مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1395، دوره 16، شماره 6، ص‌ص 29-40

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل فرم بسته ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تکیه‌گاه‌های الاستیک تحت نیروهای غیریکنواخت عمودی و برشی

محمد ملاعلی‌پور

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

بابلسر، صندوق پستی 13534-47416، m.mollaalipour@umz.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 28 بهمن 1394
پذیرش: 12 اردیبهشت 1395
ارائه در سایت: 22 خرداد 1395

کلید واژگان:
حل دقیق
خمش
تنش
لبه الاستیک
ورق هدفمند

چکیده

در این مطالعه یک حل فرم بسته ساده و مؤثر برای تحلیل خمش و تنش ورق‌های دایره‌ای کامل و حلقوی هدفمند با تکیه‌گاه‌های الاستیک، بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول ارائه شده است. بر اساس روند تحلیل ارائه شده، ورق‌های هدفمند تحت نیروهای عمودی و برشی غیریکنواخت به سادگی قابل تحلیل بوده و تمامی مؤلفه‌های تنش محاسبه می‌گردند. نیروهای برشی می‌توانند بر هریک از سطوح رویین و زیرین اعمال شوند. با استفاده از روابط ساختاری تئوری برشی مرتبه اول، تنش‌های برشی عرضی به صورت صحیح قابل دست‌یابی نبوده و به صورت مقداری ثابت در راستای ضخامت استخراج خواهد شد. بنابراین در روند تحلیل پیشنهادی، برای دست‌یابی به مؤلفه تنش‌های عمودی و برشی عرضی از تئوری الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. برای اثبات دقت و کارایی روند پیشنهادی، نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده در مقالات دیگر محققان و نتایج تئوری الاستیسیته سه‌بعدی حاصل از نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش اجزای محدود (به عنوان یکی از دقیق‌ترین روش‌ها) مقایسه گردیده است. مقایسه‌ها نشان می‌دهند که نتایج بدست آمده بسیار دقیق هستند در حالی که از نظر محاسباتی کاملا بهینه‌تر از روش الاستیسیته سه‌بعدی می‌باشد. همچنین شرایط مرزی تنش‌های عمودی و برشی عرضی روی سطوح بالا و پایین ورق به صورت دقیق برقرار شده است. حتی برای ورق‌های تحت بارگذاری‌های پیچیده، وقتی که نیروهای عمودی و برشی غیریکنواخت به صورت همزمان بر سطوح بالا و پایین ورق اعمال می‌شود و شرایط مرزی تنش‌های عرضی روی این سطوح غیر صفر می‌باشد.

Closed-form solution of circular and annular plates with elastic boundary conditions under non-uniform normal and shear loads

Mohammad Molla-Alipour

Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar 47416-13534, Iran
P.O.B. 47416-13534 Babolsar, Iran, m.mollaalipour@umz.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 February 2016
Accepted 01 May 2016
Available Online 11 June 2016

Keywords:
Closed-form Solution
Bending
Stress
Elastic edges
Functionally graded plate

ABSTRACT

In this study, a simple and efficient closed form solution for bending and stress analysis of functionally graded circular and annular plates with elastic boundary conditions is presented based on the first order shear deformation theory (FSDT). By using the presented solution procedure, functionally graded plates subjected to arbitrary non-uniformly distributed normal and shear loads may be analyzed and all of the stresses components can be accurately achieved. Shear loads may be imposed on the top and bottom surfaces of plate. By using the constitutive equations based on the first-order shear deformation theory, the transverse shear stress components cannot be obtained correctly and constant through-the-thickness distributions will be extracted. So, to achieve the transverse normal and shear stress components in the proposed solution procedure, the three dimensional theory of elasticity is applied. To establish the accuracy and efficiency of the proposed approach, the obtained results are compared with other available published results and results of the three-dimensional theory of elasticity extracted from the ABAQUS software based on the finite element method (as the most exact method). Comparisons show that the obtained results are very accurate, while it is computationally much more economic than the three-dimensional elasticity approach. Also, transverse normal and shear stresses boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate are exactly satisfied, even for a complicated loading, when the non-uniform normal and shear loads are imposed simultaneously on the top and bottom surfaces of plate and transverse stresses boundary conditions on these surfaces are non-zero.

1- مقدمه

سازه‌های مدور کاربردهای ویژه‌ای در بیشتر صنایع دارند که می‌توانند به صورت ورق‌های دایره‌ای[1] و حلقوی[2] مدل‌سازی و تحلیل گردند. با توجه به اهمیت این ورق‌ها بعنوان یک جزء پرکاربرد، یافتن روش‌های مناسب و دقیق

[1] Circular
[2] Annular

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Molla-Alipour, Closed-form solution of circular and annular plates with elastic boundary conditions under non-uniform normal and shear loads, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 6, pp. 29-40, 2016 (in Persian)

برای پیش‌بینی رفتار و تحلیل آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در اکثر مطالعات انجام شده، روش‌های مورد استفاده دارای پیچیدگی زیاد و یا محدودیت‌های خاصی برای چگونگی و نوع نیروی اعمال شده، شرایط مرزی و جنس می‌باشد که در ادامه به برخی از آنها اشاره خواهد گردید.

لوو و همکاران [1] خمش ورق دایره‌ای همگن را در حالت متقارن محوری، با استفاده از روش جداسازی متغیرها بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. در مطالعه انجام شده، با توجه به شرایط تقارن ورق، جابجایی درون صفحه‌ای و عرضی ورق به ترتیب توابعی فرد و زوج نسبت به شعاع و بنحوی در نظر گرفته شده‌اند که در معادلات حاکم و شرایط مرزی در سطوح آزاد رویین و زیرین ورق صدق کنند. حل ارائه شده فوق برای ورق همگن، یک حالت خاص شرط مرزی گیردار را برقرار می‌سازد که تنها در لایه میانی اعمال شده است و در بقیه نقاط ضخامت برقرار نمی‌باشد. در مطالعه دیگری که توسط یان و همکاران [2] انجام شده است و مشابهت زیادی با مرجع [1] دارد تغییرات خواص در راستای ضخامت نیز در نظر گفته شده است. این تحلیل نیز که بر اساس الاستیسیته سه بعدی انجام شده است تغییرات مؤلفه‌های جابجایی در راستای شعاعی بر اساس توابع بسل در نظر گرفته شده و تغییرات در راستای عرضی بنحوی محاسبه شود که شرایط مربوط به سطوح رویین و زیرین ورق برقرار گردد. در این مطالعه نیز شرط تکیه‌گاهی تنها در لایه میانی اعمال شده و در بقیه نقاط ضخامت برقرار نیست. نایی و ژانگ [3] با استفاده تئوری الاستیسیته و روش مربعات دیفرانسیل (DQM)[1] به تحلیل خمش ورق‌های دایره‌ای کامل و حلقوی با تغییرات نمایی خواص پرداختند. ردی و همکاران [4] و نثیر و فلاح [5] خمش ورق‌های دایره‌ای هدفمند[2] تحت بارگذاری یکنواخت را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول[3] برسی کردند. علی‌پور و شرعیات [6] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و روش سری‌های توانی[4]، به تحلیل تنشی ورق‌های دایره‌ای هدفمند مستقر بر بستر الاستیک پرداختند. در تحلیل انجام شده ابتدا با فرض پاسخ به صورت سری توانی و سپس جایگذاری در معادله حاکم، یک معادله جبری بازگشتی برای یافتن ضرایب مجهول بدست آمد و در نهایت ضرایب مجهول باقیمانده با اعمال شرایط مرزی محاسبه شد. یانگ و همکاران [7] یک حل تقریبی الاستیسیته برای خمش متقارن ورق دایره‌ای هدفمند تحت بار متمرکز در مرکز ورق ارائه کردند. لاماکچیا و همکاران [8] خمش نامتقارن ورق حلقوی نازک با شرایط مرزی آزاد در مرزهای داخلی و خارجی که گشتاور خمشی به آن اعمال می‌شود را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل مورد بررسی قرار دادند.

از سوی دیگر، ورق‌ها در برخی موارد به سازه‌های دیگری متصل می‌شوند که نمی‌توان شرایط مرزی را به صورت شرایط مرزی ایده‌ال گیردار[5]، ساده[6] و یا آزاد[7] در نظر گرفت. بلکه شرایط واقعی حالتی بین این شرایط مرزی می‌باشند. همچنین در برخی موارد تکیه‌گاه‌های ورق دچار آسیب می‌شوند که استفاده از شرایط مرزی بیان شده به صورت ایده‌ال خطای زیادی خواهد داشت. لذا استفاده از شرایط تکیه‌گاهی الاستیک[8] می‌تواند راه حلی برای در نظر گرفتن گستره وسیعی از شرایط مرزی باشد. با این وجود مطالعات انجام شده بر روی ورق‌هایی با شرایط مرزی الاستیک بسیار اندک بوده و عمدتا به تحلیل‌های ارتعاش آزاد و کمانش محدود می‌شود. از مطالعاتی که بر روی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تکیه‌گاه الاستیک صورت گرفته می‌توان به مقالات بهسکارا رائو و کامسوارا رائو در سال‌های 2013 تا 2015 اشاره کرد که با استفاده از تئوری کلاسیک ورق به تحلیل کمانشی [10,9] و ارتعاش آزاد [12,11] پرداختند.

در این مطالعه یک حل فرم بسته جدید و بسیار مؤثر ارائه شده است تا تحلیل خمشی و تنشی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی هدفمند تحت شرایط تکیه‌گاهی الاستیک قابل دست‌یابی باشند. شرایط تکیه‌گاهی الاستیک توسط فنرهای طولی و پیچشی بنحوی در نظر گرفته شده‌اند تا تمامی حالات شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای داخلی و خارجی ورق قابل اعمال باشند. حل ارائه شده دارای این قابلیت می‌باشد که ورق‌های تحت نیروهای عمودی و برشی غیر یکنواخت را مورد تحلیل قرار دهد. همچنین نیروهای برشی اعمال شده می‌تواند به صورت مجزا و یا همزمان بر هریک از سطوح رویین و زیرین ورق اعمال گردد. برای بررسی صحت و دقت روند ارائه شده، نتایج حاصل از حل دقیق بدست آمده با نتایج حاصل از مطالعات دیگر محققین و همچنین حل الاستیسیته سه بعدی (استخراج شده توسط نرم‌افزار آباکوس[9] با استفاده از حل اجزای محدود) که یکی از دقیق‌ترین روش‌ها می‌باشد مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روند ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار می‌باشد. از سوی دیگر توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت به صورت بسیار دقیق استخراج شده و شرایط مرزی تنش‌های برشی در سطوح رویین و زیرین ورق برای حالتی که نیروی برشی غیریکنواخت روی این سطوح اعمال شود نیز کاملا برقرار می‌گردد.

