



بررسی پسا کمانش ورق های کامپوزیتی مستطیلی به روش تجميع نقاط و توابع لژاندر

سید امیر مهدی قنادیپور^{1*}، محمدعلی مهرپویا²، پیام کیانی³

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

*تهران، صندوق پستی 1983963113، a_ghannadpour@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 دی 1394

پذیرش: 20 اسفند 1394

ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:

پس از کمانش

تئوری کلاسیک صفحات کامپوزیتی

توابع لژاندر

روش بدون المان

تجميع نقاط

چکیده

در این مقاله با استفاده از روش بدون المان تجميع نقاط به بررسی رفتار غیرخطی پس از کمانش صفحات کامپوزیتی پرداخته شده است. روش بدون المان یکی از روش های عددی مورد توجه در یکی دو دهه اخیر بوده است. در این روش دامنه مسئله با توزیع نقاط یکنواخت و یا غیریکنواخت نمایش داده می شود. ولیکن به دلیل نوسانات شدید در شرایط مرزی و وقوع پدیده رانگ در صورت استفاده از نقاط یکنواخت، در تحقیق حاضر دامنه مسئله با نقاط لژاندر-گوس-لوباتو گسسته سازی شده است. در مقاله حاضر از شرایط مرزی خارج صفحه ای گوناگون با لایه چینی های متعامد و زاویه ای پادمتقارن و همین طور تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده شده است. در روش مذکور، از سری لژاندر جهت گسسته سازی معادلات دیفرانسیلی و شرایط مرزی بمنظور میدان های جابجایی تخمینی استفاده می شود. به علت تغییر شکل های بزرگ و وجود ترم های غیرخطی در روابط کرنش-جابجایی و همچنین ترم های غیرخطی ناشی از ضرب میدان های جابجایی معادلات نهایی حاصل از گسسته سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می دهند که برای حل دستگاه معادلات غیرخطی از تکنیک نیوتن-رافسون استفاده شده است. در این روش همواره تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است و از آن جا که تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر می باشد از روش حناقل مربعات برای حل دستگاه معادلات استفاده خواهد شد. نتایج گوناگون تا حد امکان با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده اند.

Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions

Seyed Amir Mahdi Ghannadpour^{1*}, Mohammad Ali Mehrpouya², Payam Kiani¹

1-New Technologies and Engineering Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2-Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

*P.O.B. 1983963113, Tehran, Iran, a_ghannadpour@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 January 2016
Accepted 10 March 2016
Available Online 16 April 2016

Keywords:
Post-buckling
Classical laminated plate theory
Legendre polynomials
Mesh-free method
Collocation

ABSTRACT

In this paper, mesh-free method is used to analyze post-buckling behavior of laminated plates. One of the most common powerful numerical methods in recent decades is mesh-free collocation method. Due to sharp fluctuations in the boundary conditions and the occurrence of Runge phenomenon in the case of the uniform points, in the present study the issue is discretized with Legendre-gauss-lobatto nodes. In this paper, using classical laminated plate theory and different out-of-plane boundary conditions with anti-symmetric cross-ply and angle-ply laminates is investigated. Equations system is introduced by discretizing von-Karman's compatibility equations and boundary conditions with finite Legendre basis functions that are substituted into displacement fields. Because of large deformations and nonlinear terms in the strain - displacement relations and nonlinear terms by multiplying variables in the equilibrium equations, the nonlinear system of equations is solved by using Newton-Raphson technique. Since number of equations is always more than the number of unknown parameters, the least square technique is used to solve the system of equations. Some results are obtained and compared with those available in the literature.

1- مقدمه

برابر خوردگی، خواص عایق حرارتی خوب و هزینه کمتر و صرفه جویی اقتصادی از اهمیت ویژه ای برخوردارند. این سازه ها اغلب تحت نیروی فشاری درون صفحه ای قرار می گیرند. در بسیاری از موارد جهت بهینه سازی وزن، اجازه تحمل بارهای بیش تر از کمانش به سازه داده می شود. بنابراین تحلیل رفتار پس از کمانش سازه های کامپوزیتی اهمیت می یابد. تحلیل پس از کمانش صفحات سازه ای یک آنالیز غیرخطی محسوب می شود. ویژگی

استفاده از سازه های کامپوزیتی و ساندویچی به بخش قابل توجه و پرکاربردی در بسیاری از حوزه های مهندسی از جمله هوافضا، خودروسازی، زیردریایی ها و حتی در شاخه های نظامی و ورزشی تبدیل شده اند. امروزه سازه های کامپوزیتی به دلیل انعطاف پذیری در بهبود خواص مدنظر طراحان و همچنین ویژگی های مهمی از جمله استحکام بالا در کنار وزن پایین، مقاومت بالا در

Please cite this article using:

S. A. M. Ghannadpour, M. A. Mehrpouya, P. Kiani, Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 213-220, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مجهول و حل دستگاه غیرخطی از تکنیک نیوتن رافسون⁸ استفاده شده و از آنجا که تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است از روش حداقل مربعات⁹ برای حل دستگاه استفاده خواهد شد. نتایج به دست آمده از این شیوه تا حد امکان با نتایج حاصل از روش های دیگر مقایسه شده است.

2- استخراج معادلات

شکل 1 یک صفحه مستطیلی بزرگ شده دلخواه را نشان می دهد که دستگاه مختصات روی مرکز و در صفحه میانی آن لحاظ شده است. با این فرض که نسبت ضخامت به طول اضلاع صفحه بسیار کوچک است، می توان از تنش-های برشی در جهت ضخامت صفحه صرف نظر کرد. با توجه به این فرض، برای استخراج معادلات تعادل صفحه می توان از تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده کرد.

