



پاسخ تحلیلی تنش و تغییر مکان در نیم فضای ناهمگن متقارن محوری تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح

محمد بیات¹، علی اصغر عطایی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

*تهران، صندوق پستی 11155-4563، aataee@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 بهمن 1393

پذیرش: 02 فروردین 1394

ارائه در سایت: 29 فروردین 1394

کلید واژگان:

نیم فضا

متقارن محوری

مواد ناهمگن

بار متمرکز

پاسخ تحلیلی

چکیده

در این پژوهش یک راه حل تحلیلی برای یک نیم فضای ناهمگن مدرج تابعی که در آن خصوصیات ماده به صورت تابع توانی با شعاع در مختصات کروی تغییر می کند و تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد ارائه می گردد. مدول یانگ متغیر در نظر گرفته شده است، ولی نسبت پواسون ثابت باقی می ماند. مسئله با استفاده از روش الاستیسیته و این نکته کلیدی که توابع تنش با مجذور شعاع در مختصات کروی، نسبت معکوس دارد، به صورت تحلیلی حل می شود. معادلات دیفرانسیل حاکم شامل روابط اساسی تعادل، قانون هوک و روابط کرنش - تغییر مکان به همراه معادلات شرایط مرزی حاکم بر مسئله، به طور دقیق در مختصات کروی حل شده و میدان های تنش و تغییر مکان محاسبه می شوند. نتایج محاسبه شده می تواند به حل مربوط به نیم فضای همگن کاهش پیدا کند، در پایان نیز با ارائه یک مثال توزیع تنش و تغییر مکان در یک نیم فضای ناهمگن مدرج تابعی که مدول یانگ آن به صورت تابع توانی با شعاع در مختصات کروی متغیر است و تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد، با رسم نمودارهای مربوطه در مختصات کروی و استوانه ای مورد بررسی قرار می گیرد و اثر پارامتر ناهمگنی در توزیع این تنش ها و تغییر مکان ها به طور کامل مورد بحث قرار می گیرد. مشخص می شود که پارامتر ناهمگنی تأثیر قابل توجهی در توزیع میدان تنش و تغییر مکان دارد.

Analytical solution of stress and displacement in axisymmetric inhomogeneous half space under normal concentrated surface loading

Mohammad Bayat¹, Ali Asghar Atai^{2*}

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Karaj Branch, Karaj, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

*P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aataee@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 February 2015
Accepted 22 March 2015
Available Online 18 April 2015

Keywords:
Half space
axisymmetric
Inhomogeneous
concentrated loading
analytical solution

ABSTRACT

In this paper, an analytical solution for stress and displacement in an inhomogeneous half space under the action of concentrated normal surface loading is investigated. The Young's modulus is considered to vary with the spherical radius R in a power law form of order n , while the Poisson's ratio is taken to be constant. The problem is solved analytically using an elasticity approach and considering a semi-inverse method in which, based on equilibrium equations on the surface of an arbitrary hemisphere in the half-space and centered at the point of application of load, some stress components are assumed to be proportional to $1/R^2$. It is then shown that this assumption is valid and all stress components in this axisymmetric problem are proportional to $1/R^2$, while displacements are proportional to $1/R^{(n+1)}$. and their variation with azimuthal coordinate φ is in the form of a special function called hyper-geometric function. Illustrative examples are presented which show variations of stresses and displacements in both R and φ directions. It is seen that the inhomogeneity parameter has a significant effect on both of these field variables.

1- مقدمه

محاسبه میدان تنش و تغییر مکان یک نیم فضای الاستیک، تحت بار متمرکز در حل مسئله های مختلف مهندسی کاربرد دارد. مثلاً برای مطالعه روی مسئله های مختلف تماسی از قبیل حکاکی یا سمبه زنی می تواند مورد استفاده قرار گیرد. یا برای محاسبه میدان تنش و تغییر مکان در داخل سنگ بعلت ناپیوستگی های موجود در آن، در نظر گرفتن سنگ بصورت یک نیم فضای ناهمگن بسیار سودمند می باشد.

