}] & [B'_{ij}] \\ [B'_{ij}] & [D'_{ij}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{\gamma}_6 \\ -\dot{w}_{,xx} \\ -\dot{w}_{,yy} \\ -2\dot{w}_{,xy} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (16)$$

که در رابطه (16)، می توان رابطه (17) را نوشت:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}, \\
 \left\{ \begin{aligned} \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int Q_{ij}(z) \{1, z, z^2\} dz, \quad (i = 1, 2, 6) \\ \{A'_{ij}, B'_{ij}, D'_{ij}\} &= \int S_{ij}(z) \{1, z, z^2\} dz, \quad (i = 1, 2, 6) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین معادلات حرکت به صورت رابطه (18) تبدیل خواهند شد:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}u_{,xx} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + A_{66}u_{,yy} + \mu_1\dot{u} \\
 & + A_{11}w_{,x}w_{,xx} + A_{12}w_{,y}w_{,xy} + A_{66}(w_{,xy}w_{,y} \\
 & + w_{,x}w_{,yy}) - B_{11}w_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xxy} \\
 & + A'_{11}\dot{u}_{,xx} + (A'_{12} + A'_{66})\dot{v}_{,xy} + A'_{66}\dot{u}_{,yy} \\
 & + A'_{11}(\dot{w}_{,x}w_{,xx} + w_{,x}\dot{w}_{,xx}) + A'_{12}(\dot{w}_{,xy}w_{,y} + w_{,xy}\dot{w}_{,y}) \\
 & + A'_{66}(\dot{w}_{,xy}w_{,y} + \dot{w}_{,x}w_{,yy} + w_{,xy}\dot{w}_{,yy} + w_{,x}\dot{w}_{,yy}) \\
 & - B'_{11}\dot{w}_{,xxx} - (B'_{12} + 2B'_{66})\dot{w}_{,xxy} = I_0\ddot{u} - I_1 \\
 & A_{22}v_{,yy} + (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{66}v_{,xy} + \mu_1\dot{v} \\
 & + A_{12}w_{,xy}w_{,xx} + A_{22}w_{,yy}w_{,y} \\
 & + A_{66}(w_{,xx}w_{,y} + w_{,x}w_{,yx}) - B_{22}w_{,yyy} \\
 & + A'_{12}(\dot{w}_{,x}w_{,xy} + \dot{w}_{,xy}w_{,x}) \\
 & + A'_{22}(\dot{w}_{,y}w_{,yy} + \dot{w}_{,yy}w_{,y}) \\
 & + A'_{66}(\dot{w}_{,xx}w_{,y} + \dot{w}_{,x}w_{,yx})
 \end{aligned} \quad (18)$$

که τ ، پارامتری برای بی‌بعد سازی زمان است و به صورت رابطه (28) تعریف می‌شود:

$$\tau^2 = \frac{I_0 a^2}{\varepsilon A_{11}} \quad (28)$$

متغیرهای جابجایی نیز به صورت رابطه (29) بی‌بعد می‌شوند:

$$u^* = \frac{u}{a}, v^* = \frac{v}{a}, w^* = \frac{w}{a} \quad (29)$$

همچنین سایر پارامترهای بی‌بعد با رابطه (30) بدست می‌آیند،

$$\begin{aligned} k_0^* &= \frac{D_{11}}{A_{11}a^2}, k_1^* = \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{A_{11}a^2}, k_2^* = \frac{D_{22}}{A_{11}a^2}, \\ k_4^* &= \frac{A_{12}}{A_{11}}, k_5^* = \frac{A_{22}}{A_{11}}, k_4^* = \frac{A_{66}}{A_{11}}, \\ k_7^* &= \frac{B_{11}}{A_{11}a}, k_8^* = \frac{B_{12}}{A_{11}a}, k_9^* = \frac{B_{22}}{A_{11}a}, \\ k_{10}^* &= \frac{B_{66}}{A_{11}a}, \eta_1^* = \frac{D'_{11}}{A_{11}a^2\tau}, \eta_2^* = \frac{2(D'_{12} + 2D'_{66})}{A_{11}a^2\tau}, \\ \eta_3^* &= \frac{D'_{22}}{A_{11}a^2\tau}, \eta_4^* = \frac{A'_{11}}{A_{11}\tau}, \eta_5^* = \frac{A'_{12}}{A_{11}\tau}, \\ \eta_6^* &= \frac{A'_{22}}{A_{11}\tau}, \eta_7^* = \frac{A'_{66}}{A_{11}\tau}, \eta_8^* = \frac{B'_{11}}{A_{11}\tau a}, \eta_9^* = \frac{B'_{12}}{A_{11}\tau a}, \\ \eta_{10}^* &= \frac{B'_{22}}{A_{11}\tau a}, \eta_{11}^* = \frac{B'_{66}}{A_{11}\tau a}, \\ \mu_1^* &= \frac{\mu_1 a^2}{A_{11}\tau}, \mu_2^* = \frac{\mu_2 a^2}{A_{11}\tau}, \mu_3^* = \frac{\mu_3 a^2}{A_{11}\tau}, \\ \Gamma_1^* &= \frac{I_2}{I_0 a^2}, \Gamma_3^* = \frac{I_1}{I_0 a^2} \end{aligned} \quad (30)$$