2- استخراج معادلات حاکم بر ورق

در این قسمت معادلات حاکم بر ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با شرایط تکیه-گاهی الاستیک و تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی و برشی استخراج خواهند شده‌اند. در شکل 1 نمایی از هندسه ورق مورد بررسی به همراه شرایط تکیه‌گاهی و نیروهای اعمالی نشان داده شده است. در این شکل، $K_w^{(i)}$ و $K_w^{(o)}$ ضرایب سفتی تکیه‌گاه در مقابل حرکت عرضی در مرزهای داخلی و خارجی می‌باشند. $K_u^{(i)}$ و $K_u^{(o)}$ ضرایب سفتی تکیه‌گاه در مقابل حرکت طولی مرزهای داخلی و خارجی هستند. $K_\psi^{(i)}$ و $K_\psi^{(o)}$ ضرایب سفتی تکیه‌گاه در مقابل پیچش مرزهای داخلی و خارجی می‌باشند.

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، توابع جابجایی درون صفحه‌ای و عرضی به ترتیب به صورت خطی و ثابت در راستای ضخامت لحاظ می‌شوند [13 و 14]:

$$u = u_0 + z\psi_r \qquad w = w_0 \tag{1}$$

u و w جابجایی‌های شعاعی و عرضی ورق بوده و همچنین u_0 جابجایی لایه میانی و ψ_r چرخش محور عمود بر صفحه می‌باشند.

با توجه به رابطه (1)، مؤلفه‌های کرنش به صورت رابطه (2) قابل بیان می‌باشند:

$$\varepsilon_r = u_{,r} = u_{0,r} + z\psi_{r,r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{u_0 + z\psi_r}{r} \qquad \gamma_{rz} = u_{,z} + w_{,r} = \psi_r + w_{,r} \tag{2}$$

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، مؤلفه‌های تنش در حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (3) بدست خواهند آمد.

[1] Differential Quadrature Method
[2] Functionally Graded (FG) Circular Plates
[3] First order Shear Deformation Theory (FSDT)
[4] Power Series Method
[5] Clamped
[6] Simply-supported
[7] Free
[8] Elastic boundary conditions
[9] Abaqus Software

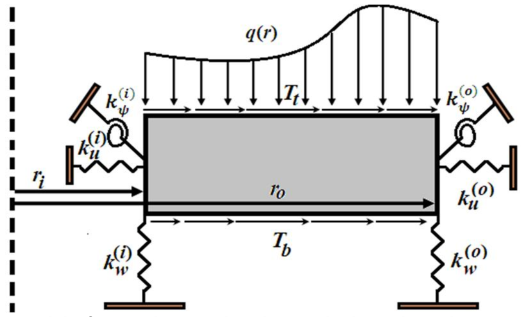


Fig. 1 Model of a circular/annular plate with elastic boundary conditions under non-uniform loads .

شکل 1 مدلی از ورق دایره‌ای یا حلقوی با شرایط تکیه‌گاهی الاستیک تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت

$$\sigma_r = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-v^2}\left[u_{0,r} + v\frac{u_0}{r}\right] + \frac{Ez}{1-v^2}\left[\psi_{r,r} + v\frac{\psi_r}{r}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_\theta + v\varepsilon_r) = \frac{E}{1-v^2}\left[\frac{u_0}{r} + vu_{0,r}\right] + \frac{E_z}{1-v^2}\left[\frac{\psi_r}{r} + v\psi_{r,r}\right]$$

$$\tau_{rz} = k^2\frac{E}{2(1+v)}\gamma_{rz} = k^2\frac{E}{2(1+v)}(\psi_r + w_{,r}) \quad (3)$$

k^2 ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری برشی مرتبه اول جهت بهبود پاسخ‌ها می‌باشد. با توجه به اینکه در تئوری برشی مرتبه اول، تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود، برای بهبود پاسخ‌های بدست آمده توسط این تئوری از ضریب تصحیح برشی استفاده می‌گردد، ضرایب تصحیح مختلفی توسط محققین و با استفاده از روش‌های گوناگون ارائه شده است. رایسنر [15,13] با استفاده از روابط تعادل الاستیسیته و با فرض خطی بودن تنش‌های درون صفحه‌ای در راستای ضخامت، به معادلات حاکم بر تئوری برشی مرتبه اول دست یافت که ضریب تصیح آن $k^2 = 5/6$ می‌باشد. میندلین [16] با استفاده از معادلات فرکانسی موج برشی عرضی بدست آمده از تئوری برشی مرتبه اول و الاستیسیته سه بعدی ضریب تصحیح جدیدی به صورت $k^2 = \pi^2/12$ ارائه کرد. استفن [17] با یافتن فرکانس ارتعاشات ورق با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و مقایسه آن با معادله فرکانسی ریلی-لامب[1] [19,18]، ضریب تصحیح برشی را به صورت $k^2 = 5/(7-v)$ استخراج نمود. مطالعات متعدد دیگری نیز جهت یافتن ضریب تصحیح برشی انجام شده است که به علت محدودیت نمی‌توان به ذکر همه آنها پرداخت. با توجه به اینکه مقادیر ارائه شده اختلاف چندانی با یکدیگر ندارند لذا نتایج بدست آمده با استفاده هر یک از آنها تقریبا یکسان خواهد بود. در این مطالعه، ضریب تصحیح به صورت $k^2 = 5/6$ در نظر گرفته شده است.

معادلات حرکت با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی استخراج می‌شود.

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (4)$$

U انرژی داخلی (کرنشی) و W کار نیروهای خارجی می‌باشند که به صورت روابط (5) و (6) قابل بیان می‌باشند.

$$\delta U = \int\left\{\sigma_r\delta(u_{0,r} + z\psi_{r,r}) + \sigma_\theta\delta\left(\frac{u_0 + z\psi_r}{r}\right) + \tau_{rz}\delta(\psi_r + w_{,r})\right\}dV \quad (5)$$

$$\delta W = \int\left\{q(r)\delta w + [T_t(r) + T_b(r)]\,\delta u_0 + \frac{h}{2}[T_t(r) + T_b(r)]\delta\psi_r\right\}dA \quad (6)$$

$q(r)$ نیروی عمودی می‌باشد، $T_t(r)$ و $T_b(r)$ نیروهایی برشی وارده بر روی سطوح رویین و زیرین ورق می‌باشند که جهت مثبت آنها به سمت مرز خارجی ورق در نظر گرفته شده است. روش ارائه شده در این مقاله دارای این قابلیت است که ورق‌های دایره‌ای و حلقوی تحت نیروهای عمودی و برشی با توزیع غیریکنواخت دلخواه را تحلیل نماید. اما به علت تنوع بسیار زیادی که می‌توان برای نیروها در نظر گرفت که نتایج آن در یک مقاله قابل ارائه نمی‌باشد این توابع به صورت سهمی در نظر گرفته شده‌اند.

$$q(r) = \hat{q}(\lambda_n + \gamma_n r + \xi_n r^2)$$
$$T_t(r) = \widehat{T_t}(\lambda_s^t + \gamma_s^t r + \xi_s^t r^2)$$
$$T_b(r) = \widehat{T_b}(\lambda_s^b + \gamma_s^b r + \xi_s^b r^2) \quad (7)$$

پارامترهای $\hat{q}$، $\widehat{T}_t$، $\widehat{T}_b$، λ، γ و ξ ثوابت دلخواهی هستند که با توجه به چگونگی اعمال نیرو تعیین می‌گردند.

با تبدیل انتگرالگیری روی حجم جسم به دو انتگرال در راستای ضخامت و سطح و سپس انتگرالگیری جزء به جزء از روابط (5) و (6)، انرژی داخلی و کار نیروهای خارجی را می‌توان به صورت دو انتگرال روی حجم و مرز ورق بازنویسی کرد.

$$U = \iint_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{-\left(\sigma_{r,r} + \frac{\sigma_r}{r}\right)\delta(u_0 + z\psi_r) + \frac{\sigma_\theta}{r}\delta(u_0 + z\psi_r) + \tau_{rz}\delta\psi_r - \left(\tau_{rz,r} + \frac{\tau_{rz}}{r}\right)\delta w\right\}dz\,dA + \iint_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{\sigma_r\,\delta(u_0 + z\psi_r) + \tau_{rz}\delta w\}rd\theta dz \quad (8)$$

$$\delta W = \int\left\{q(r)\,\delta w + [T_t(r) + T_b(r)]du_0 + \frac{h}{2}[T_t(r) + T_b(r)]\delta\psi_r\right\}dA \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (8) و (9) در رابطه (4)، انتگرالگیری در راستای ضخامت و نوشتن آن بر اساس منتجه‌های تنش، رابطه (10) بدست خواهد آمد:

$$\int\left\{\left(\frac{N_r - N_\theta}{r} + N_{r,r} + T_t(r) + T_b(r)\right)\delta u_0 + \left[\frac{M_r - M_\theta}{r} + M_{r,r} - Q_r + \frac{h}{2}[T_t(r) - T_b(r)]\right]\delta\psi_r + \left[Q_{r,r} + \frac{Q_r}{r} - q(\lambda + \gamma r + \xi r^2)\right]\delta w\right\}dA - \iint_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{N_r\delta u_0 + M_r\delta\psi_x + Q_r\delta w\}rd\theta\,dz = 0 \quad (10)$$

منتجه‌های تنش به صورت رابطه (11) محاسبه می‌شوند.

$$N_r = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_r dz = A\left(u_{0,r} + \frac{v}{r}u_0\right) + B\left(\psi_{r,r} + \frac{v}{r}\psi_r\right)$$
$$N_\theta = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_\theta dz = A\left(\frac{u_0}{r} + vu_{0,r}\right) + B\left(\frac{\psi_r}{r} + v\psi_{r,r}\right)$$
$$M_r = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_r z dz = B\left(u_{0,r} + \frac{v}{r}u_0\right) + D\left(\psi_{r,r} + \frac{v}{r}\psi_r\right)$$
$$M_\theta = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_\theta z dz = B\left(\frac{u_0}{r} + vu_{0,r}\right) + D\left(\frac{\psi_r}{r} + v\psi_{r,r}\right)$$
$$Q_r = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{rz}dz = k^2\frac{(1-v)}{2}A(\psi_r + w_{,r}) \quad (11)$$

مقادیر A، B و D نیز به صورت رابطه (12) بیان می‌شوند.