مطالعه های ابتدایی روی یک نیم فضای همگن تحت اثر بار متمرکز توسط بوسینسک [1]، کروتی [2] و میندیلین [3] انجام شد. گیبسون [4,5] نیم فضای ناهمگن را مورد بررسی قرار داد. بوکر [6,7] محاسبات را برای مواد مدرج تابعی گسترش داد. کومار [8] سنگ را به صورت یک نیم فضای ناهمگن در نظر گرفت و اثر دستگاه های حفاری روی سنگ را بررسی کرد. راجاپاکسه [9] نیم فضای همگن را برای اولین بار با استفاده از تبدیلات هنکل حل کرد. اشتارک و بوکر [10,11] به بررسی نیم فضای ناهمگن تحت

Please cite this article using:

M. Bayat, A. A. Atai, Analytical solution of stress and displacement in axisymmetric inhomogeneous half space under normal concentrated surface loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 51-57, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

6 و رابطه 14.4.1 مرجع 25 را ببینید) که در کل سطح آزاد $z=0$ نیم فضا مورد ابهام است اما به روشی مشابه قابل رفع است.

با توجه به مختصات کروی در نظر گرفته شده (R, φ, θ) برای مسئله، مطابق شکل 1، بردارهای تنش بر روی سطح هر نیم کره C به مرکز مبدأ مختصات، باید با بارگذاری متمرکز اعمال شده متعادل شوند، روابط (2) و (3).

$$\int \sigma_R \cos(\varphi) dA - \int \tau_{R\varphi} \sin(\varphi) dA + P = 0 \quad (2)$$

$$dA = 2 \pi R^2 \sin(\varphi) d\varphi \quad (3)$$

با توجه به آن که طبق رابطه (3)، جزء سطح این نیم کره‌ای متناسب با مجذور شعاع، R^2 است، منطقی است فرض شود تنش‌ها متناسب با $1/R^2$ باشند تا اجازه دهند چنین تعادلی مستقل از نیم کره در نظر گرفته شده باشد. پس تنشهای σ_R و $\tau_{R\varphi}$ به صورت روابط (4) و (5) نوشته می‌شوند.

$$\sigma_R = \frac{f(\varphi)}{R^2} \quad (4)$$

$$\tau_{R\varphi} = \frac{g(\varphi)}{R^2} \quad (5)$$

که $f(\varphi)$ و $g(\varphi)$ توابعی برحسب φ می‌باشند که باید از سایر روابط حاکم تعیین شوند. لازم به ذکر است که فرض فرم‌های (4) و (5) یک شرط لازم نیست و طبق رابطه تعادلی (1) در واقع ترکیب $\sigma_R \cos(\varphi) - \tau_{R\varphi} \sin(\varphi)$ باید متناسب با $1/R^2$ باشد، اما با پیش گرفتن روش نیمه معکوس و فرم فرض شده در روابط (4) و (5) نشان داده خواهد شد که تمام روابط حاکم و شرایط مرزی برآورده می‌شوند و لذا با توجه به یکتایی حل مسائل الاستیسیته، پاسخ به‌دست آمده حل مساله خواهد بود.

با توجه به این که مسئله در راستای z متقارن محوری است، تنش‌ها و تغییر مکان‌ها مستقل از مختصه θ می‌باشند و لذا رابطه تعادل در غیاب نیروهای حجمی در مختصات کروی به صورت روابط (6) و (7) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} (2\sigma_R - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \tau_{R\varphi} \cot(\varphi)) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} ((\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \cot(\varphi) + 3\tau_{R\varphi}) = 0 \quad (7)$$

جای‌گذاری روابط (4) و (5) در روابط (6) و (7)، سپس کم کردن این دو رابطه از یکدیگر، رابطه (8) را نتیجه می‌دهد.

$$g'(\varphi) + (\cot(\varphi) - \tan(\varphi))g(\varphi) - R^2 \left(2\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \tan(\varphi) \right) = 0 \quad (8)$$

برقراری رابطه (8) الزام می‌دارد که عبارت $(2\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \tan(\varphi))$ متناسب با $1/R^2$ باشد، پس می‌توان رابطه (9) را نوشت.

$$2\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \tan(\varphi) = \frac{M(\varphi)}{R^2} \quad (9)$$

لذا مطابق رابطه (10)، σ_φ نیز باید متناسب با $1/R^2$ باشد.

$$\sigma_\varphi = \frac{Q(\varphi)}{R^2} \quad (10)$$

که M و Q توابعی از φ می‌باشند.

با جای‌گذاری رابطه (10) در رابطه (8)، رابطه (11) را می‌توان نوشت.

$$g'(\varphi) + (\cot(\varphi) - \tan(\varphi))g(\varphi) - (2Q(\varphi) + Q'(\varphi)\tan(\varphi)) = 0 \quad (11)$$

با حل رابطه (11) برحسب $Q(\varphi)$ و جای‌گذاری در رابطه (10)، σ_φ برحسب $g(\varphi)$ محاسبه می‌شود، رابطه (12).