با در نظر گرفتن فرضیات تنش صفحه ای، رابطه تنش- کرنش براساس تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک برای یک ماده کامپوزیتی متشکل از چندلایه به صورت رابطه (1) است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن $\bar{Q}_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ ضرایب سفتی انتقال یافته کاهش یافته¹⁰ نامیده می شوند. با انتگرال گیری از تنش های معادله ی (1) در جهت ضخامت می توان نیرو و ممان های معادل را به ترتیب روابط (2) و (3) به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3)$$

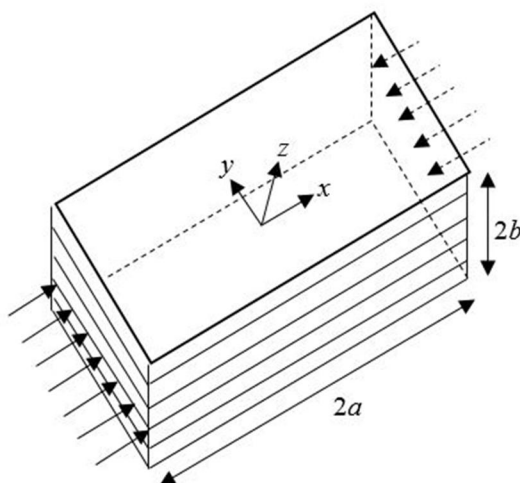


Fig. 1 A rectangular laminated plates

شکل 1 یک صفحه کامپوزیتی مستطیلی

غیرخطی، ناشی از تغییر شکل های بزرگ خارج صفحه ای می باشد که به عنوان ترم های غیرخطی در رابطه ی کرنش- جابجایی آورده می شود. لذا استفاده از روش های عددی به عنوان یکی از ابزارهای کارآمد در تحلیل این گونه سازه ها مورد توجه می باشد. استفاده از روش های عددی رایج مانند المان محدود¹ و تفاضل محدود² از جمله ی آن ها می باشند. ولیکن به دلیل هزینه بر بودن این- گونه روش ها در شبکه بندی مسئله و همین طور نیاز به شبکه بندی مجددی که در مسائلی مانند رشد ترک، با افزایش طول ترک و تغییر شرایط احساس می شود، توجه محققین به روش های بدون المان³ معطوف شده است. مهم ترین ویژگی روش های بدون المان تقریب های حل عددی معادلات دیفرانسیل، نه با تعریف المان و روابط پیوستگی مربوط به آن ها بلکه با عبور توابع پایه از میان نقاط یکنواخت یا غیر یکنواخت می باشد که این نقاط دامنه مسأله مورد نظر را شبیه سازی می کنند.

واضح است که صفحات بعد از نقطه ی کمانش ممکن است بارهای بالاتری را متحمل شوند و این مسئله توجه محققین را به بررسی رفتار پس از کمانش صفحات معطوف کرده است. در این مقاله روش بدون المان جهت بررسی صفحات کامپوزیتی با لایه چینی های متعامد و زاویه ای پادمتقارن تحت کوتاه شدگی انتهایی با شرایط مرزی گوناگون خارج صفحه ای و درون صفحه ای در نظر گرفته شده است. ساده ترین تئوری صفحات، تئوری کلاسیک⁴ می باشد، که کرنش های برشی را در جهت ضخامت در نظر نمی گیرد، بنابراین روشی مطمئن برای پیش بینی رفتار صفحات نازک به حساب می آید. تعدادی از حل های پایه ای و ابتدایی برای خیزهای کوچک و بزرگ توسط ردی و چیا ارائه شده است [2,1]. روش المان محدود یکی از روش های بسیار پر کاربرد در حوزه مهندسی بوده است. تحقیقات زیادی در بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی با کمک روش المان محدود انجام شده است [3-7]. یکی دیگر از روش های عددی مورد توجه، روش نوار محدود⁵ می باشد که قنادپور و اوپسی جهت پیش بینی رفتار پس از کمانش صفحات ایزوتروپ و کامپوزیتی و همچنین سازه های صفحه ای به توسعه این روش در سال های اخیر پرداخته اند [8-10]. در تحقیقات دیگر آن ها رفتار غیرخطی مقاطع C شکل و جعبه ای با افزودن ترم های هارمونیک متناظر با شکل مدهای کمانش، مورد بررسی قرار گرفت [11,12]. روش مربع دیفرانسیلی⁶ نیز یکی دیگر از روش های عددی است که با استفاده از گسسته سازی فرم قوی معادلات دیفرانسیلی به تحلیل غیرخطی مسائل پرداخته است [13-16]. روش بدون المان در سال های اخیر در حوزه مسائل سیالاتی و سازه ای بسیار پر کاربرد بوده است [17-20]. به طور کلی در بین تمام روش های بدون المان به کار رفته روش های مبتنی بر فرم ضعیف شده از دقت بالاتری برخوردارند. کانسا [21] به گسترش حل فرم قوی معادلات دیفرانسیلی جزیی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی و روش بدون المان تجميع نقاط⁷ پرداخت. مرور کلی بر کارهای انجام شده در حوزه روش های بدون المان تا سال 2011 در مقاله لیو [23] مشاهده می شود.