[1] Rayleigh-Lamb

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\upsilon^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \tag{12}$$

تغییرات خواص بر اساس قانون توزیع قانون توانی در نظر گرفته شده است.

$$E = (E_c - E_m)V_f(z) + E_m,$$
$$V_f = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^g \tag{13}$$

زیرنویس‌های m و c در رابطه (13) نمایانگر خواص فلز و سرامیک بوده و V_f نیز نسبت حجمی سرامیک می‌باشد.

جهت برقراری رابطه (10) تحت شرایط مختلف انتگرالگیری و جابجایی-های مجازی، ضرایب جابجایی‌های مجازی باید صفر شوند و بر این اساس معادلات حاکم استخراج خواهند شد.

$$\frac{N_r - N_\theta}{r} + N_{r,r} = -T_t(r) - T_b(r)$$
$$\frac{M_r - M_\theta}{r} + M_{r,r} - Q_r = \frac{-h}{2}\big(T_t(r) - T_b(r)\big)$$
$$Q_{r,r} + \frac{Q_r}{r} = q(r) \tag{14}$$

همچنین شرایط مرزی ورق در مرزهای خارجی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی و مرز داخلی ورق حلقوی بر اساس منتجه‌های تنش و ضرایب الاستیک تکیه‌گاه بدست خواهند آمد.

الف) مرز داخلی ($r=r_i$)

$$N_r - k_u^{(i)} u = 0,$$
$$M_r + k_\psi^{(i)} \psi_r = 0,$$
$$Q_r + k_w^{(i)} w = 0 \tag{15}$$

ب) مرز خارجی ($r=r_o$)

$$N_r + k_u^{(o)} u = 0,$$
$$M_r + k_\psi^{(o)} \psi_r = 0,$$
$$Q_r + k_w^{(o)} w = 0 \tag{16}$$

با انتخاب مقادیر مناسب برای سفتی فنرهای طولی و پیچشی می‌توان شرایط تکیه‌گاهی کلاسیک را مدل‌سازی نمود.

الف) شرط مرزی گیردار

$$k_u \to \infty,$$
$$k_\psi \to \infty,$$
$$k_w \to \infty \tag{17}$$

ب) شرط مرزی ساده

$$k_u \to \infty,$$
$$k_\psi = 0,$$
$$k_w \to \infty \tag{18}$$

ج) شرط مرزی غلتکی

$$k_u = 0,$$
$$k_\psi = 0,$$
$$k_w \to \infty \tag{19}$$

د) شرط مرزی آزاد

$$k_u = 0,$$
$$k_\psi = 0,$$
$$k_w = 0 \tag{20}$$

منظور از به سمت بینهایت میل کردن سفتی فنرها، انتخاب این ثوابت به صورت یک عدد بسیار بزرگ است که در قسمت ارائه نتایج تعیین شده است.

3- حل فرم بسته معادلات حاکم بر ورق دایره‌ای کامل و حلقوی

جهت دست‌یابی به مؤلفه های جابجایی باید دستگاه معادلات حاکم حل گردد که در این مقاله روش جدیدی جهت حل دقیق آن ارائه شده است، بدین منظور ابتدا با یک بار انتگرالگیری از رابطه سوم از مجموعه روابط (14)، نیروی برشی عرضی در شعاع‌های مختلف بدست خواهد آمد.

$$Q_r = \hat{q}\left(\lambda_n \frac{r}{2} + \gamma_n \frac{r^2}{3} + \xi_n \frac{r^3}{4}\right) + \frac{c_0}{r} \tag{21}$$

C_0 ثابت انتگرالگیری می‌باشد.

با جایگذاری منتجه‌های تنش بر اساس مؤلفه‌های جابجایی بر اساس رابطه (11) و نیروی برشی بدست آمده بر اساس رابطه (21) در دو رابطه اول از مجموعه روابط (14)، این روابط به صورت روابطی که در ادامه ارائه گردیده، نوشته خواهند شد.

$$A\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_0)\right] + B\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\psi_r)\right]$$
$$= -\hat{T}_t(\lambda_s^t + \gamma_s^t r + \xi_s^t r^2) - \hat{T}_b(\lambda_s^b + \gamma_s^b r + \xi_s^b r^2)$$
$$B\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_0)\right] + D\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\psi_r)\right]$$
$$-\hat{q}\left(\lambda_n \frac{r}{2} + \gamma_n \frac{r^2}{3} + \xi_n \frac{r^3}{4}\right) + \frac{c_0}{r} =$$
$$-\frac{h}{2}\hat{T}_t(\lambda_s^t + \gamma_s^t r + \xi_s^t r^2) + \frac{h}{2}\hat{T}_b(\lambda_s^b + \gamma_s^b r + \xi_s^b r^2) \tag{22}$$

با دو بار انتگرالگیری از رابطه (22)، معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل خواهند شد.

$$Au_0 + B\psi_r = -\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)$$
$$-\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$
$$Bu_0 + D\psi_r = -\frac{h}{2}\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)$$
$$+\frac{h}{2}\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right)$$
$$+\hat{q}\left(\lambda_n \frac{r^3}{16} + \gamma_n \frac{r^4}{45} + \xi_n \frac{r^5}{96}\right) + \frac{C_0}{2} r\left(Ln(r) - \frac{1}{2}\right)$$
$$+C_3 r + \frac{C_4}{r} \tag{23}$$

C_0، C_2، C_3 و C_4 ثوابت انتگرال هستند که از طریق اعمال شرایط مرزی برای u_0 و ψ_r تعیین می‌گردند.

با حل روابط جبری، توابع u_0 و ψ_r محاسبه می‌گردند.

$$u_0 = \frac{B}{B^2 - AD}\left\{-\frac{h}{2}\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)\right.$$
$$+\frac{h}{2}\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right)$$
$$+\hat{q}\left(\lambda_n \frac{r^3}{16} + \gamma_n \frac{r^4}{45} + \xi_n \frac{r^5}{96}\right)$$
$$+\frac{C_0}{2} r\left(Ln(r) - \frac{1}{2}\right) + C_3 r + \frac{C_4}{r}$$
$$-\frac{D}{B}\left[-\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}\right]\right\}$$
$$\psi_r = \frac{A}{AD - B^2}\left\{-\frac{h}{2}\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)\right.$$
$$+\frac{h}{2}\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right)$$
$$+\hat{q}\left(\lambda_n \frac{r^3}{16} + \gamma_n \frac{r^4}{45} + \xi_n \frac{r^5}{96}\right) + \frac{C_0}{2} r\left(Ln(r) - \frac{1}{2}\right)$$
$$+C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{B}{A}\left[-\hat{T}_t\left(\lambda_s^t \frac{r^2}{3} + \gamma_s^t \frac{r^3}{8} + \xi_s^t \frac{r^4}{15}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\hat{T}_b\left(\lambda_s^b \frac{r^2}{3} + \gamma_s^b \frac{r^3}{8} + \xi_s^b \frac{r^4}{15}\right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}\right]\right\} \tag{24}$$

خیز ورق نیز از طریق جایگذاری Q_r و ψ_r از روابط (21) و (24) در آخرین رابطه از مجموعه روابط (11) و انتگرالگیری از آن محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{2}{k^2(1-v)A}\left[\hat{q}\left(\lambda_n\frac{r^2}{4}+\gamma_n\frac{r^3}{9}+\xi_n\frac{r^4}{16}\right) + C_0 r\left(Ln(r)-\frac{1}{2}\right)\right] \\ & -\frac{A}{AD-B^2}\left\{-\frac{h}{2}\hat{T}_t\left(\lambda_s^t\frac{r^3}{9}+\gamma_s^t\frac{r^4}{32}+\xi_s^t\frac{r^5}{75}\right) + \frac{h}{2}\hat{T}_b\left(\lambda_s^b\frac{r^3}{9}+\gamma_s^b\frac{r^4}{32}+\xi_s^b\frac{r^5}{75}\right)\right. \\ & +\hat{q}\left(\lambda_n\frac{r^4}{64}+\gamma_n\frac{r^5}{225}+\xi_n\frac{r^6}{576}\right) + \frac{C_0}{4}r^2(Ln(r)-1)+C_3\frac{r^2}{2}+C_4Ln(r) \\ & -\frac{B}{A}\left[-\hat{T}_t\left(\lambda_s^t\frac{r^3}{9}+\gamma_s^t\frac{r^4}{32}+\xi_s^t\frac{r^5}{75}\right)+C_1\frac{r^2}{2}\right. \\ & \left.\left. -\hat{T}_b\left(\lambda_s^b\frac{r^3}{9}+\gamma_s^b\frac{r^4}{32}+\xi_s^b\frac{r^5}{75}\right)+C_2Ln(r)\right]\right\}+C_5 \end{aligned} \tag{25}$$

بطور کلی با اعمال شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای داخلی و خارجی ورق حلقوی 6 ثابت موجود (C_0 تا C_5) در روابط تعیین می‌گردد و برای ورق دایرای کامل از 3 شرط مربوط به مرز و 3 شرط مربوط به شرایط تقارن ورق در مرکز استفاده می‌شود. با اعمال شرایط مربوط به مرکز ورق دایره‌ای کامل که در آن مقادیر u_0، ψ_r و $w_{,r}$ صفر می‌باشند ثوابت C_0، C_2 و C_4 صفر خواهند بود.

همانطور که قبلا بیان گردید استفاده از روابط تئوری برشی مرتبه اول برای یافتن تنش برشی عرضی موجب می‌شود تا مقادیری ثابت در راستای ضخامت بدست آید که پاسخ مطلوبی نمی‌باشد بنابراین جهت یافتن پاسخ دقیق از روابط الاستیسیته سه‌بعدی استفاده شده است.

در دستگاه مختصات قطبی، رابطه تعادل در راستای شعاعی به صورت رابطه (26) نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=0 \tag{26}$$

با جایگذاری تنش‌های شعاعی (σ_r) و محیطی (σ_θ) از رابطه (3) در رابطه (26)، سپس انتگرالگیری نسبت به z و اعمال شرط تنش برشی روی سطح رویین، تنش برشی عرضی استخراج خواهد گردید.