بارگذاری عمودی و افقی پرداختند، شوارتزر و همکاران [12] نیم فضایی که سطح آن با ماده دیگری پوشیده شده است را مورد بررسی قرار دادند. هالز لوهر [13] نیم فضای ناهمگن که تحت اثر بار متمرکز قرار دارد را مورد مطالعه قرار داد، نیم فضا را به‌صورت سهمی در نظر گرفت و به طور تحلیلی به حل مسئله پرداخت. آیزیکوویچ و همکاران [14] مسئله تماس یک حاکاک کروی و یک نیم فضای ناهمگن را به‌صورت دقیق حل کردند. وانگ و همکاران [15] از یک نیم فضای ناهمگن مدرج تابعی ایزوتروپ عرضی، برای شبیه‌سازی رفتار سنگ استفاده کردند. کو [16] مسئله تماس یک حاکاک استوانه‌ای با یک نیم فضای همگن شامل یک ناحیه ناهمگنی که این ناحیه می‌تواند در هر کجای نیم فضا تغییر مکان دهد را مورد مطالعه قرار داد و در حل معادلات از روش المان محدود استفاده کرد. ژو و همکاران [17] یک حل تحلیلی برای نیم فضای ناهمگن ایزوتروپ عرضی تحت بارگذاری خطی ارائه کردند. چن و همکاران [18] تماس چسبناک حاکاک کروی با یک نیم فضای ناهمگن که خصوصیاتش با عمق متغیر است را مورد بررسی قرار دادند. کولچیتسکی و روگووسکی [19] مسئله تماس یک حاکاک کروی و یک نیم فضای همگن که از یک ماده ناهمگن مدرج تابعی پوشیده شده است را بررسی کردند. کان ژو و همکاران [20] نیم فضای همگن شامل نواحی ناهمگن به شکل دلخواه را مورد بررسی قرار دادند. ژوگو و همکاران [21] مسئله تماس یک نیم فضای ناهمگن با یک حاکاک سهموی را در حضور اصطکاک بررسی کردند. کولچیتسکی و باجووسکی [22] به بررسی یک نیم فضای همگن، پوشیده شده از یک ماده ناهمگن که خصوصیاتش به‌صورت تابع توانی با عمق تغییر می‌کند، پرداختند. طالع زاده و صدیقی [23] مساله تماس لغزشی سنبه تخت صلب و نیم فضای ناهمگن چند لایه را در حضور ترک در لایه همگن سطحی سرامیکی، زیر لایه مدرج تابعی با تغییر خواص برحسب عمق به صورت توانی، و هسته همگن فلزی، به روش عددی تفاضل محدود مورد بررسی قرار دادند.

در این پژوهش به‌صورت تحلیلی یک نیم فضای ناهمگن که مدول یانگش بصورت تابع توانی با شعاع در مختصات کروی (R) تغییر می‌کند و تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم به‌صورت دقیق حل می‌شوند.

2- فرمول‌بندی

یک نیم فضای ناهمگن که تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد در نظر گرفته می‌شود (شکل 1).

در این پژوهش نسبت پواسون ثابت در نظر گرفته شده و مدول یانگ بصورت تابع توانی برحسب شعاع R تغییر می‌کند، رابطه (1).

$$E = E_0 R^n \quad (1)$$

که در آن E_0 مدول الاستیسیته حالت همگن بوده و n توان ناهمگنی می‌باشد. لازم به ذکر است که اگر چه این مدل از ناهمگنی که حالت خاصی از مدل کلی توانی (مرجع 24) می‌باشد، در مجاورت مبداء مختصات سفتی ناچیزی می‌دهد و اتفاقاً بار متمرکز نیز در مبداء مختصات وارد می‌گردد که هر دوی این عوامل منجر به تنش‌ها و تغییر مکان‌های تکیه در این نقطه می‌گردند، اما روال معمول بحث کلاسیک الاستیسیته این است که ناحیه کوچکی در اطراف مبداء استثنا شود و با بارگذاری مناسب در سطح ناحیه برداشته شده، پاسخ ریاضی به‌دست آمده در مابقی نیم فضا معتبر خواهد بود (فصل 8 مرجع 25 را ببینید). از طرف دیگر، پژوهش‌هایی نیز وجود دارند که همین مدل ریاضی را برحسب عمق z ناحیه نیم فضا در نظر گرفته‌اند (مرجع

$$u_R = \frac{1}{E_0 (n+1) R^{n+1}} (-f(\varphi) + \vartheta \cot(\varphi) g(\varphi) + \vartheta g'(\varphi)) \quad (23)$$