در تحقیق حاضر معادلات نهایی حاصل از گسسته سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می دهند که همواره در آن تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است. جهت تحصیل ضرایب

- 1- Finite element method
- 2- Finite difference method
- 3- Mesh-free methods
- 4- CPT
- 5- Finite strip method
- 6- Differential quadrature method
- 7- Collocation

8- Newton-Raphson

9- Least-squares method

10- Transformed reduced stiffness coefficients

میدان های جابجایی تعریف شده در معادلات با استفاده از توابع پایه لژاندر تخمین زده می شوند. سری لژاندر یکی از سری های قدرتمند ریاضیاتی است. به منظور حل معادلات تعادل با شرایط مرزی انتخاب شده ابتدا این معادلات با استفاده از توابع پایه گسسته سازی می شوند. رابطه بازگشتی لژاندر برای یک بعد و در جهت x به صورت زیر نوشته می شود و برای جهت y نیز به صورت مشابه به دست می آید:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x \quad (7)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (8)$$

به منظور استفاده از توابع لژاندر در بازه $x \in [-a, a]$ باید x به فرم بی بعد $\frac{x}{a}$ تغییر داده شود بنابراین $P(x)$ به صورت زیر نمایش داده می شود

$$P_i(x) \rightarrow P_i\left(\frac{x}{a}\right) \quad (9)$$

با توجه به مطالب فوق می توان میدان های جابجایی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$u_0 = -\varepsilon x + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (10)$$

$$v_0 = \varepsilon \alpha y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (11)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (12)$$

که ε کوتاه شدگی انتهایی وارد بر لبه های صفحه می باشد و α پارامتری است که اثرات ضریب پواسن در آن مشاهده می شود. α^u و α^v و α^w ضرایب مجهول میدان های جابجایی می باشند که از حل دستگاه معادلات به دست می آیند [24,8]. به عنوان نمونه اولین معادله تعادل که در رابطه (5) نیز آورده شده است، با استفاده از میدان های جابجایی دوباره بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u \left(A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v \left(A_{12} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + A_{66} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i'=1}^{n'} \sum_{j'=1}^{m'} \alpha_i^w \alpha_j^w \alpha_{i'}^w \alpha_{j'}^w \\ & \left(A_{11} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & + A_{12} \frac{\partial}{\partial x} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + A_{66} \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial x} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \left. \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w \left(B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + 3B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

میدان های جابجایی در کل صفحه با در نظر گرفتن تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک و فرضیات فن-کارمن، به کار گرفته شده اند. بدین ترتیب معادلات تعادل یک صفحه به صورت زیر به دست می آید [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ & \quad + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

در معادلات بالا M و N به ترتیب نشان دهنده ی ممان ها و نیروهای منته می باشند که پیش تر در روابط (2) و (3) تعریف شدند.

بنابراین می توان معادلات حاکم را به فرم های ساده تری نوشت که در این مقاله معادله اول بر حسب میدان های جابجایی نمایش داده شده است و معادلات دوم و سوم نیز به همین صورت به دست می آیند.

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right) \\ & \quad + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ & \quad + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ & \quad - B_{11} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\ & \quad - 3B_{16} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ & \quad - B_{26} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

مولفه های ماتریس های B, D, A که به ترتیب ماتریس سفتی محوری، ماتریس سفتی خمشی و ماتریس کوپلینگ سفتی محوری-خمشی نامیده می شوند، به صورت رابطه (6) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} & A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \\ & B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ & D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (6)$$

به دلیل لایه چینی صفحات کامپوزیتی به صورت متعامد و زاویه ای پادمتقارن بجز ترم های $B_{16}, B_{26}, B_{11}, B_{22}$ دیگر ترم های ماتریس کوپلینگ سفتی محوری-خمشی صفر می باشند. همچنین ترم های $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$ از ماتریس های سفتی محوری و سفتی خمشی در معادلات نیز حذف شده اند.

3- فرآیند حل معادلات حاکم

تابع درونیاب در مسائل مقدارمرزی در نزدیکی مرزها دارای نوسانات شدیدی می‌شود و همین مسئله دقت و همگرایی مسئله را دچار مشکل می‌کند. به بیان دیگر اگر درونیابی لژاندر برای نقاط با فواصل یکسان انجام شود این مسئله به ذهن می‌آید که آیا مقدار باقیمانده¹ $E_N(x) = f(x) - P_N(x)$ در شرایطی که N افزایش می‌یابد به سمت صفر میل می‌کند؟ (N تعداد ترم‌های چندجمله‌ای لژاندر می‌باشد)، باید گفت برای توابعی نظیر $\sin(x)$ یا $\exp(x)$ که همه مشتقات دارای مقدار ثابتی از کران می‌باشد جواب سوال مثبت است ولی در کل جواب سوال خیر است چرا که به عنوان مثال درخصوص تابعی مانند $f(x) = 1/1 + x^2$ ماکزیمم مقدار باقیمانده هنگامی که تعداد جملات افزایش می‌یابد، بزرگ می‌شود که به این پدیده رانگ² گفته می‌شود. به طوری که اگر چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه 10 باشد و از نقاط با فواصل یکنواخت عبور کند دارای نوسانات بزرگی در انتهای بازه‌ها می‌شود و هرچه تعداد نقاط افزایش یابد این نوسانات شدیدتر خواهد شد حال اگر از نقاط چپیشو یا لژاندر برای درونیابی استفاده شود دیگر این نوسانات به وجود نخواهد آمد و با افزایش تعداد جملات و نقاط مقدار باقیمانده به سمت صفر میل می‌کند.