بنابراین با جایگذاری پارامترهای بی‌بعد می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_{,xx} + (k_4 + k_6)cv_{,xy} + k_6c^2u_{,yy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_1\dot{u} + w_{,x}w_{,xx} \\ + k_4c^2w_{,y}w_{,xy} + k_6c^2 \times (w_{,xy}w_{,y} + w_{,x}w_{,yy}) \\ - k_7w_{,xxx} - (k_8 + 2k_{10})c^2w_{,xyy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_4\dot{u}_{,xx} \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\eta_5 + \eta_7)c\dot{v}_{,xy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7c^2\dot{u}_{,yy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_4 \\ \times (\dot{w}_{,x}w_{,xx} + w_{,x}\dot{w}_{,xx}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7(\dot{w}_{,xy}w_{,y} + w_{,xy}\dot{w}_{,y}) \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7(\dot{w}_{,xy}w_{,y} + \dot{w}_{,x}w_{,yy} + w_{,xy}\dot{w}_{,y} + w_{,x}\dot{w}_{,yy}) \\ - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_8\dot{w}_{,xxx} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\eta_9 + 2\eta_{11})c^2\dot{w}_{,xyy} \\ = \varepsilon\ddot{u} - \varepsilon\Gamma_3\dot{w}_{,x} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} k_5c^2v_{,yy} + (k_4 + k_6)cu_{,xy} + k_6v_{,xx} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_2\dot{v} + k_4cw_{,xy}w_{,x} \\ + k_4cw_{,yy}w_{,y} + k_6c(w_{,xx}w_{,y} + w_{,x}w_{,xy}) - (k_8 + 2k_{10}) \\ cw_{,xxy} - k_9c^3w_{,yyy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_6c^2\dot{v}_{,yy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\eta_5 + \eta_7)c\dot{u}_{,xy} \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7\dot{v}_{,yy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_5c(\dot{w}_{,x}w_{,xy} + \dot{w}_{,xy}w_{,x}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7c^3 \\ \times (\dot{w}_{,y}w_{,yy} + \dot{w}_{,yy}w_{,y}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7c \\ \times (\dot{w}_{,xx}w_{,y} + \dot{w}_{,x}w_{,xy} + w_{,xx}\dot{w}_{,y} + w_{,x}\dot{w}_{,xy}) \\ - \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\eta_9 + 2\eta_{11})c^2\dot{w}_{,xxy} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_{10} \times \dot{w}_{,yyy} \\ = \varepsilon\ddot{v} - \varepsilon\Gamma_3\dot{w}_{,y} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} k_0w_{,xxxx} + k_1c^2w_{,xxyy} + k_2c^4w_{,yyyy} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_3\dot{w} \\ - \left([u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2] + k_4[cv_{,y} + \frac{1}{2}c^2w_{,y}^2] \right) w_{,xx} \\ - \left(k_4[u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2] + k_5[cv_{,y} + \frac{1}{2}c^2w_{,y}^2] \right) c^2w_{,yy} \\ - 2k_6(cu_{,y} + v_{,x} + cw_{,x}w_{,y})cw_{,xy} - k_7w_{,xxx} - k_9c^3v_{,yyy} \\ - k_8cv_{,xxy} - 2k_8c^2w_{,xy}^2 - k_8c^2w_{,xxy}w_{,y} - k_8c^2u_{,xxy} \\ - 2k_{10}c(cu_{,xyy} + v_{,xxy} + cw_{,xx}w_{,yy}) \\ + 2k_8c^2w_{,xx}w_{,yy} + k_8c^2w_{,xxy}w_{,y} + 2k_{10}c^2w_{,xy}^2 \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_1\dot{w}_{,xxx} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_2c^2\dot{w}_{,xxy} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \times (\eta_4[\dot{u}_{,x} + \dot{w}_{,x}w_{,x}] + \eta_5[c\dot{v}_{,y} + c^2\dot{w}_{,y}w_{,y}])w_{,xx} \\ - \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\eta_5[\dot{u}_{,x} + \dot{w}_{,x}w_{,x}] + \eta_6[c\dot{v}_{,y} + c^2\dot{w}_{,y}w_{,y}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \frac{2z}{h}, \quad \text{For FG-A} \\ f(z) &= 2\left(1 - 2\frac{|z|}{h}\right), \quad \text{For FG-O} \end{aligned} \quad (23)$$

همچنین برای محاسبات عددی می‌توان از پارامترهای رابطه (24) استفاده نمود [19]:

$$\begin{aligned} E_1^{\text{CNT}} &= 5.6466 \text{ TPa}, E_2^{\text{CNT}} = 7.08 \text{ TPa}, \\ G_{12}^{\text{CNT}} &= 1.9445 \text{ TPa}, \nu_{12}^{\text{CNT}} = 0.175, \\ \rho_{\text{CNT}} &= 1400 \text{ kg m}^{-3}, E_m = 2.1 \text{ GPa}, \\ \nu_m &= 0.34, \rho_m = 1150 \text{ kg m}^{-3} \end{aligned} \quad (24)$$

2-2- حل معادلات حرکت غیرخطی به روش مقیاس‌های چندگانه

در این مرحله بدون استفاده از روش گسسته‌سازی همانند روش گلرکین و بدون استفاده از یک تابع تنش¹، معادلات حرکت مستقیماً حل می‌شوند. مزیت این روش آن است که از عدم دقتی که ناشی از جداسازی تابع پاسخ بوجود می‌آید، جلوگیری می‌کند و پاسخ با دقت بیشتری به دست می‌آید. بدین منظور، ابتدا معادلات حرکت بی‌بعد می‌شوند. بنابراین با توجه به این که نسبت ضخامت به ابعاد در صفحات کوچک می‌باشد، پارامتر کوچک بدون بعد ε به صورت رابطه (25) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (25)$$

همچنین نسبت ابعاد (طول به عرض) صفحه که با a و b مشخص می‌شود، به صورت رابطه (26) تعریف می‌گردد:

$$c = \frac{a}{b} \quad (26)$$

پارامترهای x ، y و t نیز به صورت رابطه (27) بی‌بعد می‌شوند:

$$\chi^* = \frac{x}{a}, y^* = \frac{y}{b}, t^* = \frac{t}{\tau} \quad (27)$$

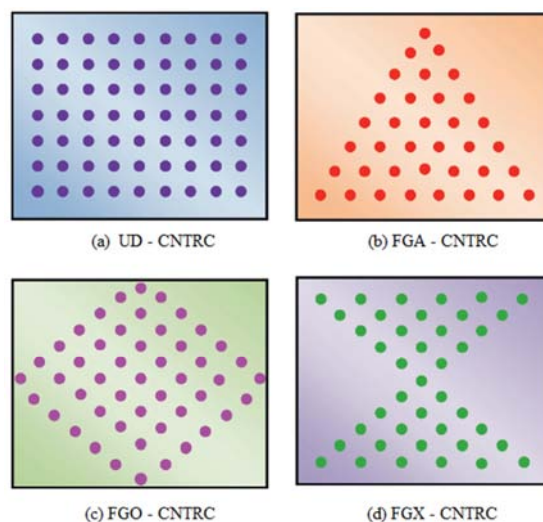


Fig. 2 Different Distribution of Nanotubes in Plates

شکل 2 انواع توزیع نانو لوله در صفحه [19]

جدول 1 پارامترهای بهره‌وری برحسب تابعی از کسر حجمی میانگین نانولوله کربنی
Table 1 Efficiency parameters as function of average volume fraction of nanotube

η_3	η_2	η_1	$\bar{V}_{\text{CNT}}$
0.934	0.934	0.149	0.11
0.941	0.941	0.150	0.14
1.381	1.381	0.149	0.17

¹ Stress function

$$\begin{aligned}
& -2\varepsilon^2\eta_{11}c(w_{yy}\dot{w}_{xyy} + \dot{w}_x w_{xyy} \\
& + w_{xx}\dot{w}_{yy} + w_{xxy}\dot{w}_y) + \varepsilon^2\eta_9c^2 \\
& \times (\dot{w}_{xyy}w_x + 2w_{xx}\dot{w}_{yy}) \\
& = -\varepsilon\dot{w} + \varepsilon\Gamma_1(\dot{w}_{xx} + c^2\dot{w}_{yy}) \\
& + \varepsilon(\ddot{u} - \Gamma_3\dot{w}_x)w_x + \varepsilon(\ddot{v} - \Gamma_3\dot{w}_y) \\
& \times w_y - \varepsilon\Gamma_3(\ddot{u}_x + \ddot{v}_y) \quad (36)
\end{aligned}$$

حال با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به صورت مستقیم و بدون این‌که به جداسازی متغیرها پرداخته شود به حل معادلات بی‌بعد همراه با شرایط مرزی گفته شده اقدام می‌گردد. بدین منظور با در نظر گرفتن دو مقیاس زمانی سریع $T_0 = t$ و کند $T_1 = \varepsilon t$ بسط مجانبی مناسبی باید برای u , v و w در نظر گرفته می‌شود. بنابراین بسط مجانبی مناسب جهت جابجایی‌ها به صورت روابط (39) - (37) نوشته می‌شود:

$$w(x, y, T_0, T_1) = \varepsilon w_1(x, y, T_0, T_1) + \varepsilon^2 w_2(x, y, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \quad (37)$$

$$v(x, y, T_0, T_1) = \varepsilon^2 v_1(x, y, T_0, T_1) + \varepsilon^3 v_2(x, y, T_0, T_1) + O(\varepsilon^4) \quad (38)$$

$$u(x, y, T_0, T_1) = \varepsilon^2 u_1(x, y, T_0, T_1) + \varepsilon^3 u_2(x, y, T_0, T_1) + O(\varepsilon^4) \quad (39)$$