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = {} & \int_z^{\frac{h}{2}}\left[\frac{E(z)}{1-v^2}\left(u_{0,rr}+\frac{u_{0,r}}{r}-\frac{u_0}{r^2}\right)\right. \\ & \left. +\frac{zE(z)}{1-v^2}\left(\psi_{r,rr}+\frac{\psi_{r,r}}{r}-\frac{\psi_r}{r^2}\right)\right]dz+T_t \end{aligned} \tag{27}$$

پس از محاسبه تنش برشی عرضی، می‌توان با استفاده از روابط تعادل الاستیسیته در راستای عرضی، به تنش عمودی عرضی نیز دست یافت.

در دستگاه مختصات قطبی، رابطه تعادل در راستای عرضی به صورت رابطه (28) نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial(r\,\tau_{rz})}{r\,\partial r}=0 \tag{28}$$

با جایگذاری تنش برشی عرضی (τ_{rz}) از رابطه (26) در رابطه (28)، سپس انتگرالگیری نسبت به z و اعمال شرط تنش عمودی روی سطح رویین، تنش عمودی عرضی بدست خواهد آمد.

$$\sigma_z=\int_z^{h/2}\frac{\partial(r\,\tau_{rz})}{r\,\partial r}dz-q \tag{29}$$

4- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج مربوط به خیز و تنش ورق‌های دایره‌ای و حلقوی تحت شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف ارائه شده است. نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق 0.2 در نظر گرفته شده است. نتایج برای ورق هدفمند تیتانیوم-زیرکونیا ارائه شده است که در g=0 ورقی از جنس فلز خالص حاصل خواهد شد. نسبت مدول یانگ فلز به سرامیک 0.396 بوده و ضرایب پواسون برای فلز و سرامیک 0.288 می‌باشد. توابع جابجایی عرضی و شعاعی ورق توسط رابطه $\bar{w}=(64D_C/\hat{q}b^4)w$ و $\bar{u}=(64D_C/\hat{q}b^4)u$ بی‌بعدسازی شده است. همچنین برای سفتی فنرهای طولی و پیچشی از مقادیر بی‌بعد $K_u=k_u/(bE_C)$، $K_w=k_w/(bE_C)$ و $K_\psi=k_\psi/(b^2E_C)$ استفاده شده است. در این بخش ابتدا نتایج مربوط به ورق دایره‌ای و سپس نتایج مربوط به ورق حلقوی ارائه شده‌اند. برای بررسی دقت و صحت نتایج حاصل از حل ارائه شده، نیاز است تا با نتایج بسیار دقیق و معتبر مقایسه گردد. بدین منظور، نتایج ارائه شده توسط نمودارها با نتایج حاصل از حل الاستیسیته سه‌بعدی که توسط نرم‌افزار آباکوس استخراج گردیده، مقایسه شده است.

4-1- نتایج مربوط به ورق دایره‌ای

ابتدا خیز بی‌بعد مرکز ورق دایره‌ای تحت بارگذاری عمودی یکنواخت و ضرایب الاستیک مختلف تکیه‌گاه در جداول 1 تا 3 ارائه شده و در برخی حالات خاص که شرایط تکیه‌گاهی ایده‌ال حاصل می‌گردد با نتایج حاصل از مطالعات محققین مقایسه گردیده است. در جدول 1 خیز مرکز ورق در حالتی که مقاومت تکیه‌گاه در مقابل پیچش و حرکت طولی بسیار زیاد باشد و مقادیر مختلفی از مقاومت تکیه‌گاه در مقابل حرکت عرضی نشان داده شده است، چنانچه مقاومت تکیه‌گاه در مقابل حرکت عرضی نیز بسیار زیاد باشد تکیه‌گاه گیردار حاصل خواهد گردید که در این حالت با نتایج دیگر محققین مقایسه شده است. در جدول 2 شرایط تکیه‌گاهی به گونه‌ای در نظر گرفته شده است تا تکیه‌گاه در مقابل پیچش و حرکت طولی مقاومتی نداشته باشد و نتایج برای مقادر مختلفی از مقاومت تکیه‌گاه در مقابل حرکت عرضی ارائه شده است. در این حالت چنانچه مقاومت تکیه‌گاه در مقابل حرکت عرضی بسیار زیاد باشد تکیه‌گاه غلتکی حاصل خواهد گردید که در این حالت با نتایج دیگر محققین مقایسه شده است. در جدول 3، خیز ورق برای مقادیر مختلف مقاومت پیچشی تکیه‌گاه و مقاومت بسیار زیاد تکیه‌گاه در مقابل جابجایی عرضی و طولی ارائه شده است. با توجه به اینکه در ورق همگن جابجایی لایه میانی صفر می‌باشد نتایج ورق با شرایط تکیه‌گاهی ساده و غلتکی کاملا مشابه می‌باشد که این نکته در جداول 2 و 3 نیز نشان داده شده است. اثرات مقاومت تکیه‌گاه در مقابل جابجایی‌های طولی و عرضی بر خیز مرکز ورق به صورت شکل‌های سه‌بعدی در شکل 2 نشان داده شده است.

نتایجی که در ادامه ارائه شده‌اند مربوط به ورق هدفمند با تغییرات خطی خواص (g=1) و برای بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی فشاری $q=\hat{q}f(r)$، برشی وارد بر سطح رویین $T_t=\hat{T}_tf(r)$ و یا نیروی برشی وارد بر سطح زیرین $T_b=\hat{T}_bf(r)$ می‌باشد که تابع تغییرات نیروها به صورت $f(r)=1+2r+3r^2$ در نظر گرفته شده است.

در شکل 3 خیز ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار در حالتی تحت بارگذاری‌های عمودی و برشی اعمالی بر سطوح رویین و زیرین قرار دارد ارائه شده است. با توجه به اینکه جهت نیروهای برشی وارد بر سطوح آزاد به سمت خارج ورق در نظر گرفته شده است نیروی برشی وارد بر سطوح رویین و

زیرین به ترتیب سبب بوجود آمدن خیز با علامت‌های مثبت و منفی می‌شود که به دلیل جهت‌های مختلف گشتاورهای خمشی ناشی از این نیروها می‌باشد.

در واقع به علت وجود گشتاور ساعتگرد ناشی از نیروی برشی وارد بر سطح رویین، خیز مثبت (به سمت بالا) توسط این نیرو ایجاد می‌شود. به همین ترتیب، به علت وجود گشتاور پادساعتگرد ناشی از نیروی برشی وارد بر سطح زیرین، خیز منفی (به سمت پایین) توسط این نیرو ایجاد می‌شود.

از سوی دیگر با مقایسه خیز ایجاد شده توسط نیروهای برشی وارد بر سطوح رویین و زیرین می‌توان دریافت که بدون در نظر گرفتن جهت خیز، مقدار خیز ایجاد شده توسط نیروی برشی وارده بر سطح زیرین بزرگتر است، در واقع با توجه به نحوه تغییرات خواص ورق هدفمند، سفتی ورق در سطح رویین بیشتر از سطح زیرین ورق بوده و در نتیجه تار خنثی ورق به سطح

جدول 1 خیز بی‌بعد مرکز ورق دایره‌ای برای $K_\psi^{(o)} = K_u^{(o)} = 1000$ و مقادیر مختلف $K_w^{(o)}$

Table 1 Non-dimensional center deflections of circular plates for $K_\psi^{(o)} = K_u^{(o)} = 1000$ and various $K_w^{(o)}$

g=10^5	g=10	g=2	g=0		$K_w^{(o)}$
1.180	1.333	1.613	2.979	ردی و همکاران [4]	1000
1.1798	1.3330	1.6133	2.9792	نثیر و فلاح [5]	1000
1.1798	1.3330	1.6133	2.9792	حل ارائه شده	1000
1.1821	1.3353	1.6157	2.9816	حل ارائه شده	10
1.2030	1.3562	1.6366	3.0025	حل ارائه شده	1
1.4124	1.5656	1.8460	3.2119	حل ارائه شده	0.1
3.5061	3.6592	3.9396	5.3055	حل ارائه شده	0.01

جدول 2 خیز بی‌بعد مرکز ورق دایره‌ای برای $K_\psi^{(o)} = K_u^{(o)} = 0$ و مقادیر مختلف $K_w^{(o)}$

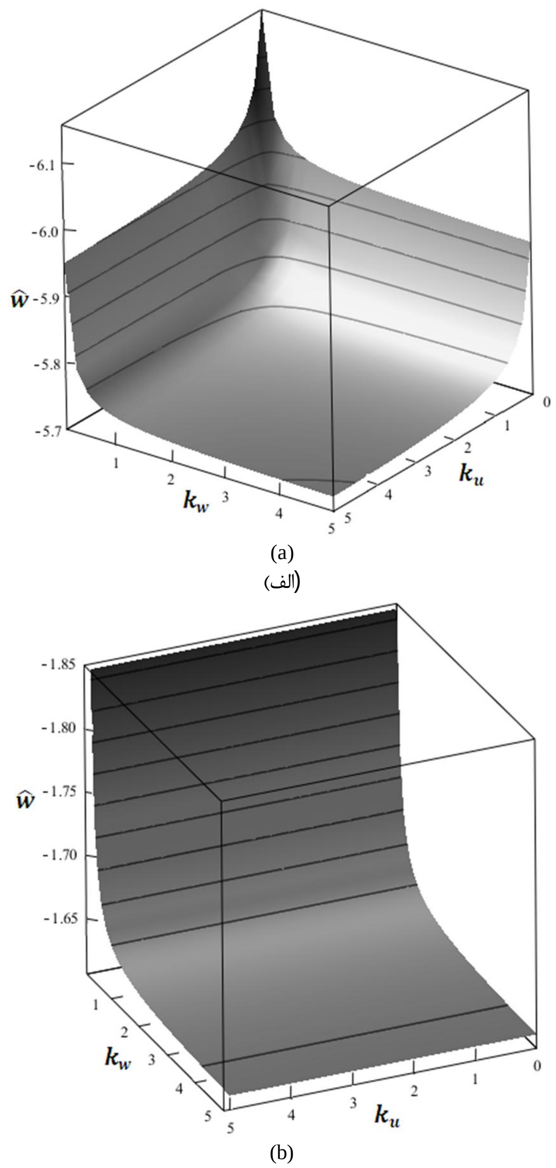
Table 2 Non-dimensional center deflections of circular plates for $K_\psi^{(o)} = K_u^{(o)} = 0$ and various $K_w^{(o)}$

g=10^5	g=10	g=2	g=0		$K_w^{(o)}$
4.285	4.882	5.925	10.822	ردی و همکاران [4]	1000
4.2854	4.8819	5.9247	10.8216	نثیر و فلاح [5]	1000
4.2854	4.8819	5.9247	10.8216	حل ارائه شده	1000
4.2876	4.8842	5.9269	10.8239	حل ارائه شده	10
4.3086	4.9051	5.9479	10.8449	حل ارائه شده	1
4.5180	5.1145	6.1572	11.0542	حل ارائه شده	0.1
6.6117	7.2081	8.2509	13.1479	حل ارائه شده	0.01