در صورتی که معادلات و شرایط مرزی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر گسسته‌سازی شوند، یک دستگاه معادلات غیرخطی ایجاد می‌شود که ترم‌های غیرخطی در نتیجه ضرب متغیرها، در معادلات تعادل حاکم بر صفحه به وجود می‌آیند. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی، از تکنیک نیوتن-رافسون استفاده می‌شود.

دستگاه غیرخطی مذکور توسط تکنیک نیوتن-رافسون به یک دستگاه خطی به شکل $Ax = b$ تبدیل می‌گردد که برای یافتن پاسخی با دقت مناسب لازم است تا از یک تکنیک تکرارشونده استفاده گردد. باید توجه داشت که در این دستگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است، در این حالت دستگاه دارای پاسخ یکتا نیست، لذا، به منظور یافتن یک پاسخ سازگار با دستگاه از تکنیک حداقل مربعات استفاده شده است. روند تکراری تا زمانی که حد خطای در نظر گرفته شده برای روابط (17) و (18) اقلان شود، ادامه پیدا می‌کند.

$$\sqrt{\frac{\sum \Delta d_i^2}{\sum d_{i+1}^2}} < 5 \times 10^{-4} \quad (17)$$

$$F(d_i) \leq 5 \times 10^{-4} \quad (18)$$

رابطه (17) مربوط به اقلان حد خطای درجات آزادی مسئله می‌باشد و رابطه (18) مربوط به اقلان حد خطای معادلات گسسته‌سازی شده در نقاط درون دامنه و روی مرز می‌باشد.

به منظور محاسبه میانگین نیروی طولی، لازم است تا انتگرال تنش منتجه غشایی وارد بر کل صفحه محاسبه شود:

$$N_{av} = \frac{\int_{-a}^a \int_{-b}^b N_{xx}(x, y) dx dy}{2a} \quad (19)$$

برای به دست آوردن نیرو و ممان‌های منتجه لازم است تا دو دسته کمیت تعیین شود. دسته اول کمیت‌های مربوط به ماده است که از اطلاعات صفحات کامپوزیتی به دست می‌آید. دومین دسته کمیت‌های مورد نیاز کرنش در هر نقطه است. به منظور محاسبه کرنش‌ها در هر نقطه لازم است تا میدان‌های جابجایی تعیین گردند.

دیگر معادلات دیفرانسیلی حاکم و معادلات شرایط مرزی نیز به همین صورت گسسته‌سازی می‌شوند. در کنار ترم‌های سری لژاندر برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر صفحه از آن‌جا که روش حل بر پایه روش تجميع نقاط می‌باشد باید معادلات گسسته‌سازی شده در نقاط توزیع شده در دامنه و معادلات شرایط مرزی هم در نقاط مرزی قرار داده شوند. در نهایت به صورت یک دستگاه معادلات به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$Lu(x_i) = f_i \quad i = 1: N_D \quad (14)$$

$$Bu(x_i) = 0 \quad i = 1: N_B \quad (15)$$

که در این جا L و B عملگرهای دیفرانسیلی می‌باشند، u متغیری است که با توابع پایه لژاندر جایگزین شده است، x_i مختصات نقاط مورد نظر هستند، f مقادیر سمت راست معادله و N_D و N_B نیز به ترتیب تعداد نقاط درون دامنه و روی مرز می‌باشند.

برای توزیع نقاط دامنه از نقاط لژاندر-گوس-لوباتو استفاده شده است. نمایش این نقاط به عنوان نمونه در شکل 2 برای حالت $(8 \times 8) = (n \times m)$ نقطه نشان داده شده است. که n تعداد نقاط در جهت طولی و m در جهت عرضی است. مختصات این نقاط در روش لژاندر $x_i (i = 1, \dots, N_B + N_D)$ می‌باشند که از حل معادلات (16) بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \frac{d}{dx} P_p\left(\frac{x}{a}\right) = 0; & p = 1, \dots, n \\ \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \frac{d}{dy} P_q\left(\frac{y}{b}\right) = 0; & q = 1, \dots, m \end{cases} \quad (16)$$

لازم به ذکر است در این تحقیق همواره تعداد ترم و تعداد نقاط در هر ضلع برابر در نظر گرفته شده است، یعنی $n^2 = m^2 = N_B + N_D$. انتخاب نقاط و نحوه توزیع آن‌ها در دامنه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چرا که انتخاب درست نقاط باعث افزایش دقت و سرعت همگرایی در مسئله می‌شود. لازم به ذکر است، چنانچه برای گسسته‌سازی دامنه از نقاط یکنواخت استفاده شود نسبت به زمانی که از نقاط لژاندر-گوس-لوباتو استفاده می‌شود