با فرض این‌که اندازه طول و عرض صفحه به یکدیگر نزدیک هستند و با معرفی پارامتر بدون بعد σ_1 ، رابطه (40) حاصل می‌گردد

$$c = 1 + \varepsilon\sigma_1 \quad (40)$$

مشقات زمانی را می‌توان برحسب مقیاس‌های زمانی تند و کند به صورت

رابطه (41) نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 \quad (41)$$

به‌طوری که D_0 و D_1 با رابطه (42) بیان می‌شود

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1} \quad (42)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات بی‌بعد شده و مساوی صفر قرار دادن ضرایب درجات مختلف ε معادلات (43) الی (45) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u_{1,xx} + (k_4 + k_6)v_{1,xy} + k_6u_{1,yy} &= -w_{1,x}w_{1,xx} \\
&- k_4w_{1,y}w_{1,xy} - k_6(w_{1,xy}w_{1,y} + w_{1,x}w_{1,yy}) \\
&- \Gamma_3 D_0^2 w_{1,x} + k_7w_{1,xxx} + (k_8 + 2k_{10})w_{1,xyy} \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5v_{1,yy} + (k_4 + k_6)u_{1,xy} + k_6v_{1,xx} &= -k_4w_{1,xy}w_{1,x} \\
&- k_5w_{1,yy}w_{1,y} + k_6(w_{1,xx}w_{1,y} + w_{1,x}w_{1,xy}) \\
&- \Gamma_3 D_0^2 w_{1,y} + (k_8 + 2k_{10})w_{1,xyy} + k_9w_{1,yyy} \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_0w_{1,xxxx} + k_1w_{1,xyyy} + k_2w_{1,yyyy} + D_0^2 w_1 \\
- \Gamma_1 D_0^2 (w_{1,xx} + w_{1,yy}) = 0 \quad (45)
\end{aligned}$$

از طرفی حل معادله (43) به رابطه (46) می‌انجامد

$$w_1(x, y, T_0, T_1) = (A(T_1)e^{i\omega_{mn}T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_{mn}T_0}) \times \phi_{m,n}(x, y) \quad (46)$$

مقدار $A(T_1)$ نامشخص است که در مراحل بعد و با حذف جملات سکولار و شرایط حل‌پذیری به دست خواهد آمد. حال با توجه به شرایط مرزی مسئله به صورت رابطه (47)،

$$\begin{aligned}
x = 0, 1 \rightarrow w_1(x, y, T_0, T_1) = 0, w_{1,xx}(x, y, T_0, T_1) = 0 \\
y = 0, 1 \rightarrow w_1(x, y, T_0, T_1) = 0, w_{1,yy}(x, y, T_0, T_1) = 0 \quad (47)
\end{aligned}$$

می‌توان شکل مود سیستم را به صورت رابطه (48) نوشت:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \quad (48)$$

با استفاده از رابطه (46) و جایگذاری آن در روابط (43) و (44) و نیز بهره‌گیری شرایط مرزی فوق، می‌توان فرکانس طبیعی خطی را با رابطه (49)

$$\omega_{m,n}(x, y) = \pi^2 \left(\frac{k_0 m^4 + k_1 m^2 n^2 + k_2 n^4}{1 + \Gamma_1(m^2 + n^2)\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

نگاشت بنابراین روابط (50) الی (52) حاصل می‌گردند

$$\begin{aligned}
& \times c^2 w_{xx} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_7(c\dot{u}_y + \dot{v}_x + c\dot{w}_x w_y + \\
& c w_x \dot{w}_y) \times c w_{xy} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_8(\dot{u}_{xxx} + \dot{w}_{xx} \\
& w_{xx} + \dot{w}_x w_{xxx}) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_{10}c^2(c\dot{v}_{yyy} \\
& + \dot{w}_{yy}w_{yy} + \dot{w}_y w_{yyy}) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_9 \\
& \times (c\dot{u}_{xxy} + 4c^2\dot{w}_{xy}w_{xy} + c^2\dot{w}_y w_{xxy}) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_9c^2 \\
& \times (c\dot{u}_{xyy} + \dot{w}_x w_{xyy} + w_{xx}\dot{w}_{xyy}) - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_{11}c \\
& \times (w_{yy}\dot{w}_{xyy} + \dot{w}_x w_{xyy} + w_{xx}\dot{w}_{yy} + w_{xxy}\dot{w}_y) \\
& + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_9c^2 \times (\dot{w}_{xyy}w_x + 2w_{xx}\dot{w}_{yy}) = -\varepsilon\dot{w} \\
& + \varepsilon\Gamma_1(\dot{w}_{xx} + c^2\dot{w}_{yy}) + \varepsilon(\ddot{u} - \Gamma_3\dot{w}_x)w_x \\
& + \varepsilon(\ddot{v} - \Gamma_3\dot{w}_y)w_y - \varepsilon\Gamma_3(\ddot{u}_x + \ddot{v}_y) \quad (33)
\end{aligned}$$