جدول 3 خیز بی‌بعد مرکز ورق دایره‌ای برای $K_w^{(o)} = K_u^{(o)} = 1000$ و مقادیر مختلف $K_\psi^{(o)}$

Table 3 Non-dimensional center deflections of circular plates for $K_w^{(o)} = K_u^{(o)} = 1000$ and various $K_\psi^{(o)}$

g=10^5	g=10	g=2	g=0		$K_\psi^{(o)}$
4.285	4.855	5.708	10.822	ردی و همکاران [4]	0
4.2854	4.8551	5.7083	10.8216	نثیر و فلاح [5]	0
4.2854	4.8551	5.7083	10.8216	حل ارائه شده	0
2.6815	2.9258	3.3138	5.1006	حل ارائه شده	0.001
1.4457	1.6016	1.8849	3.2596	حل ارائه شده	0.01
1.2086	1.3618	1.6422	3.0082	حل ارائه شده	0.1
1.1827	1.3359	1.6163	2.9822	حل ارائه شده	1



(b)
(ب)

Fig. 2 Non-dimensional center deflections of circular plates for various $K_w^{(o)}$ and $K_u^{(o)}$ and (a) $K_\psi^{(o)} = 0$ and (b) $K_\psi^{(o)} = 1000$

شکل 2 خیز بی‌بعد مرکز ورق دایره‌ای برای مقادیر مختلف $K_w^{(o)}$ و $K_u^{(o)}$ و (الف) $K_\psi^{(o)} = 0$ و (ب) $K_\psi^{(o)} = 1000$

رویین نزدیکتر است لذا گشتاور ناشی از نیروی برشی وارد بر سطح زیرین بزرگتر از سطح رویین بوده (به علت بازوی بزرگتر) و در نتیجه خیز بزرگتری را سبب می‌شود.

تغییرات عرضی تنش‌های برشی و شعاعی ورق دایره‌ای تحت بارگذاری‌های عمودی فشاری و برشی وارد بر سطح رویین بترتیب در شکل‌های 4 و 5 نشان داده شده است. تنش‌های شعاعی و برشی در این شکل‌ها به ترتیب با تقسیم بر اندازه نیروهای $\hat{q}$ و $\hat{T}_t$ به صورت بی‌بعد ارائه شده‌اند. مقایسه نتایج بدست آمده با حل حاصل از الاستیسیته سه‌بعدی نشان می‌دهد که حل ارائه شده از دقت بسیار بالا برخوردار می‌باشد. همچنین با اعمال شرط مربوط به تنش برشی در سطح رویین، شرط مربوط به سطح زیرین نیز کاملا برقرار می‌گردد. بر اساس این شکل‌ها مشخص است که تنش شعاعی در راستای شعاع ورق تغییر علامت می‌دهد، بدینصورت که مطابق

شکل 4(الف) برای ورق تحت بارگذاری عمودی، تنش شعاعی در نزدیکی سطح رویین از مقادیر منفی (تنش فشاری) در نزدیکی مرکز ورق به مقادیر مثبت (تنش کششی) در مرزها می‌رسد، اما در نزدیکی سطح زیرین این تغییرات مخالف حالت قبل بوده و از مقادیر مثبت در نزدیکی مرکز به مقادیر منفی در مرزها می‌رسد.

همانطوریکه در شکل 3 نشان داده شده است خیز ورق تحت نیروی برشی اعمال شده بر سطح رویین، خلاف جهت خیز ناشی از نیروی عمودی فشاری می‌باشد، که این اختلاف در تنش‌های شعاعی نیز دیده می‌شود، در واقع مطابق شکل 5 (الف) برای ورق تحت نیروی برشی، تنش شعاعی در نزدیکی سطح رویین دارای مقادیر مثبت در نزدیکی مرکز ورق می‌باشد که به مقادیر منفی در مرزها می‌رسد، همچنین این تنش‌ها در نزدیکی سطح زیرین از مقادیر منفی در نزدیکی مرکز ورق به مقادیر مثبت در مرزها می‌رسد.

دلیل تغییرات جهت تنش‌ها در نزدیکی مرکز ورق نسبت به تکیه‌گاه، تغییرات انحنای ورق (تقعر خیز) می‌باشد، از سوی دیگر بر اساس شکل 4(ب)، نمودارهای مربوط به توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق تحت بارگذاری عمودی نشان می‌دهد که جهت آن در راستای ضخامت تغییر نکرده و با افزایش شعاع، مقدار این تنش‌ها نیز افزایش می‌یابد که قابل انتظار نیز می‌باشد، زیرا با افزایش شعاع، مقدار نیروی عمودی بیشتر می‌شود که موجب افزایش تنش برشی عرضی می‌گردد.

در رابطه با توزیع تنش برشی عرضی برای ورق تحت نیروی برشی اعمال شده بر سطح رویین، شکل 5(ب) نشان می‌دهد که مقادیر این تنش‌ها در سطح رویین مثبت بوده که در راستای ضخامت مقدار آن کاهش یافته تا به یک مقدار منفی بیشینه برسد سپس مجددا در سطح آزاد زیرین صفر می‌گردد.

با توجه به نحوه بارگذاری اعمالی که با افزایش شعاع، مقدار نیروی برشی افزایش می‌یابد، مقادیر بیشینه مثبت (اعمال شده بر سطح رویین) و منفی این تنش نیز افزایش یافته است. قابل ذکر است که به علت عدم وجود نیروی عرضی، مقدار نیروی برشی عرضی (برآیند نیروی حاصل از تنش برشی عرضی) نیز باید صفر گردد، لذا تنش‌های مثبت اعمالی از طریق بارگذاری خارجی باید توسط تنش‌های منفی خنثی شود، به همین دلیل افزایش

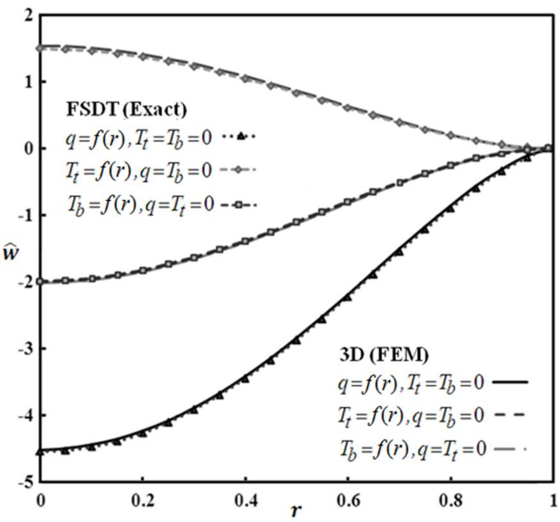
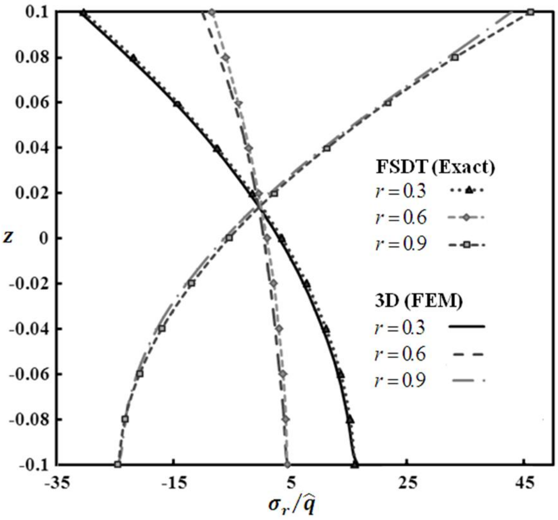


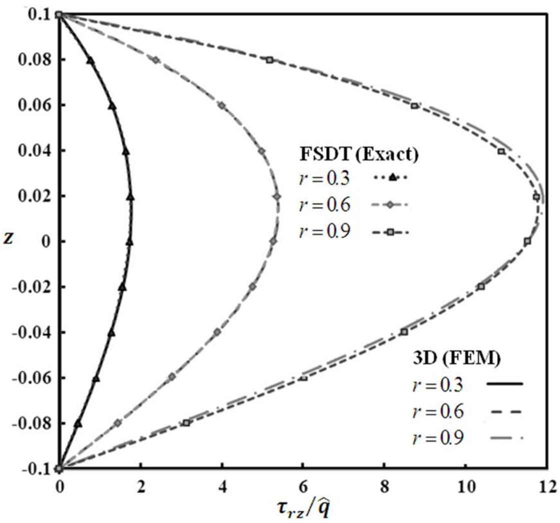
Fig. 3 Deflections of clamped FG circular plate under non-uniform normal and shear loads

شکل 3 خیزهای ورق دایره‌ای هدفمند گیردار تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی و برشی



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 4 Stresses of clamped FG circular plate under non-uniform normal load (a) radial stress and (b) transverse shear stress

شکل 4 تنش‌های ورق دایره‌ای هدفمند گیردار تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت الف) تنش شعاعی و ب) تنش برشی عرضی

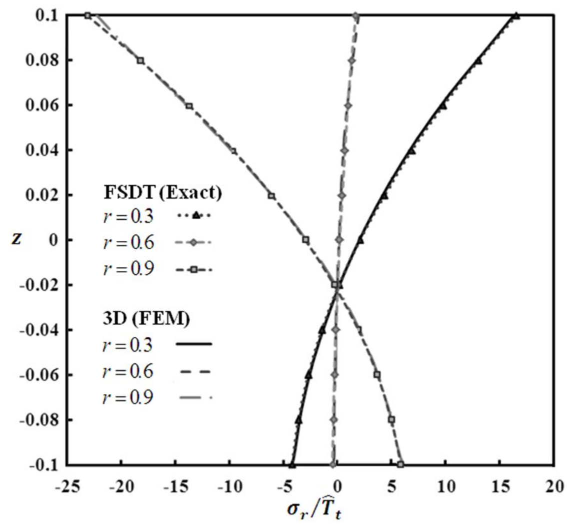
تنش‌برشی مثبت در سطح رویین موجب افزایش مقدار منفی آن نیز می‌گردد.