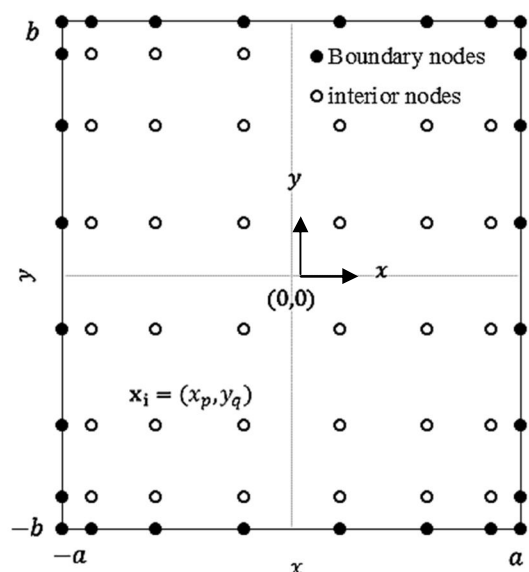


Fig. 2 Scattered Legendre-gauss-lobatto nodes

شکل 2 توزیع نقاط لژاندر-گوس-لوباتو

1- Residual
2- Runge phenomenon

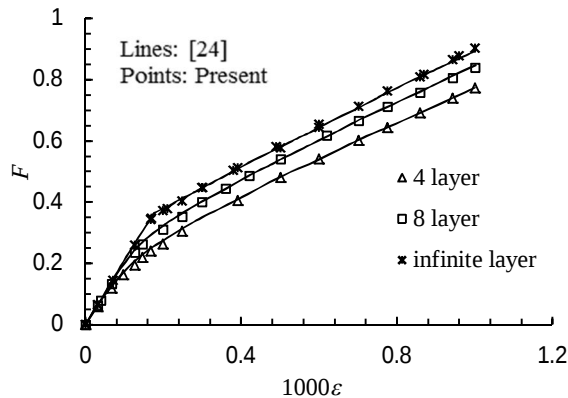


Fig. 3 Longitudinal force-end shortening behavior for anti-symmetric cross-ply plates

شکل 3 منحنی نیرو بر حسب کرنش صفحات متعامد پادمتقارن

کامپوزیتی که از تعداد لایه های زیاد (≥ 50) تشکیل شده است. نتایج روش مذکور با مرجع [24] که روش نوار محدود می باشد مقایسه شده اند. نتایج با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه برای رسیدن به جواب مناسب گرفته شده اند. در ادامه در شکل 4 منحنی پس از کمانش خیز وسط صفحات کامپوزیتی متعامد پادمتقارن بر حسب نیرو ترسیم شده اند. همان طور که از شکل 4 مشخص است در لایه چینی های 4 و 8 به دلیل عدم کمانش منحنی پس از کمانش از مبدأ مختصات آغاز می شود ولی در لایه چینی بی نهایت به علت وجود کمانش، خیز وسط صفحه کامپوزیتی تا رسیدن به نیروی بحرانی صفر می باشد و بعد از آن صفحه شروع به بلند شدن می کند. همان طور که در شکل 4 مشخص می باشد با افزایش تعداد لایه ها نیروی محوری افزایش می یابد. نتایج با مرجع [24] مقایسه شده و نشان دهنده دقت مناسب روش حاضر می باشند.

نتایج پس از کمانش کرنش - نیرو، برای صفحات کامپوزیتی چهار لایه $[0/90]_2$ با شرایط مرزی خارج صفحه ای ترکیبی و داخل صفحه ای آزاد در شکل 5 آورده شده است. همان طور که از شکل 5 مشخص است با افزایش شرایط مرزی گیردار در لبه های بدون بارگذاری، نیروی محوری لازم جهت بلند شدن صفحه افزایش یافته است. به دلیل پادمتقارن بودن لایه چینی ها نقطه کمانشی ایجاد نمی شود. نتایج با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه به دست آمده است.

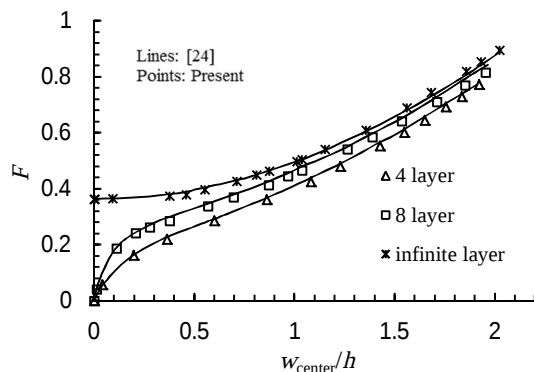


Fig. 4 Longitudinal force-central deflection for anti-symmetric cross-ply laminates

شکل 4 منحنی نیرو - خیز وسط صفحات متعامد پادمتقارن

4- نتایج و تحلیل

در مقاله ای حاضر، حل معادلات پس از کمانش تحت کوتاه شدگی انتهایی و شرایط مرزی گوناگون خارج صفحه ای و درون صفحه ای برای صفحات کامپوزیتی توسط چند جمله ای های لژاندر بررسی شده است. به منظور بررسی دقت و کاربرد روش حاضر چندین مثال جهت مقایسه با نتایج موجود آورده شده است. مشخصات ماده انتخابی، شرایط مرزی و هندسه در نظر گرفته شده در تحقیق به صورتی که در زیر آمده است می باشد:

$$a = b; \frac{2a}{h} = 100; \frac{E_1}{E_2} = 40; G_{12} = 0.5E_2; \nu_{12} = 0.25 \quad (20)$$

مدل ریاضی مربوط به شرایط مرزی خارج صفحه ای ساده و گیردار به ترتیب زیر ارائه شده اند:

$$\begin{aligned} x &= \mp a; w_0 = M_{xx} = 0 \\ y &= \mp b; w_0 = M_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x &= \mp a; w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\ y &= \mp b; w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

همچنین مدل ریاضی مربوط به شرایط مرزی درون صفحه ای مقید و آزاد نیز به مانند رابطه (23) و (24) می باشند:

$$\begin{aligned} x &= \mp a; u_0 = \pm \varepsilon a; v_0 = 0 \\ y &= \mp b; u_0; v_0 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x &= \mp a; u_0 = \pm \varepsilon a; N_{xy} = 0 \\ y &= \mp b; N_{xy} = N_y = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