اما سفتی مربوط به حرکت صفحه‌ای خیلی بزرگتر از سفتی‌های عرضی است (یعنی $A_{11} \gg D_{11}, D_{22}, 2(D_{12} + 2D_{66})$) این بدان معنا است که فرکانس‌های طبیعی خطی صفحه‌ای در قیاس با فرکانس‌های خطی عرضی بزرگتر می‌باشند. بنابراین می‌توان از ترم‌های اینرسی صفحه‌ای صرف‌نظر نمود. همچنین با توجه به این نکته می‌توان فهمید که $k_0, k_1, k_2 = O(\varepsilon)$ بنابراین با مقیاس کردن آن‌ها به صورت $\bar{k}_j = \varepsilon k_j$ ($j = 0, 1, 2, 7, 8, 10$) بصورت $\bar{\mu}_i = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_i$ ($i = 1 \dots 3$), $\bar{\eta}_i = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta_i$ ($i = 1 \dots 7$) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
u_{xx} + (k_4 + k_6)cv_{xy} + k_6c^2u_{yy} + \varepsilon\mu_1\ddot{u} + w_x w_{xx} \\
+ k_4c^2w_y w_{xy} + k_6c^2(w_{xy}w_y + w_x w_{yy}) - \varepsilon k_7 w_{xxx} \\
- \varepsilon(k_8 + 2k_{10})c^2w_{xyy} + \varepsilon\eta_4\dot{u}_{xx} + \varepsilon(\eta_5 + \eta_7)c\dot{v}_{xy} \\
+ \varepsilon\eta_7c^2\dot{u}_{yy} + \varepsilon\eta_4(\dot{w}_x w_{xx} + w_x \dot{w}_{xx}) + \varepsilon\eta_5 \\
\times (\dot{w}_{xy}w_y + w_{xy}\dot{w}_y) + \varepsilon\eta_7(\dot{w}_{xy}w_y + \dot{w}_x w_{yy} \\
+ w_{xy}\dot{w}_y + w_x \dot{w}_{yy}) - \varepsilon^2\eta_8\dot{w}_{xxx} - \varepsilon^2 \\
\times (\eta_9 + 2\eta_{11})c^2\dot{w}_{xyy} = \varepsilon\ddot{u} - \varepsilon\Gamma_3\dot{w}_x \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5c^2v_{yy} + (k_4 + k_6)cu_{xy} + k_6v_{xx} + \varepsilon\mu_2\ddot{v} + k_4cw_{xy}w_x \\
+ k_5c^2w_{yy}w_y + k_6c(w_{xx}w_y + w_x w_{xy}) - \varepsilon(k_8 + 2k_{10}) \\
\times cw_{xxy} - \varepsilon k_9c^3w_{yyy} + \varepsilon\eta_6c^2\dot{v}_{yy} + \varepsilon(\eta_5 + \eta_7) \\
\times c\dot{u}_{xy} + \varepsilon\eta_7\dot{v}_{xx} + \varepsilon\eta_5c(\dot{w}_x w_{xy} + \dot{w}_{xy}w_x) \\
+ \varepsilon\eta_7c^3(\dot{w}_y w_{yy} + \dot{w}_{yy}w_y) + \varepsilon\eta_7c \\
\times (\dot{w}_{xx}w_y + \dot{w}_x w_{yx} + w_{xx}\dot{w}_y + w_x \dot{w}_{xy}) \\
- \varepsilon^2(\eta_9 + 2\eta_{11})c\dot{w}_{xxy} - \varepsilon^2\eta_{10}c^3\dot{w}_{yyy} \\
= \varepsilon\ddot{v} - \varepsilon\Gamma_3\dot{w}_y \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon k_0 w_{xxxx} + \varepsilon k_1 c^2 w_{xxyy} + \varepsilon k_2 c^4 w_{yyyy} + \varepsilon \mu_3 \dot{w} \\
- \left(\left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] + k_4 \left[cv_y + \frac{1}{2} c^2 w_y^2 \right] \right) w_{xx} \\
- \left(k_4 \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] + k_5 \left[cv_y + \frac{1}{2} c^2 w_y^2 \right] \right) c^2 w_{yy} \\
- 2k_6 (cu_y + v_x + cw_x w_y) cw_{xy} - \varepsilon k_7 w_{xxx} \\
- \varepsilon k_9 c^3 v_{yyy} - \varepsilon k_8 cv_{xxy} - 2\varepsilon k_8 c^2 w_{xy}^2 \\
- \varepsilon k_8 c^2 w_{xxy} w_y - \varepsilon k_8 c^2 u_{xxy} \\
- 2\varepsilon k_{10} c (cu_{xyy} + v_{xxy} + cw_{xx} w_{yy}) \\
+ 2\varepsilon k_8 c^2 w_{xx} w_{yy} + \varepsilon k_8 c^2 w_{xxy} w_y \\
+ \varepsilon k_{10} c^2 w_{xy}^2 + \varepsilon \eta_1 \dot{w}_{xxxx} \\
+ \varepsilon \eta_2 c^2 \dot{w}_{xxyy} + \varepsilon \eta_3 c^4 \dot{w}_{yyyy} - \varepsilon (\eta_4 [\dot{u}_x + \dot{w}_x w_x] \\
+ \eta_5 [c\dot{v}_y + c^2 \dot{w}_y w_y]) w_{xx} - \varepsilon (\eta_5 [\dot{u}_x + \dot{w}_x w_x] \\
+ \eta_6 [c\dot{v}_y + c^2 \dot{w}_y w_y]) c^2 w_{xx} - 2\varepsilon \eta_7 \\
\times (c\dot{u}_y + \dot{v}_x + c\dot{w}_x w_y + cw_x \dot{w}_y) cw_{xy} \\
- \varepsilon^2 \eta_8 (\dot{u}_{xxx} + \dot{w}_{xx} w_{xx} + \dot{w}_x w_{xxx}) - \varepsilon^2 \eta_{10} c^2 \\
\times (c\dot{v}_{yyy} + \dot{w}_{yy} w_{yy} + \dot{w}_y w_{yyy}) - \varepsilon^2 \eta_9 \\
\times (c\dot{u}_{xxy} + 4c^2 \dot{w}_{xy} w_{xy} + c^2 \dot{w}_y w_{xxy}) \\
- \varepsilon^2 \eta_9 c^2 (c\dot{u}_{xyy} + \dot{w}_x w_{xyy} + w_x \dot{w}_{xyy})
\end{aligned}$$

که Λ_1, Λ_2 و Λ_3 با رابطه (57) بیان می‌گردد

$$\Lambda_1 = (m\pi)(n\pi)(k_4 + k_6), \quad \Lambda_2 = (m\pi)^2 + k_6(n\pi)^2, \quad \Lambda_3 = (m\pi)^2 k_6 + (n\pi)^2 k_5 \quad (57)$$

بنابراین ضرایب معادله به فرم رابطه (58) بوده

$$\begin{aligned} c_i &= \Pi_i^c (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad i = 1, 2 \\ d_i &= \Pi_i^d (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad i = 1, 2 \\ c_j &= \Pi_j^c (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad j = 3, 4 \\ d_j &= \Pi_j^d (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad j = 3, 4 \\ c_5 &= \Pi_5^c (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad c_6 = 0 \\ d_5 &= \Pi_5^d (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2, \quad d_6 = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1^c &= \frac{\Theta_4 - \Theta_5}{(4n\pi)^2 k_5}, \quad \Pi_1^d = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{(4n\pi)^2} \\ \Pi_2^c &= \frac{1}{32} \frac{(\Theta_1 + \Theta_2)\Lambda_1 - (\Theta_4 + \Theta_5)\Lambda_2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3} \\ \Pi_3^d &= \frac{1}{32} \frac{(\Theta_4 + \Theta_5)\Lambda_1 - (\Theta_1 + \Theta_2)\Lambda_3}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3} \\ \Pi_4^c &= \frac{1}{2} \frac{\Theta_6\Lambda_2 - \Theta_3\Lambda_1}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3}, \quad \Pi_4^d = \frac{1}{2} \frac{\Theta_3\Lambda_3 - \Theta_6\Lambda_1}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3} \\ \Pi_5^c &= \frac{1}{2} \frac{\Theta_6\Lambda_2 - \Theta_3\Lambda_1}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3}, \quad \Pi_5^d = \frac{1}{2} \frac{\Theta_6\Lambda_1 - \Theta_3\Lambda_3}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_3} \end{aligned} \quad (59)$$