توزیع تنش قائم عرضی در راستای ضخامت ورق دایره‌ای تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت در شکل 6 نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که حل فرم بسته ارائه شده از دقت بسیار بالا برخوردار بوده و همچنین شرایط مرزی تنش در سطوح آزاد ورق کاملا برقرار می‌گردد.

با توجه به اینکه بر اساس روند ارائه شده تمامی مؤلفه‌های تنش از جمله تنش‌های برشی و قائم عرضی نیز قابل دست‌یابی است. معیار های مختلف آسیب از جمله معیار فن-میسز به سادگی قابل محاسبه می‌باشد.

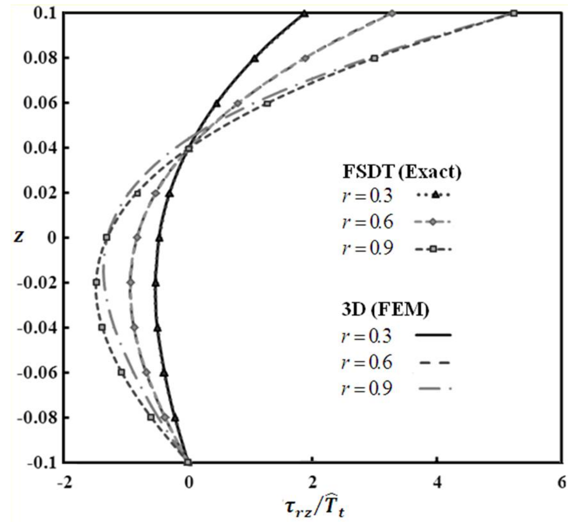
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2+6\tau_{rz}^2}{2}} \qquad (30)$$

از سوی دیگر، براساس حل فرم بسته، تمامی مؤلفه‌های تنش به صورت روابط ساده در دسترس می‌باشد لذا می‌توان به نواحی بحرانی تنش نیز دست یافت.



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 5 Stresses of clamped FG circular plate under non-uniform shear load on the top surface (a) radial stress and (b) transverse shear stress

شکل 5 تنش‌های ورق دایره‌ای هدفمند گیردار تحت بارگذاری برشی غیریکنواخت بر روی سطح رویین الف) تنش عمودی و ب) تنش برشی عرضی

معیار تنش فن-میسز برای ورق تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت، در راستای ضخامت ورق در شکل 7 و همچنین در تمام نقاط ورق به صورت نمایی سه‌بعدی در شکل 8 نشان داده شده‌اند.

با توجه به اینکه سفتی ورق در سطح رویین بیشتر است مشاهده می‌گردد که تنش حداکثر در تکیه‌گاه و در سطح رویین رخ می‌دهد.

4-2- نتایج مربوط به ورق حلقوی

نتایج ارائه شده در این قسمت برای ورق حلقوی با نسبت شعاع داخلی به خارجی 0.2 ارائه شده است. بارگذاری‌های اعمال شده مشابه بخش قبل به صورت غیریکنواخت می‌باشد. خیز ورق حلقوی با تکیه‌گاهای داخلی و خارجی گیردار در حالتی که تحت بارگذاری‌های عمودی و برشی اعمال شده بر سطوح رویین و زیرین قرار دارد در شکل 9 ارائه شده است. مشابه موارد بیان شده برای شکل 3، مقدار خیز ایجاد شده توسط نیروی برشی وارد بر سطح زیرین بزرگتر از خیز ناشی از نیروی برشی وارد بر سطح رویین است.

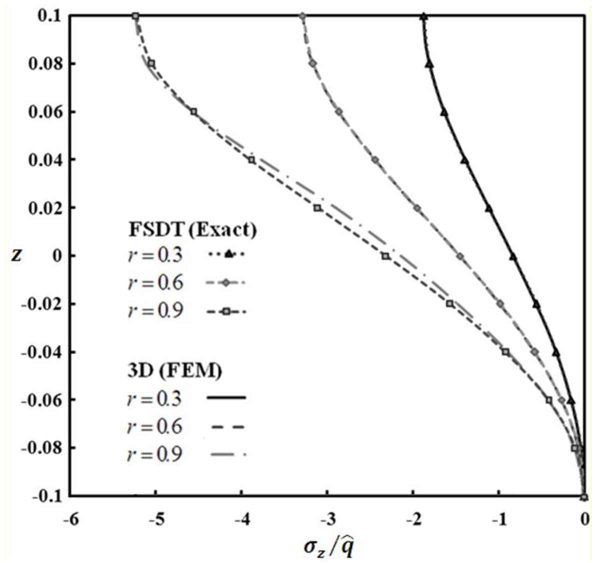


Fig. 6 Transverse normal stress of clamped FG circular plate under non-uniform normal load

شکل 6 تنش قائم عرضی ورق دایره‌ای هدفمند گیردار تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت

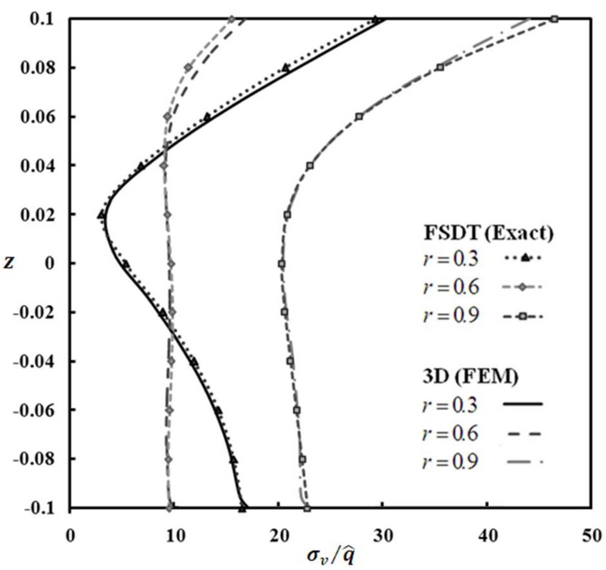


Fig. 7 Through the thickness distribution of the von Mises stress criteria for clamped circular plates under non-uniform normal load

شکل 7 توزیع معیار تنش فن-میسز در راستای ضخامت ورق دایره‌ای گیردار تحت بارگذاری غیریکنواخت عمودی

تغییرات عرضی جابجایی شعاعی و تنش برشی ورق حلقوی تحت بارگذاری عمودی در شکل 10 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که جهت جابجایی‌های شعاعی و همچنین تنش برشی عرضی در راستای شعاع تغییر می‌کند. توزیع عرضی تنش برشی برای بارگذاری برشی اعمال شده بر سطوح رویین و زیرین در شکل 11 و همچنین برای بارگذاری همزمان نیروهای عمودی و برشی در شکل 12 ارائه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که شرایط تنش برشی در سطوح آزاد در تمامی حالات بطور کامل برقرار گردیده و از دقت بسیار بالایی برخوردار است. تحلیل‌هایی که برای تنش‌برشی عرضی در بخش قبل و برای شکل 5(ب) بیان گردید برای شکل 11 نیز معتبر است.

به منظور بررسی دقت حل ارائه شده برای ترکیب‌های مختلف شرایط مرزی، خیز ورق با شرایط مرزی مختلف در مرزهای داخلی و خارجی در

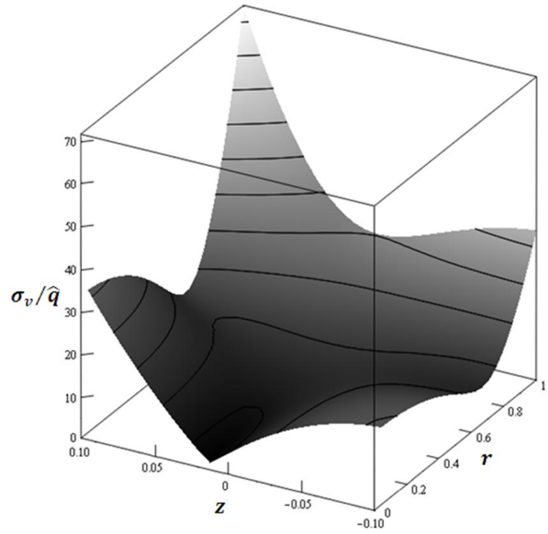


Fig. 8 3D plots for distribution of the von Mises stress criteria for clamped circular plates under non-uniform normal load

شکل 8 نمایی سه‌بعدی از توزیع معیار تنش فن-میسز برای ورق دایره‌ای گیردار تحت بارگذاری غیریکنواخت عمودی