کمیت نیروی بی بعد شده نیز از رابطه $F = 2N_{av}a/100E_2h^3$ محاسبه می شود. در جدول 1 نحوه همگرایی روش حاضر برای رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی متعامد و پادمتقارن $0/90/0/90 \dots$ برای لایه چینی های 4، 8 و بی نهایت و در کرنش $\varepsilon/1000 = 4 \times 10^{-4}$ بررسی شده است. همان طور که از جدول 1 مشخص می باشد با افزایش ترم و نقاط، از ترم 10 جواب ها به همگرایی رسیده اند ولی جهت اطمینان از صحت نتایج و افزایش دقت در جواب ها کلیه نتایج برای تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه گرفته شده اند. در شکل 3 رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی متعامد و پادمتقارن $0/90/0/90 \dots$ تحت کوتاه شدگی انتهایی، برای شرایط مرزی خارج صفحه ای ساده و درون صفحه ای آزاد، نشان داده شده است. نمودار شکل 3 بر حسب کرنش بی بعد 1000ε و نیروی بی بعد محوری ترسیم شده است. در لایه چینی های 4 و 8 لایه به علت وجود ترم های B_{11}, B_{22} کوپلینگ خارج صفحه ای و درون صفحه ای ایجاد می شود، بنابراین رفتار پس از کمانش این دو لایه چینی بدون داشتن نقطه کمانش انجام می پذیرد ولی در لایه چینی با تعداد لایه های بی نهایت اثرات ترم های B_{11}, B_{22} از بین می روند و صفحه کامپوزیتی دچار کمانش می شود. منظور از لایه چینی بی نهایت یعنی صفحه

جدول 1 نحوه همگرایی روش حاضر

Table 1 Convergence study for present method

کمیت نیروی بی بعد F			تعداد نقاط	تعداد ترم
بی نهایت	هشت لایه	چهار لایه		
0.693	0.533	0.406	7×7	7
0.536	0.469	0.411	9×9	9
0.534	0.472	0.415	10×10	10
0.524	0.472	0.415	11×11	11

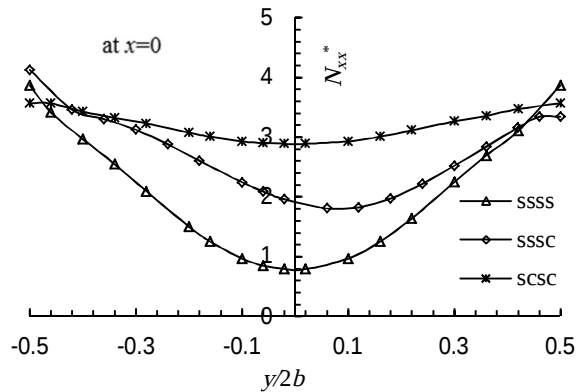


Fig. 7 Non-dimensional longitudinal resultant force distribution across the plate at $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$

شکل 7 منحنی نیروی محوری بی بعد برای $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ و در وسط صفحه

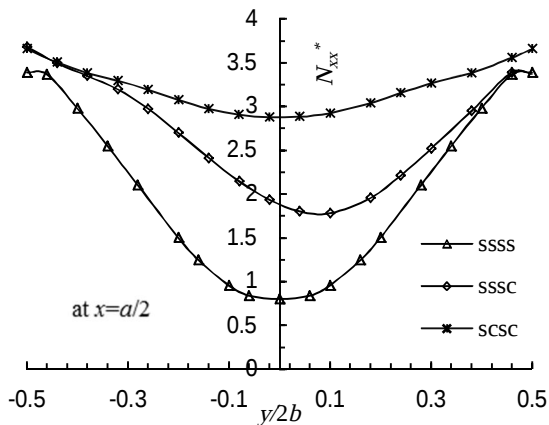


Fig. 8 Non-dimensional longitudinal resultant force distribution across the plate at $\varepsilon = 0.0003$

شکل 8 منحنی نیروی محوری بی بعد برای $\varepsilon = 0.0003$ و در مقطع یک چهارم صفحه

نتایج صفحات کامپوزیتی زاویه ای پادمتقارن برای شرایط مرزی خارج صفحه ای ساده و داخل صفحه ای مقید در تمامی لبه ها نیز ارائه شده اند. لایه چینی صفحات به صورت $30/-30/30/-30$ در نظر گرفته شده اند. به دلیل پادمتقارن بودن لایه چینی ها ترم های B_{16}, B_{26} از ماتریس کوپلینگ سفتی خمشی - محوری غیر صفر می باشند. همان طور که از شکل 9 مشخص است با وجود غیر صفر بودن ترم های B_{16}, B_{26} به دلیل شرایط مرزی خاص حاکم بر مسئله در رفتار پس از کمانش این صفحات نقطه کمانش مشاهده می شود. با افزایش تعداد لایه ها نیروی کمانش لازم جهت بلند کردن صفحه افزایش می یابد. نتایج با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه به دست آمده است و تطابق خوبی با مرجع [24] دارد.

در شکل 10 نیز منحنی پس از کمانش صفحات کامپوزیتی و زاویه ای پادمتقارن برای جابجایی خارج صفحه ارائه شده است. همان گونه که از این شکل مشخص است برای یک خیز یکسان با افزایش تعداد لایه ها نیروی بیشتری جهت وارد شدن به صفحه لازم است.

5- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی رفتار پس از کمانش صفحات متعامد و زاویه ای

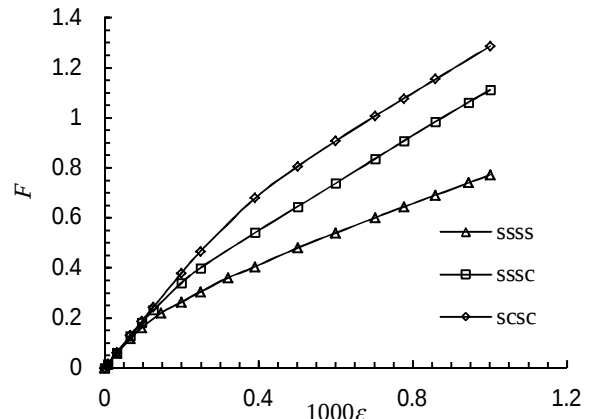


Fig. 5 Longitudinal force - end shortening behavior for different boundary conditions

شکل 5 منحنی کرنش - نیرو برای انواع شرایط مرزی خارج صفحه ای

در شکل 6 منحنی رفتار پس از کمانش خیز وسط صفحه بر حسب نیروی بی بعد محوری ارائه شده است. منحنی ها به دلیل عدم وجود کمانش از همان مبدأ دارای جابجایی خارج از صفحه می باشند. با افزایش سفتی صفحه کامپوزیتی در اثر افزایش شرایط مرزی گیردار خیز وسط صفحه کمتری به دست آمده است. نتایج با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه به دست آمده است.

نتایج توزیع نیروی بی بعد محوری را برای هر سه نمونه فوق در جهت y می توان در شکل 7 مشاهده نمود. این نتایج در کوتاه شدگی انتهایی $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ و در مقطع $(x = 0)$ صفحه ترسیم شده است. برای شرایط مرزی خارج صفحه ای چهار طرف ساده و یا برای شرایطی که دو لبه تحت کوتاه شدگی انتهایی ساده و دو لبه بدون بار گیردار باشند منحنی توزیع نیرو دارای تقارن می باشد. در حالی که برای شرایط مرزی خارج صفحه ای نامتقارن توزیع نیرو نیز به صورت غیر متقارن بدست آمده است. نیروی بی بعد محوری توسط رابطه $N_{xx}^* = N_{xx}(2b)^2/\pi^2 D_{22}$ به دست می آید.

در ادامه به ارائه توزیع نیروی بی بعد محوری در یک چهارم صفحه و در جهت y پرداخته شده است. همان طور که از شکل 8 مشخص است با سفت تر شدن شرایط مرزی خارج صفحه ای در لبه های بدون بارگذاری نیروی محوری بیشتری جهت بلند شدن صفحه لازم است.

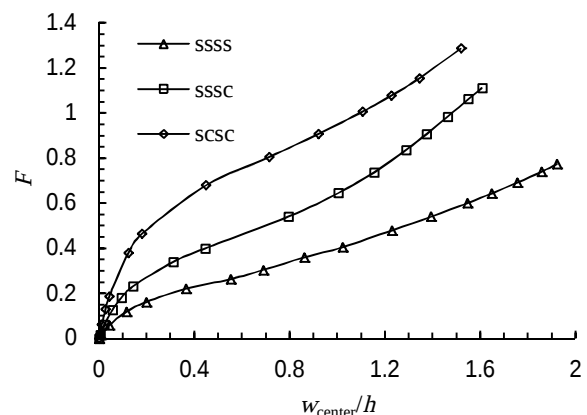


Fig. 6 Longitudinal force - central deflection for different boundary conditions

شکل 6 منحنی نیرو - خیز وسط برای انواع شرایط مرزی خارج صفحه ای

- 2004.
- [2] C. Y. Chia, *Nonlinear analysis of plates*, pp.151-185, McGraw-Hill, New York, 1980.
 - [3] E. Carrera, M. Villani, Large deflection and stability FEM analysis of shear deformable compressed anisotropic flat panels, *Composite structures*, Vol. 29, pp. 433-444, 1999.
 - [4] E. Carrera, M. Villani, Effect of boundary conditions on post-buckling of compressed, symmetrically laminated thick plates, *American. Institute. Aeronaut, Astronaut, Journal*, Vol. 33, pp. 1543-1546, 1995.
 - [5] P. Sundaresan, G. Singh, V. Rao, Buckling and post-buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 79-86, 1996.
 - [6] K. D. Kim, Buckling behavior of composite panels using the finite element method, *Composite Structures*, Vol. 36, pp. 33-43, 1996.
 - [7] M. Ganapathi, M. Touratier, A study on thermal post-buckling behavior of laminated composite plates using a shear flexible finite element, *Finite element Analysis & Design*, Vol. 28, pp. 115-135, 1997.
 - [8] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, M. Nasirinia, Nonlinear post-buckling analysis of isotropic plates using finite strip method, *Journal of Aerospace Science and Technology*, Vol. 8, No. 1, pp. 11-19, 2011.
 - [9] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, E. Zia-Dehkordi, An exact finite strip for the calculation of initial post-buckling stiffness of shear-deformable composite laminated plates, *Composite Structures*, Vol. 108, No. 1, pp. 504-513, 2014.
 - [10] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, An exact finite strip for the calculation of relative post-buckling stiffness of I-section struts, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 1354-1364, 2008.
 - [11] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, M. Nasirian, High accuracy post-buckling analysis of box section struts, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 92, No. 8, pp 668-680, 2012.
 - [12] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, High accuracy post-buckling analysis of channel section struts, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 47, No. 9, pp 967-984, 2012.
 - [13] K. M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Post-buckling of piezoelectric FGM plates subjected to thermo-electro-mechanical loading, *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 40, pp. 3869-3892, 2003.
 - [14] K. M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermal post-buckling of laminated plates comprising FGM with temperature-dependent properties, *Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, pp. 839-850, 2004.
 - [15] H. S. Shen, K. M. Liew, Post-buckling of axial loading functionally graded cylindrical panels with piezoelectric actuators in thermal environments, *Journal of Engineering. Mechanics. ASCE*, Vol. 130, pp. 982-995, 2004.
 - [16] F. Taheri, S. Moradi, A robust methodology for the simulation of post-buckling response of composite plates, *Computational Mechanics*, Vol 26, pp. 295-301, 2000.
 - [17] K. M. Liew, Y. Q. Huang, Bending and buckling of thick symmetric rectangular laminates using the moving least-squares differential quadrature method, *International Journal of Mechanics Sciences*, Vol 45, pp. 95-114, 2003.
 - [18] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Moving least-squares differential quadrature method and it's application to the analysis of shear deformable plates, *International Journal. For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 2331-2351, 2003.
 - [19] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least-squares based on differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 192, pp. 2203-2222, 2003.
 - [20] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Analysis of general shaped thin plates by the moving least-squares differential quadrature method, *Finite Element in Analysis & Design*, Vol. 40, pp. 1453-1474, 2004.
 - [21] E. J. Kansa, Multiquadrics a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics,