از طرفی معادله مربوط به ضرایب با بزرگی $O(\varepsilon^3)$ برای راستای عرضی

به صورت رابطه (60) نمایش داده می‌شود

$$\begin{aligned} k_0 w_{2,xxxx} + k_1 w_{2,xxxy} + k_2 w_{2,yyyy} + D_0^2 w_2 \\ - \Gamma_1 D_0^2 (w_{2,xx} + w_{2,yy}) = u_{1,x} w_{1,xx} + \frac{1}{2} w_x^2 w_{1,xx} \\ + k_4 v_{1,y} w_{1,xx} + \frac{1}{2} k_4 w_{1,y}^2 w_{1,xx} + k_4 u_{1,x} w_{1,yy} \\ + \frac{1}{2} k_4 w_{1,x}^2 w_{1,yy} + k_5 v_{1,y} w_{1,yy} + \frac{1}{2} k_5 w_{1,y}^2 w_{1,yy} \\ + 2k_6 u_{1,y} w_{1,xy} + 2k_6 v_{1,x} w_{1,xy} - 2k_6 w_{1,x} \\ \times w_{1,y} w_{1,xy} - \eta_1 D_0 w_{1,xxxx} \\ - \eta_2 D_0 w_{1,xxxy} - \eta_3 D_0 w_{1,yyyy} \\ - 2D_0 D_1 w_1 + 2\Gamma_1 D_0 D_1 (w_{1,xx} + w_{1,yy}) \\ - \Gamma_3 (w_{1,x} D_0^2 w_{1,x} + w_{1,y} D_0^2 w_{1,y}) \\ - 2k_1 \sigma_1 w_{1,xxxy} - 4k_2 \sigma_1 w_{1,yyyy} \\ + 2\Gamma_1 \sigma_1 D_0^2 w_{1,yy} - \mu_3 D_0 w_1 \\ + k_7 u_{1,xxx} + k_9 v_{1,yyy} + k_8 v_{1,xxxy} \\ + 2k_8 w_{1,xy}^2 + k_8 w_{1,xy} w_{1,y} + k_8 u_{1,xyy} \\ + 2k_{10} (u_{1,xyy} + v_{1,xyy} + w_{1,xx} w_{1,yy}) \\ - 2k_8 w_{1,xx} w_{1,yy} - k_8 w_{1,xy} w_{1,y} - 2k_{10} w_{1,xy}^2 \end{aligned} \quad (60)$$

بنابراین با جایگذاری u_1 ، v_1 و w_1 از معادلات (53) و (54) و (46) در

معادله‌ی (60) معادله‌ای به صورت رابطه (61) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} k_0 w_{2,xxxx} + k_1 w_{2,xxxy} + k_2 w_{2,yyyy} + D_0^2 w_2 \\ - \Gamma_1 D_0^2 (w_{2,xx} + w_{2,yy}) = H_{S,T}(x, y, T_0, T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{H}_{S,T}(x, y, T_0, T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0} + N.S.T \end{aligned} \quad (61)$$

که $H_{S,T}(x, y, T_0, T_1)$ ترمی است که شامل جملات سکولار می‌باشد.

معادله‌ی بالا یک معادله‌ی غیرهمگن می‌باشد. از طرفی، از آنجایی که معادله‌ی بالا خود الحاق می‌باشد بنابراین زمانی جواب خواهد داشت که حل مسأله‌ی الحاق آن بر طرف ناهمگنی معادله عمود باشد. بنابراین شرط حل‌پذیری مسأله به صورت رابطه (62) است،

$$\int_0^1 \int_0^1 H_{S,T}(x, y, T_0, T_1) \phi_{m,n}(x, y) dx dy = 0 \quad (62)$$

بنابراین با جایگذاری ترم‌های سکولار در انتگرال بالا و گرفتن انتگرال

نتیجه به صورت رابطه (63) خواهد شد:

$$\begin{aligned} i\psi_1 \frac{dA_1(T)}{dT_1} + i\psi_2 A_1(T) + \sigma_1 \psi_3 A_1(T) - \psi_5 A_1(T) \\ + \psi_4 A_1^2(T) \bar{A}_1(T) = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} u_{1,xx} + (k_4 + k_6) v_{1,xy} + k_6 u_{1,yy} = \left(\frac{(\Theta_1 - \Theta_2)}{4} \right. \\ \times \sin(2m\pi x - 2n\pi y) \times (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 + \frac{\Theta_3}{2} (\sin(m\pi x + n\pi y) \\ - \sin(m\pi x - n\pi y)) \times (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} k_5 v_{1,yy} + (k_4 + k_6) u_{1,xy} + k_6 v_{1,xx} = \left(\frac{(\Theta_5 - \Theta_4)}{4} \right. \\ \times \sin(2n\pi y) - \frac{(\Theta_4 + \Theta_5)}{8} \sin(2m\pi x + 2n\pi y) \\ + \frac{(\Theta_5 + \Theta_4)}{8} \sin(2m\pi x - 2n\pi y) \Big) \\ \times (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 \\ + \frac{\Theta_6}{2} (\sin(m\pi x + n\pi y) - \sin(m\pi x - n\pi y)) \\ \times (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \Theta_1 = (m\pi)^3 + k_6(m\pi)(n\pi)^2, \quad \Theta_2 = (k_4 + k_6) \\ (n\pi)^2(m\pi), \quad \Theta_3 = \omega_{m,n}^2 \Gamma_3 m\pi - [k_6(m\pi)^3] \\ + (k_8 + 2k_{10})(m\pi)(n\pi)^2, \quad \Theta_4 = (k_4 + k_6) \\ \times (m\pi)^2(n\pi), \quad \Theta_5 = k_5(n\pi)^3 + k_6 \\ \times (n\pi)(m\pi)^2, \quad \Theta_6 = \omega_{m,n}^2 \Gamma_3 n\pi - \\ [(k_8 + 2k_{10})(m\pi)^2(n\pi) + k_9(n\pi)^3] \end{aligned} \quad (52)$$

برای حل دستگاه بالا جواب‌ها به صورت روابط (53) و (54) در نظر گرفته

می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, T_0, T_1) = d_1 \sin(2m\pi x) + d_2 \sin(2m\pi x \\ + 2n\pi y) + d_3 \sin(2m\pi x - 2n\pi y) + d_4 \sin(m\pi x \\ + d_5 \sin(m\pi x - n\pi y) + d_6 \sin(2n\pi y) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, y, T_0, T_1) = c_1 \sin(2n\pi x) + c_2 \sin(2m\pi x \\ + 2n\pi y) + c_3 \sin(2m\pi x - 2n\pi y) \\ + c_4 \sin(m\pi x + n\pi y) + c_5 \sin(m\pi x - n\pi y) \\ + c_6 \sin(2m\pi y) \end{aligned} \quad (54)$$

توجه نمایید که توابع بالا شرایط مرزی u_1 و v_1 را که به صورت رابطه

(55) هستند ارضاء می‌کنند:

$$\begin{aligned} x = 0, 1 \rightarrow u_1(x, y, T_0, T_1) = 0 \\ y = 0, 1 \rightarrow v_1(x, y, T_0, T_1) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