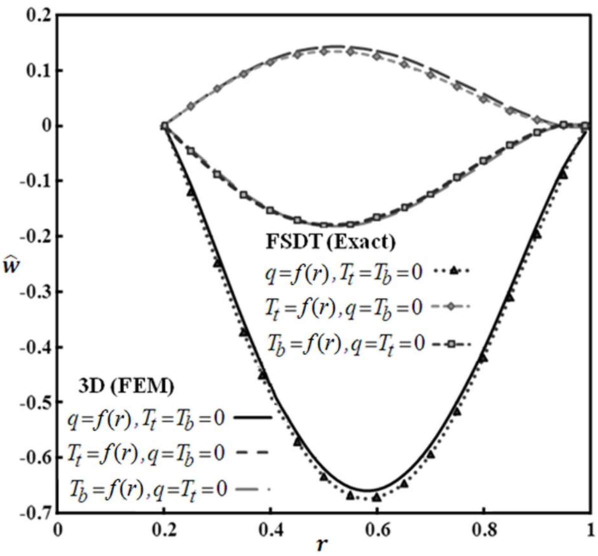


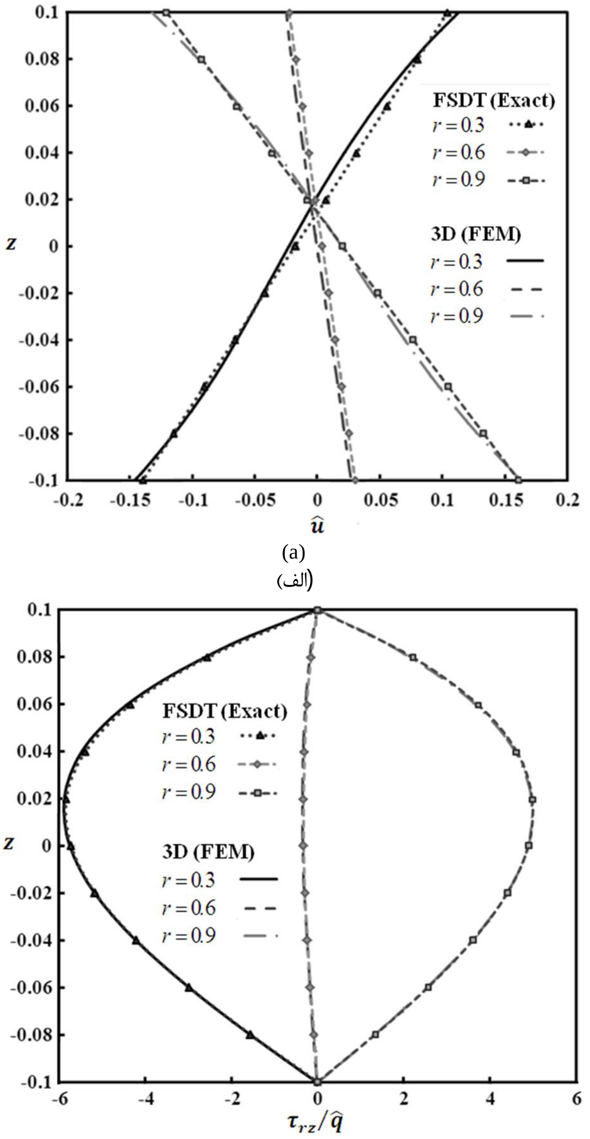
Fig. 9 Deflections of FG annular plate with clamped boundary conditions under non-uniform normal and shear loads

شکل 9 خیزهای ورق حلقوی هدفمند با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی و برشی

شکل‌های 13 و 14 نشان داده شده است. خیز ورق‌حلقوی با شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار در شکل 13، و شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد و آزاد-گیردار در شکل 14 ارائه شده‌اند. شرط تکیه‌گاهی که ابتدا بیان شده است مربوط به مرز داخلی می‌باشد. همانطور که قابل مشاهده است نیروی برشی اعمال شده بر سطح رویین موجب می‌شود تا خیز ورق حلقوی با شرایط مرزی ساده-گیردار و آزاد-گیردار به سمت بالا و خیز ورق گیردار-آزاد به سمت پایین باشد.

جهت خیز ایجاد شده توسط نیروی برشی اعمال شده بر سطح زیرین نیز خلاف جهت خیز ناشی از نیروی برشی اعمال شده بر سطح رویین می‌باشد، که به علت جهت مخالف گشتاورهای اعمالی توسط این نیروها می‌باشد.

همانطور که در شکل 13 مشخص است خیز ورق با شرایط تکیه‌گاهی



(a)
(الف)

(b)
(ب)

Fig. 10 (a) Radial displacement and (b) transverse shear stress of FG annular plate with clamped boundary conditions under non-uniform normal load

شکل 10 الف) جابجایی شعاعی و ب) تنش برشی عرضی ورق حلقوی هدفمند با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت

گیردار-آزاد به مراتب بیشتر از حالت آزاد-گیردار می‌باشد، زیرا محدوده مرز خارجی بیشتر بوده و به همین دلیل بیشتر از مرز داخلی تاثیرگذار است.

نتایج نشان می‌دهد که حل ارائه شده برای ورق تحت انواع شرایط مرزی از دقت بسیار بالایی برخوردار است.

معیار تنش فن-میسز برای ورق حلقوی تحت بارگذاری عمودی غیریکنواخت با تکیه‌گاه‌های داخلی گیردار و خارجی ساده به صورت نمایی سه‌بعدی در شکل 15 نشان داده شده‌اند، همچنین نماهای سه‌بعدی برای شرایط تکیه‌گاهی آزاد-گیردار و گیردار-آزاد در شکل 16 ارائه شده است.

مشاهده می‌گردد که تنش در سطح رویین نسبت به سطح زیرین دارای مقادیر بزرگتری می‌باشند، علت این نکته نیز وجود سفتی بیشتر در سطح رویین می‌باشد، زیرا در مسئله مورد بررسی، سطح رویین از جنس سرامیک و سطح زیرین از جنس فلز است نسبت سفتی فلز به سرامیک 0.396 می‌باشد.

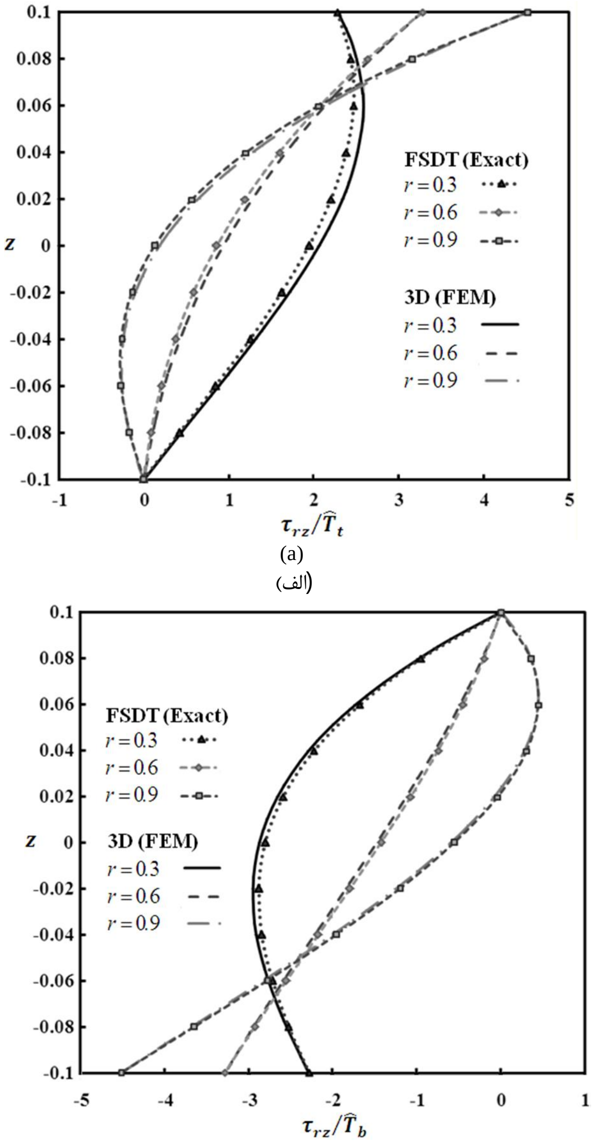


Fig. 11 Transverse shear stresses of FG annular plate with clamped boundary conditions under non-uniform shear load imposed on the (a) top surface and (b) bottom surface

شکل 11 تنش‌های برشی عرضی ورق حلقوی هدفمند با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت بارگذاری برشی غیریکنواخت وارد بر الف) سطح رویین و ب) سطح زیرین

مشاهده می‌گردد که برای ورق با شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار، تنش حداکثر در تکیه‌گاه داخلی (گیردار) رخ می‌دهد، همچنین برای ورق با شرایط تکیه‌گاهی آزاد-گیردار و گیردار-آزاد نیز تنش حداکثر در تکیه‌گاه گیردار بوجود می‌آید، اما به علت کوچکتر بودن ناحیه دارای تکیه‌گاه در ورق گیردار-آزاد نسبت به ورق آزاد-گیردار، تنش بیشینه در ورق گیردار-آزاد دارای مقداری بزرگتر از ورق آزاد-گیردار است.

5- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله یک حل فرم بسته دقیق به صورت بسیار مفید و ساده ارائه شده است تا با صرف هزینه محاسباتی بسیار پایین به تحلیل تنش و خمش ورق‌های دایره‌ای و حلقوی همگن یا هدفمند دست یافت. حل ارائه شده قابلیت تحلیل بارگذاری‌های مختلف عمودی و برشی با توزیع‌های غیریکنواخت را دارا می‌باشد، همچنین نیروی برشی اعمالی بر هر یک از سطوح رویین و زیرین قابل اعمال می‌باشد. با استفاده از حل بسته ارائه شده، تمامی مؤلفه‌های عمودی و برشی تنش، از جمله تنش‌های عمودی و برشی عرضی به صورت ساده قابل محاسبه می‌باشد. از سوی دیگر، حل ارائه شده برای ورق‌هایی با هر شرط مرزی قابل استفاده می‌باشد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که حل ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار است و شرایط تنش‌های عمودی و برشی عرضی روی سطوح آزاد ورق در همه حالات، حتی حالتی که نیروهای عمودی و برشی غیریکنواخت بر هر دو سطح اعمال شده باشد کاملا برقرار می‌گردد.