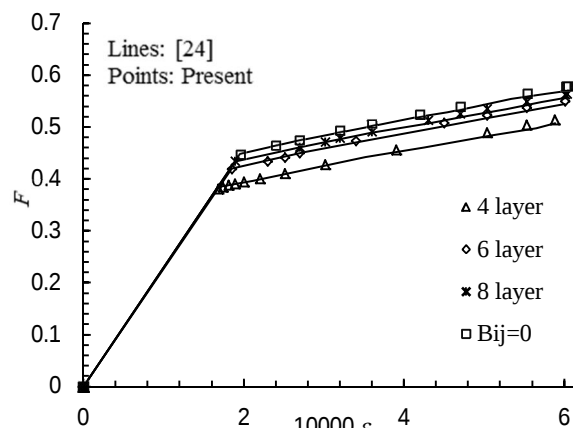


Fig .9 Longitudinal force-end shortening behavior for anti-symmetric angle-ply plates

شکل 9 منحنی نیرو بر حسب کرنش صفحات زاویه ای پادمتقارن

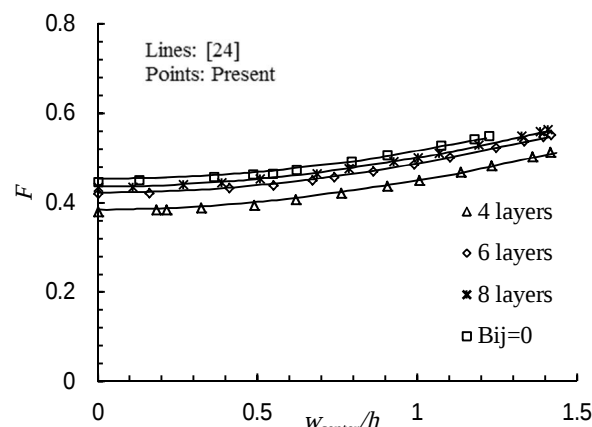


Fig .10 Longitudinal force-central deflection for anti-symmetric angle-ply laminates

شکل 10 منحنی نیرو - خیز وسط صفحات زاویه ای و پادمتقارن کامپوزیتی

پادمتقارن پرداخته شد. روش به کار گرفته شده در تحقیق حاضر روش بدون المان با استفاده از توابع پایه ای لژاندر بوده است. دامنه مسئله با نقاط لژاندر-گائوس-لوباتو گسسته سازی شد و نتایج به دست آمده با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه استخراج شدند. مزیت این روش، حل معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی بدون نیاز به تعریف المان می باشد. در این مقاله به دلیل استفاده از لایه چینی پادمتقارن، کوپلینگ خارج صفحه ای و درون صفحه ای ایجاد می شود، لذا در لایه چینی های متعامد 4 و 8 لایه، منحنی پاسخ غیرخطی آن ها بدون داشتن نقطه کمانش بدست آمد ولی با افزایش تعداد لایه ها و رسیدن به تعداد بی نهایت لایه از اثرات ترم های B_{11} , B_{22} کاسته شد و بنابراین صفحه دچار کمانش گردید. اما در لایه چینی های زاویه ای، به دلیل شرایط مرزی خاص حاکم بر مسئله، با وجود اثر کوپلینگ خارج صفحه ای و درون صفحه ای هر سه ورق کامپوزیتی با تعداد لایه 4، 8 و بی نهایت دچار کمانش شدند و تا قبل از بار کمانش هیچ تغییر شکل خارج صفحه ای در این ورق ها مشاهده نشد.

6-مراجع

- [1] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, CRC. PRESS, Second edition, pp. 109-161, Boca Raton. London. New York. Washington. D.C.,

- Meshless Method for Laminated and Functionally Graded Plates and Shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2031-2041, 2011.
- [24] D. J. Dawe, S. S. E. Lam, Nonlinear finite strip analysis of rectangular laminates under end-shortening, using classical plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1087-1110, 1992.
- Surface approximation and partial derivatives estimates, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 19, Issue. 8/9, pp. 127-145, 1990.
- [22] K. M. Liew, T. Y. Ng, X. Zhao, J. N. Reddy, Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration analysis of rotating cylindrical shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 4141-4157, 2002.
- [23] K. M. Liew, Xin Zhao, J. M. Antonio, Ferrira, A Review of