با جایگذاری معادلات (53) و (54) در معادلات (50) و (51) و برابری

ضرایب توابع یکسان مثلثاتی به رابطه (56) رسیده

$$\begin{aligned} -\Lambda_2 d_5 + \Lambda_1 c_5 = -\frac{\Theta_3}{2} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \\ \Lambda_1 d_5 - \Lambda_3 c_5 = \frac{\Theta_6}{2} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \\ - (2n\pi)^2 c_1 k_5 = \frac{(\Theta_5 - \Theta_4)}{4} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 - (2m\pi)^2 c_6 k_6 = 0 \\ - (2m\pi)^2 d_1 = \frac{(\Theta_1 - \Theta_2)}{4} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 - (2n\pi)^2 d_6 k_6 = 0 \\ - 4\Lambda_2 d_3 + 4\Lambda_1 c_3 = -\frac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{8} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 \\ 4\Lambda_1 d_3 - 4\Lambda_3 c_3 = -\frac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{8} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0})^2 \\ \Lambda_2 d_4 + \Lambda_1 c_4 = \frac{\Theta_3}{2} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \\ \Lambda_1 d_4 + \Lambda_3 c_4 = -\frac{\Theta_6}{2} (A_1(T_1) e^{i\omega_{m,n}T_0} \\ + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{m,n}T_0}) \end{aligned} \quad (56)$$

به طوری که ψ_1 الی ψ_5 به فرم رابطه (64) بیان می گردند

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\omega_{m,n}}{2} (1 + \Gamma_1 (m^2 + n^2) \pi^2) \\ \psi_2 &= \frac{\pi^2 \omega_{m,n}}{4} \left(\frac{\mu_3}{\pi^2} + n^4 \pi^2 \eta_3 + m^4 \pi^2 \eta_1 + m^2 n^2 \pi^2 \eta_2 \right) \\ \psi_3 &= \frac{\pi^2}{4} (4k_2 n^4 \pi^2 + 2k_1 m^2 n^2 \pi^2 - 2n^2 \Gamma_1 \omega_{m,n}^2) \\ \psi_4 &= \frac{3\pi^3}{128} (-32n \Pi_1^c (k_5 n^2 + k_4 m^2) - 32m \Pi_1^d) \\ \psi_5 &= \frac{k_1}{4} (\Pi_4^d - \Pi_5^d) m^3 \pi^3 + \frac{\pi^3 k_8}{4} [(\Pi_4^c + \Pi_5^c) m^2 n\end{aligned}\quad (64)$$

برای حل معادله ی حل پذیری از تغییر متغیر رابطه (65) استفاده می شود:

$$A_1(T) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\theta(T_1)} \quad (65)$$

با جایگذاری رابطه (65) در معادله (61) و برابری ضرایب موهومی و حقیقی به روابط (66) و (67) رسید

$$\frac{da}{dT_1} + \frac{\psi_2}{\psi_1} a = 0 \quad (66)$$

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \frac{\psi_3}{\psi_1} \sigma_1 - \frac{\psi_5}{\psi_1} + \frac{\psi_4}{4\psi_1} a^2 \quad (67)$$

بنابراین با حل معادلات (66) و (67)، عبارات (68) و (69) حاصل گردیده

$$a = a_0 e^{-\frac{\psi_2 T_1}{\psi_1}} \quad (68)$$

$$\theta = \left(\frac{\psi_3}{\psi_1} \sigma_1 - \frac{\psi_5}{\psi_1} \right) T_1 + \left(1 - \frac{\psi_4}{8\psi_1} a_0^2 e^{-2\frac{\psi_2 T_1}{\psi_1}} \right) + \theta_0 \quad (69)$$

پس فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم را می توان بصورت رابطه (70)

تعریف نمود:

$$\omega_{N_{m,n}} = \omega_{m,n} + \frac{d\theta}{dt} \quad (70)$$

که با جایگذاری از معادله (69) در معادله (70) فرکانس غیرخطی بصورت رابطه (71) بیان خواهد شد:

$$\omega_{N_{m,n}} = \omega_{m,n} + \left(\frac{\psi_3}{\psi_1} \sigma_1 - \frac{\psi_5}{\psi_1} \right) \varepsilon + \frac{\psi_4}{4\psi_1} \varepsilon a_0^2 e^{-2\frac{\psi_2 \varepsilon T_1}{\psi_1}} \quad (71)$$

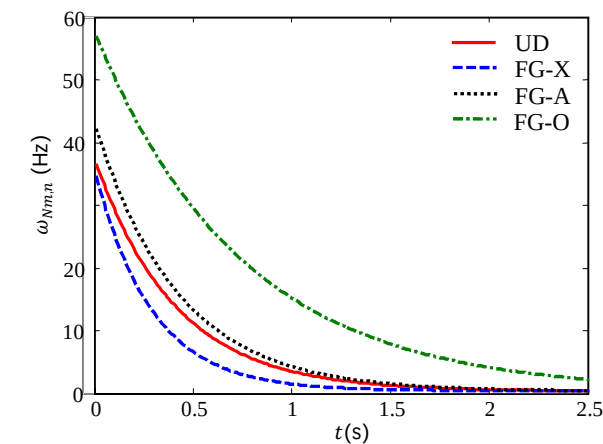


Fig. 4 Normal Nonlinear Frequency Based on Time for Different Distributions of Carbon Nanotubes at 0.12 Volume Fraction

شکل 4 نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی برحسب زمان برای توزیع های متفاوت نانولوله کربنی برای کسر حجمی 0.12

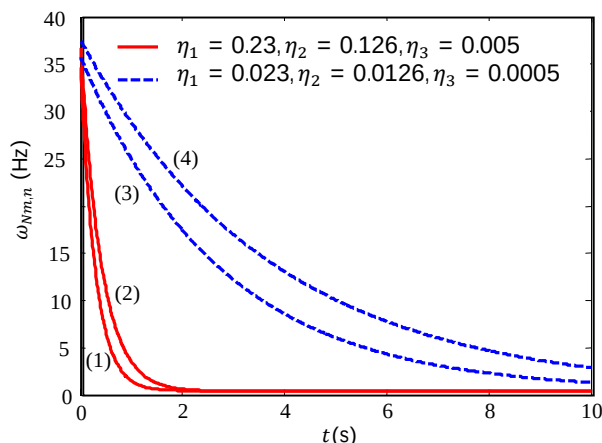


Fig. 5 The Impact of Dampness Coefficient on the Nonlinear Frequency at 0.12 Volume Fraction. Curves [(1),(3)] and [(2),(4)] are related to UD and FG-X distributions, respectively.

شکل 5 تأثیر ضریب میرایی بر روی فرکانس غیرخطی در کسر حجمی 0.12

منحنی های (1) و (3) مربوط به توزیع UD و (2) و (4) مربوط به توزیع FG-X می باشد.

3 - نتایج عددی

شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی را نسبت به زمان برای مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله کربنی نشان می دهد. همان طور که دیده می شود با افزایش کسر حجمی نانولوله کربنی فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می یابد.