همچنین با جای گذاری رابطه (17) در رابطه (21) محاسبه خواهد شد، رابطه (24).

$$u_\varphi = \frac{1}{E_0 (n+1) R^{n+1}} (g'(\varphi)(n+1-\vartheta) \tan(\varphi) - \vartheta g(\varphi)(n+2) + f(\varphi)(1-\vartheta(n+1)) \tan(\varphi)) \quad (24)$$

جای گذاری رابطه (16) در رابطه (20)، رابطه (25) را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} f(\varphi) (\vartheta(n+1) - 1) \tan^2(\varphi) &+ f'(\varphi) (\vartheta(n+1) - 1) \tan(\varphi) \\ &+ g(\varphi)(n+1-\vartheta) \cot(\varphi) \\ g(\varphi)(n+1-\vartheta) \cot(\varphi) - g'(\varphi) (n+1-\vartheta) (1 &- g'(\varphi) (n+1-\vartheta) (1 \\ &+ \tan^2(\varphi)) - g''(\varphi) (n+1 \\ &+ \tan^2(\varphi)) - g''(\varphi) (n+1 \\ &- \vartheta) \tan(\varphi) = 0 \\ &- \vartheta) \tan(\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

با حل رابطه (25)، $f(\varphi)$ بر حسب $g(\varphi)$ محاسبه می شود، رابطه (26).

$$f(\varphi) = C_2 \cos(\varphi) + ((1+n-\vartheta)(g(\varphi) \cot(\varphi) + g'(\varphi))) / (-1+\vartheta+n\vartheta) \quad (26)$$

C_2 یک عدد ثابت است، که با جای گذاری روابط (3)، (4)، (5) و (26)

در رابطه (2)، بر حسب $g(\varphi)$ محاسبه می شود، رابطه (27).

$$\begin{aligned} C_2 = 3 \int_0^{\pi/2} ((\sin^2(\varphi) - (1+n-\vartheta)/(-1+\vartheta &+ n\vartheta) \cos^2(\varphi)) g(\varphi) - (1+n \\ &- \vartheta)/(-1+\vartheta \\ &+ n\vartheta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) g'(\varphi)) d\varphi \\ &- \frac{3P}{2\pi} \end{aligned} \quad (27)$$

در نهایت جای گذاری روابط (18)، (26) و (27) در رابطه (22)، رابطه

(28) را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} -(1+\vartheta)(-2+n+2\vartheta-n\vartheta-n^2\vartheta &+ n(-1+\vartheta \\ &+ n\vartheta) \cos(2\varphi)) \csc^2(\varphi) g(\varphi) \\ &+ 2(-1+\vartheta^2) \cot(\varphi) g'(\varphi) \\ &+ 2(-1+\vartheta^2) g''(\varphi) \\ &+ 2 \sin(\varphi) (1-(3+2n)\vartheta \\ &+ (2+3n+n^2)\vartheta^2) C_2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

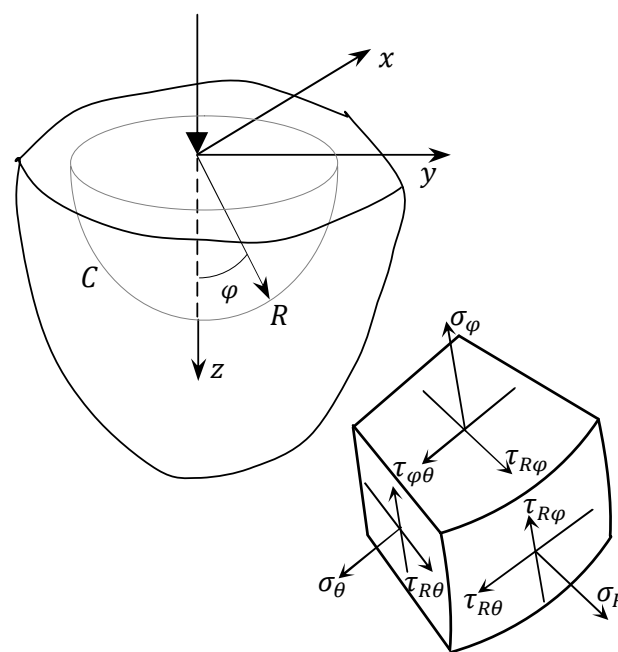
با صفر بودن $\tau_{R\varphi}$ در $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $g(\varphi)$ نیز به ازای این مقادیر صفر