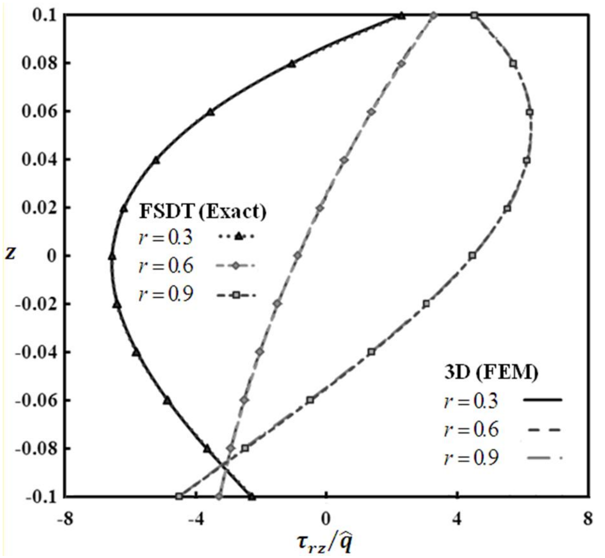


Fig. 12 Transverse shear stress of FG annular plate with clamped boundary conditions under simultaneous non-uniform normal and shear loads on the top and bottom surfaces

شکل 12 تنش برشی عرضی ورق حلقوی هدفمند با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت بارگذاری‌های همزمان عمودی و برشی غیریکنواخت وارده بر سطوح رویین و زیرین

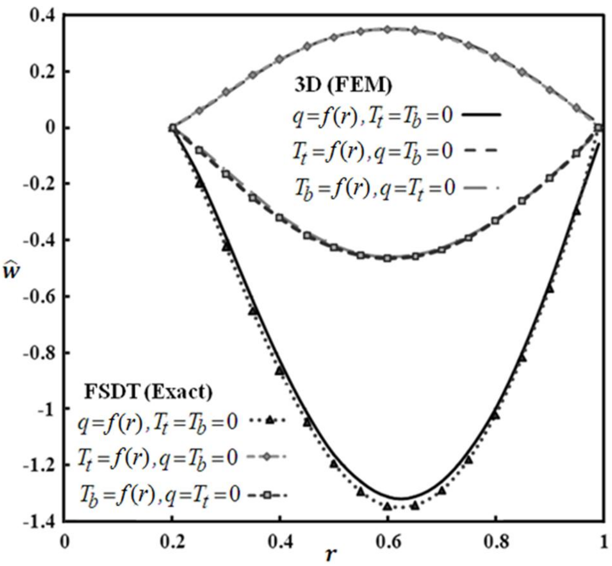
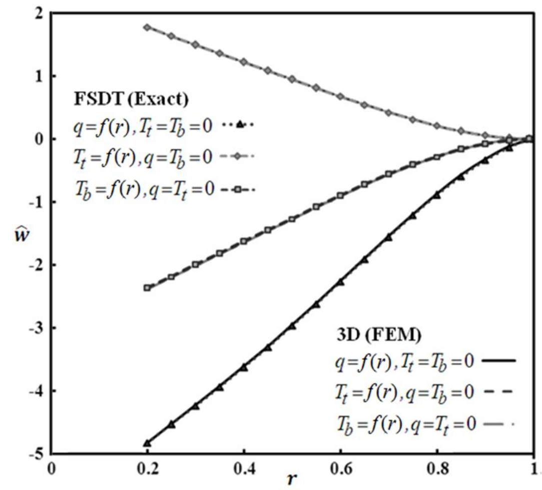


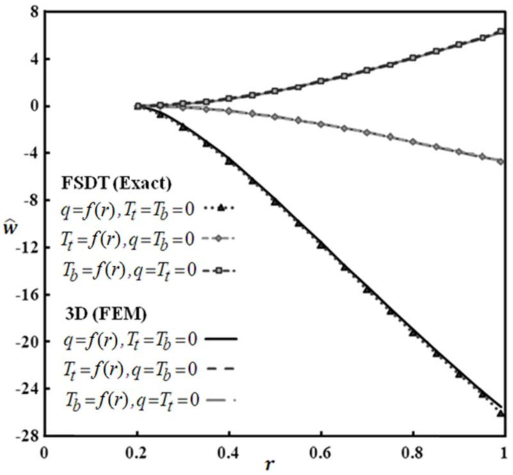
Fig. 13 Deflections of FG annular plate with clamped-simply supported boundary conditions under non-uniform normal and shear loads

شکل 13 خیزهای ورق حلقوی هدفمند با شرایط مرزی گیردار-ساده تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی و برشی



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 14 Deflections of FG annular plate under non-uniform normal and shear loads with (a) free-clamped and (b) clamped-free boundary conditions

شکل 14 خیزهای ورق حلقوی هدفمند تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عمودی و برشی و با شرایط مرزی (الف) آزاد-گیردار و (ب) گیردار-آزاد

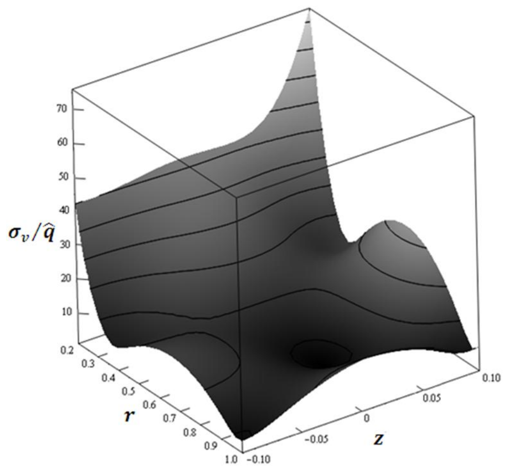
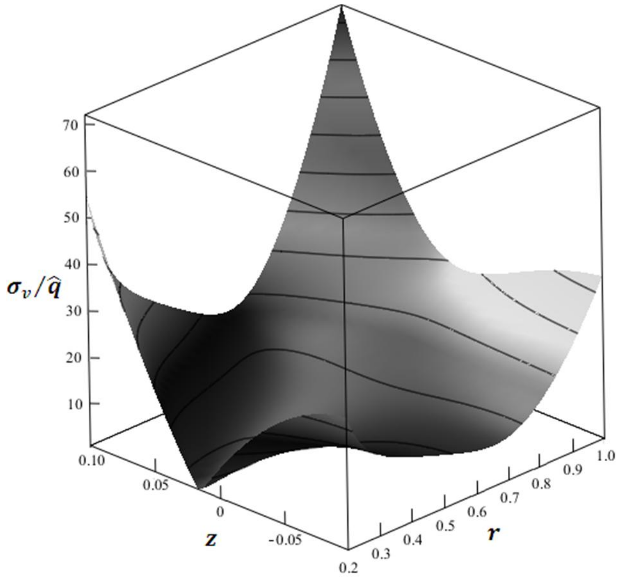


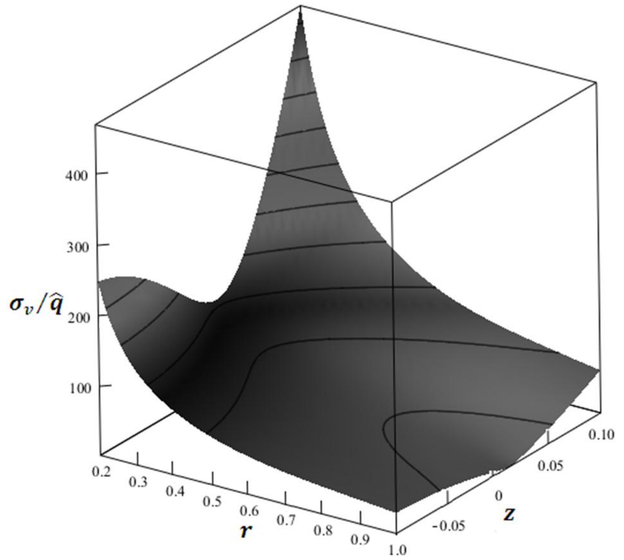
Fig. 15 3D plots for distribution of the von Mises stress criteria for clamped-simply supported annular plate under non-uniform normal load

شکل 15 نمایی سه‌بعدی از توزیع معیار تنش فن-میسز برای ورق حلقوی ساده-گیردار تحت بارگذاری غیریکنواخت عمودی



(a)

(الف)



(b)

(ب)

Fig. 16 3D plots for distribution of the von Mises stress criteria for annular plate under non-uniform normal load with (a) free-clamped and (b) clamped-free boundary conditions

شکل 16 نمایی سه‌بعدی از توزیع معیار تنش فن-میسز برای ورق حلقوی تحت بارگذاری غیریکنواخت عمودی (الف) آزاد-گیردار و (ب) گیردار-آزاد

6- مراجع

[1] J. Z. Luo, T. G. Liu, T. Zhang, Three-dimensional linear analysis for composite axially symmetrical circular plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3689–3706, 2004.

[2] W. Yun, X. Rongqiao, D. Haojiang, Three-dimensional solution of axisymmetric bending of functionally graded circular plates, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, pp. 1683-1693, 2010.

[3] G. Nie, Z. Zhong, Axisymmetric bending of two-directional functionally graded circular and annular plates, *Acta Mechanica Solida Sinic*a, Vol. 20, No. 4, pp. 289-295, 2007.

[4] J. N. Reddy, C. M. Wang, S. Kitipornchai, Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 18, No. 2, pp. 185-199, 1999.

[5] A. Nosier, F. Fallah, , Reformulation of Mindlin–Reissner governing equations of functionally graded circular plates, *Acta Mechanica*, Vol. 198, No. 3, pp. 209-233, 2008.

[6] M. M. Alipour, M. Shariyat, Stress analysis of two-directional FGM moderately mhick constrained circular plates with non-uniform load and substrate stiffness distributions, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 2,No. 4, pp.

316-331, 2010.
[7] B. Yang, W. Q. Chen, H. J. Ding, Approximate elasticity solutions for functionally graded circular plates subject to a concentrated force at the center, *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 19, No. 3, pp. 277–288, 2014.
[8] E. Lamacchia, A. Pirrera, I. V. Chenchiah, P. M. Weaver, Non-axisymmetric bending of thin annular plates due to circumferentially distributed moments, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 3-4, pp. 622–632, 2014.
[9] L. B. Rao, C. K. Rao, Fundamental buckling of circular plates with elastically restrained edges and resting on concentric rigid ring support, *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 291-297, 2013.
[10] L. B. Rao, C. K. Rao, Buckling of circular plate with foundation and elastic edge, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 11, No.2, pp. 149-156, 2015.
[11] L. B. Rao, C. K. Rao, Frequencies of circular plate with concentric ring and elastic edge support, *Frontiers of Mechanical Engineering* ,Vol. 9, No. 2, pp. 168-176, 2014.
[12] L. B. Rao, C. K. Rao, Frequency analysis of annular plates with inner and outer edges elastically restrained and resting on Winkler foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 81, No. 4, pp. 184-194, 2014.
[13] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bendingof elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 1, pp. 69–76, 1945.
[14] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear in flexuralmotions of isotropic elastic plates,*ASME Journal of Applied Mechanics*,Vol. 18, No. 1, pp. 1031–1036, 1951.
[15] E. Reissner, On the theory of bending of elastic plates, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 23, No.1, pp. 184-191, 1944.
[16] R. D. Mindlin, A. Schacknow, H. Deresiewisz, Transactions of the American society of mechanical engineers, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 23, No. 3, pp. 430-436, 1956.
[17] N. G. Stephen, Mindlin plate theory: Best shear coefficient and higher spectra validity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 202, No. 4, pp. 539-553, 1997.
[18] L. Rayleigh, On the free vibrations of an infinite plate of homogenous elastic material, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 20, No. 1, pp. 225-234, 1889.
[19] H. Lamb, On waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society Series A*, Vol. 93, No. 648, pp. 114-128, 1917.