شکل 4 فرکانس غیرخطی سیستم برحسب زمان را برای توزیع های

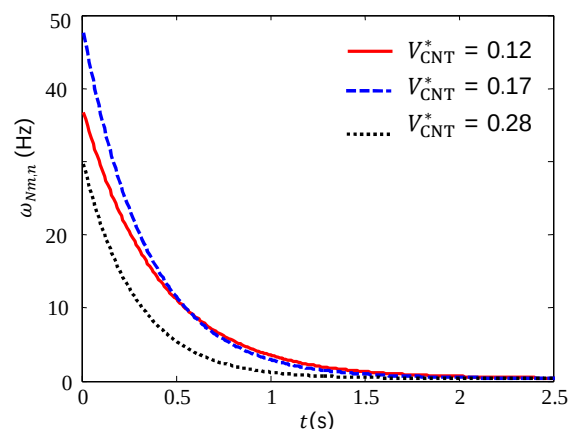


Fig. 3 Normal Nonlinear Frequency Based on Time for Uniform Distribution and Different Volume Fractions

شکل 3 نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی برحسب زمان برای توزیع یکنواخت و کسرهای حجمی متفاوت

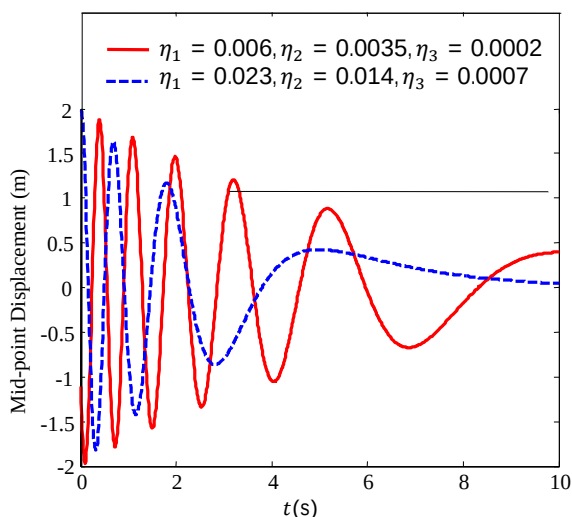


Fig. 9 The Impact of Dampness Coefficient on the Response Time History at 0.17 Volume Fraction

شکل 9 تأثیر ضریب میرایی بر روی تاریخچه زمانی در کسر حجمی 0.17

می‌باشد. با توجه به این شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار ضریب میرایی در مدل کلین-ویت، نرخ کاهش دامنه افزایش می‌یابد. یکی از مزایایی که در روش مقیاس‌های چندگانه نسبت به روش‌های دیگر وجود دارد آنست که با استفاده از آن نسبت حساسیت پاسخ به پارامترهای سیستم را می‌توان سنجید. پارامتری که در این جا به عنوان پارامتر کوچک معرفی گردیده است، مربع نسبت ضخامت ورق به طول ورق می‌باشد. شکل 10 اثرات تغییرات این پارامتر را بر روی پاسخ سیستم بیان می‌کند. این شکل نشان می‌دهد که کاهش نسبت ضخامت به طول صفحه باعث کاهش در نرخ کاهش دامنه می‌گردد. همچنین شکل 11 نشان‌دهنده اثر نسبت طول به عرض صفحه در تغییر مکان وسط صفحه می‌باشد. اثر نسبت ابعاد با پارامتر σ_1 مشخص می‌شود که با توجه به شکل فوق

مشاهده می‌گردد با افزایش این نسبت، زمان پاسخ گذرا افزایش می‌یابد. همچنین در شکل 12 مقایسه‌ای بین تغییر شکل وسط صفحه در مود اول و مود دوم ارتعاش انجام گردیده است. با مشاهده این شکل مشخص می‌گردد که در مدهای بالاتر، نرخ کاهش جابجایی‌ها در زمان بسیار بالاتر

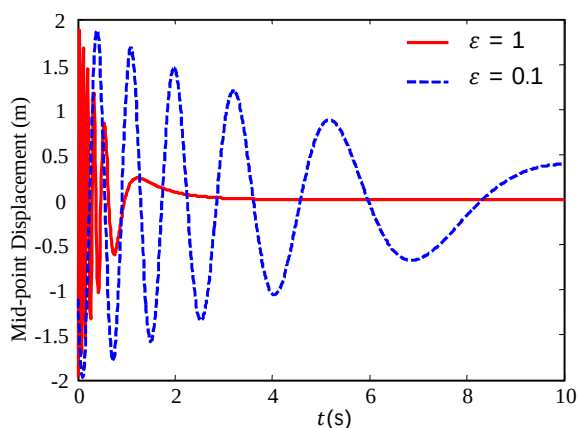


Fig. 10 The Impact of ε on the Response Time History at 0.12 Volume Fraction

شکل 10 تأثیر ε بر روی تاریخچه زمانی پاسخ در کسر حجمی 0.12

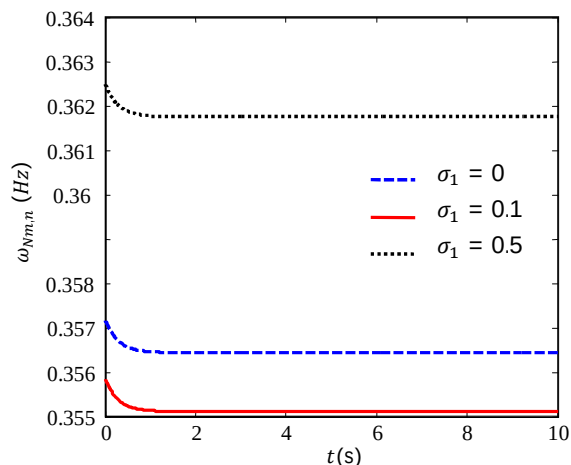


Fig. 6 The Impact of σ on the Normal Nonlinear Frequency Based on Time at 0.12 Volume Fraction

شکل 6 تأثیر σ بر نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی برحسب زمان برای کسر حجمی 0.11

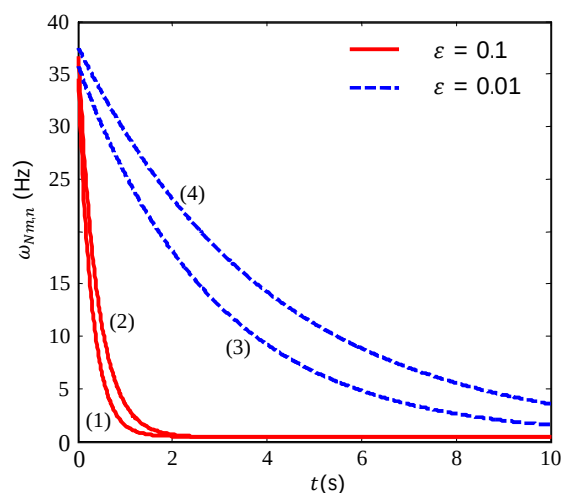


Fig. 7 The Impact of ε on the Normal Nonlinear Frequency Based on Time at 0.12 Volume Fraction. Curves [(1),(3)] and [(2),(4)] are related to FG-X and UD distributions, respectively.

شکل 7 تأثیر ε بر نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی برحسب زمان برای کسر حجمی 0.12. منحنی‌های (1) و (3) مربوط به توزیع FG-X و منحنی‌های (2) و (4) مربوط به توزیع UD می‌باشد.

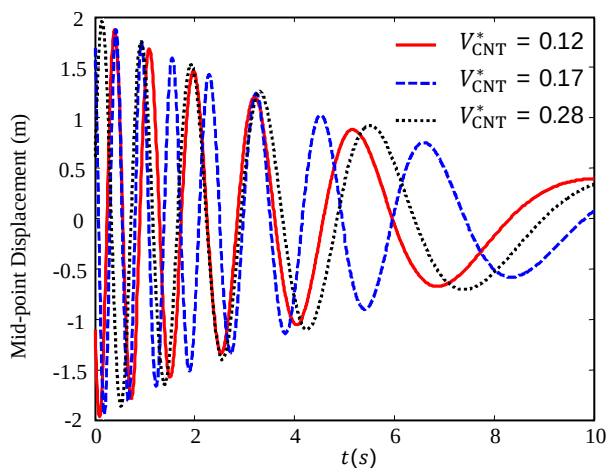


Fig. 8 Time History for Different Fraction Volumes

شکل 8 تاریخچه زمانی برای کسر حجمی‌های متفاوت

نسبت طول به عرض صفحه، ضریب میرایی یا ویسکوزیته ماده، کسر حجمی نانولوله کربنی و همچنین نسبت ضخامت به بعد صفحه در فرکانس طبیعی و شکل مود غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که افزایش نسبت ضخامت صفحه به طول آن، نرخ کاهش دامنه در نقطه وسط صفحه را افزایش می‌دهد. همچنین افزایش این پارامتر باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی صفحه می‌گردد. همچنین افزایش کسر حجمی باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی و کاهش زمان گذرای سیستم می‌شود. علاوه بر این ضریب میرایی اثر مثبت بر کاهش دامنه و فرکانس طبیعی غیرخطی دارد. همچنین رابطه بین فرکانس طبیعی و دامنه که از خصوصیات سیستم‌های غیرخطی است، مشاهده گردید.

5- مراجع

- [1] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), *The Theory of Sound*, 2nd Ed., London: Macmillan, Vol. II, pp. 89-93, 1896. (also available in a 1945 edition from New York Dover).
- [2] A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, pp. 28-31, NASA SP-160, US Government Printing Office, Washington, DC, USA, 1969.
- [3] P. A. A. Lanra, R. Duran, A note on forced vibrations of clamped rectangular plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 42, No. 1, pp. 129-135, 1975.
- [4] T. W. Kim, J. H. Kim, Nonlinear Vibration of viscoelastic laminated composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2857-2870, 2002.
- [5] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, pp. 16-19, New York: Wiley, 1973.
- [6] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 20-24, New York: Wiley, 1979.
- [7] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation Techniques*, pp. 214-264, New York: Wiley, 1981.
- [8] A. H. Nayfeh, C. Chin, S. A. Nayfeh, Nonlinear Normal Modes of a Cantilever beams, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, No. 4, pp. 474-481, 1995.
- [9] G. Formica, W. Lacarbonara, R. Alessi, Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 10, pp. 1875-1889, 2010.
- [10] P. Zhu, Z. X. Lei, K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 4, pp. 1450-1460, 2012.
- [11] R. H. Baughman, A. A. Zakhidov, W. A. de Heer, Carbon Nanotubes – The Route Towards Applications, *Science*, Vol. 297, No. 5582, pp. 787-792, 2002.
- [12] H.W. Kroto, J.R. Heath, S.C. O'Brien, R.F. Curl, R.E. Smalley, C60: Buckminsterfullerene, *Nature*, Vol. 318, No. 6042, pp. 162-163, 1985.
- [13] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991.
- [14] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*, Vol. 39, No. 2, pp. 315-323, 2007.
- [15] C. L. Zhang, H. S. Shen, Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: Prediction from molecular dynamics simulation, *Applied Physics Letter*, Vol. 89, No. 8, pp. 081904-081909, 2006.
- [16] G. R. Shen, Y. T. Cheng, L. N. Tsai, Synthesis and Characterization of Ni-P-CNT Nanocomposite Film for MEMS Applications, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, Vol. 4, No. 5, pp. 539-547, 2005.
- [17] W. Fang, H. Y. Chu, W. K. Hsu, T. W. Cheng, N. H. Tai, Polymer-Reinforced Aligned Multiwalled Carbon Nanotube Composites for Microelectromechanical Systems Applications, *Advanced Materials*, Vol. 17, No. 24, pp. 2987-2992, 2005.
- [18] M. Bandarian, A. Shojaei, A. M. Rashidi, Thermal, mechanical and acoustic damping properties of flexible open-cell polyurethane/multi-walled carbon nanotube foams: Effect of surface functionality of nanotubes, *Polymer International*, Vol. 60, No. 3, pp. 475-482, 2011.
- [19] E. Abdollahzadeh Shahrabaki, A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration of carbon nanotube-reinforced composite plates with various boundary conditions using Ritz method, *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 362-370, 2014.

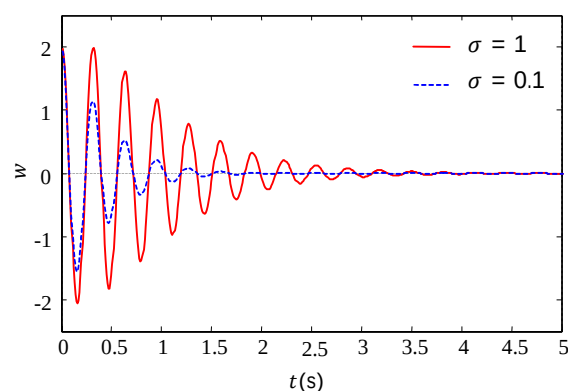


Fig. 11 The Impact of σ on the Response Time History at 0.17 Volume Fraction

شکل 11 تأثیر σ بر روی تاریخچه زمانی پاسخ در کسر حجمی 0.17

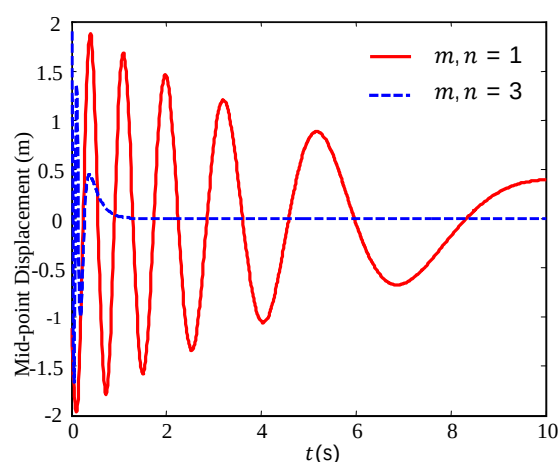


Fig. 12 The Comparison of Movement in the Center of the Plate in the First and Second Modes of Vibration, 0.12 Volume Fraction

شکل 12 مقایسه جابجایی وسط صفحه در حالت‌های مود اول و دوم ارتعاش، کسر حجمی 0.12

است. به عبارت دیگر اگر مدهای بالاتر تحریک شوند، دامنه در آن بسیار سریعتر کاهش می‌یابد و ارتعاشات میرا می‌گردند.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا معادلات ارتعاشات غیرخطی صفحه مستطیل شکل ویسکوالاستیک در حالت همگن استخراج گردید. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده این معادلات، بدون استفاده از تابع تنش و یا جداسازی به روش گلرکین که سبب ایجاد خطا در پاسخ می‌گردد، تحلیل این معادلات انجام شد. سپس ارتعاشات آزاد صفحه فوق مورد بررسی قرار گرفته و حل بسته¹ی فرکانس طبیعی غیرخطی و شکل مدهای غیرخطی صفحه فوق به‌دست آمد. همچنین اثرات ضخامت،

¹ Closed form Solution