خواهد بود، لذا با حل رابطه (28)، $g(\varphi)$ بر حسب توابع فوق هندسی محاسبه می شود، روابط (29-32).

$$\begin{aligned} g(\varphi) = -1/(\vartheta+1) (3 \sin(\varphi) \operatorname{hypg}([a, b], [1 &/2], \cos^2(\varphi)) (\vartheta+n\vartheta \\ &- 1) C_2 I_1 (n\vartheta+2\vartheta-1)) \\ &+ \cos(\varphi) \sin(\varphi) \operatorname{hypg}([c, d], [3 &/2], \cos^2(\varphi)) + 1/(\vartheta \\ &+ 1) (3((n+1)\vartheta \\ &- 1) \sin(\varphi) C_2 (I_1 \operatorname{hypg}([a, b], [1 &/2], \cos^2(\varphi)) \\ &+ I_3 \cos(\varphi) \operatorname{hypg}([c, d], [3 &/2], \cos^2(\varphi))) ((n+2)\vartheta-1)) \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{\pi/2} (-\frac{1}{3} (\operatorname{hypg}([c, d], [3/2], &\cos^2(z)) \cos(z)) / ((\sin(z)) (((-1+ \\ &\vartheta) \operatorname{hypg}([c, d], [3/2], \cos^2(z)) - \\ &1/3 \operatorname{hypg}([e, e], [5/2], \cos^2(z)) ((n^2-6+n)\vartheta \end{aligned}$$



شکل 1 نیم فضا تحت بار متمرکز

$$\sigma_\varphi = \frac{\cot(\varphi) g(\varphi) + C_1 (1 + \cot^2(\varphi))}{R^2} \quad (12)$$

که C_1 یک عدد ثابت است.

با توجه به شرط مرزی سطح آزاد، σ_φ در $\varphi = \frac{\pi}{2}$ صفر بوده و در نتیجه $C_1 = 0$ است، بنابراین رابطه (12) به رابطه (13) کاهش می یابد.

$$\sigma_\varphi = \frac{\cot(\varphi) g(\varphi)}{R^2} \quad (13)$$

با جای گذاری رابطه (13) در رابطه (6)، σ_θ بر حسب R و φ محاسبه

می شود، رابطه (14).

$$\sigma_\theta = \frac{g'(\varphi)}{R^2} \quad (14)$$

اینک میدان تنش بر حسب $f(\varphi)$ و $g(\varphi)$ محاسبه شد، حال می توان با

استفاده از قانون هوک، روابط کرنش تغییر مکان و شرایط مرزی حاکم بر مسئله، میدان تغییر مکان را نیز بر حسب $f(\varphi)$ و $g(\varphi)$ محاسبه کرد. در نهایت با محاسبه $f(\varphi)$ و $g(\varphi)$ فرآیند حل مسئله پایان می یابد.

روابط کرنش تغییر مکان در مختصات کروی با در نظر گرفتن شرط

تقارن محوری به صورت روابط (15-18) بیان می شوند.

$$e_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \quad (15)$$

$$e_\varphi = \frac{1}{R} (u_R + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}) \quad (16)$$

$$e_\theta = \frac{1}{R \sin(\varphi)} (\sin(\varphi) u_R + \cos(\varphi) u_\varphi) \quad (17)$$

$$e_{R\varphi} = \frac{1}{2} (\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R}) \quad (18)$$

قانون هوک نیز در مختصات کروی با در نظر گرفتن شرط تقارن محوری

بصورت روابط (19-22) بیان می شوند.

$$e_R = \frac{1}{E} (\sigma_R - \vartheta(\sigma_\varphi + \sigma_\theta)) \quad (19)$$

$$e_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \vartheta(\sigma_R + \sigma_\theta)) \quad (20)$$

$$e_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \vartheta(\sigma_\varphi + \sigma_R)) \quad (21)$$

$$e_{R\varphi} = \frac{1+\vartheta}{E} \tau_{R\varphi} \quad (22)$$

با جای گذاری رابطه (15) در رابطه (19) و انتگرال گیری سپس استفاده

از این حقیقت که u_R در بی نهایت به صفر میل می کند، u_R محاسبه می شود، رابطه (23).

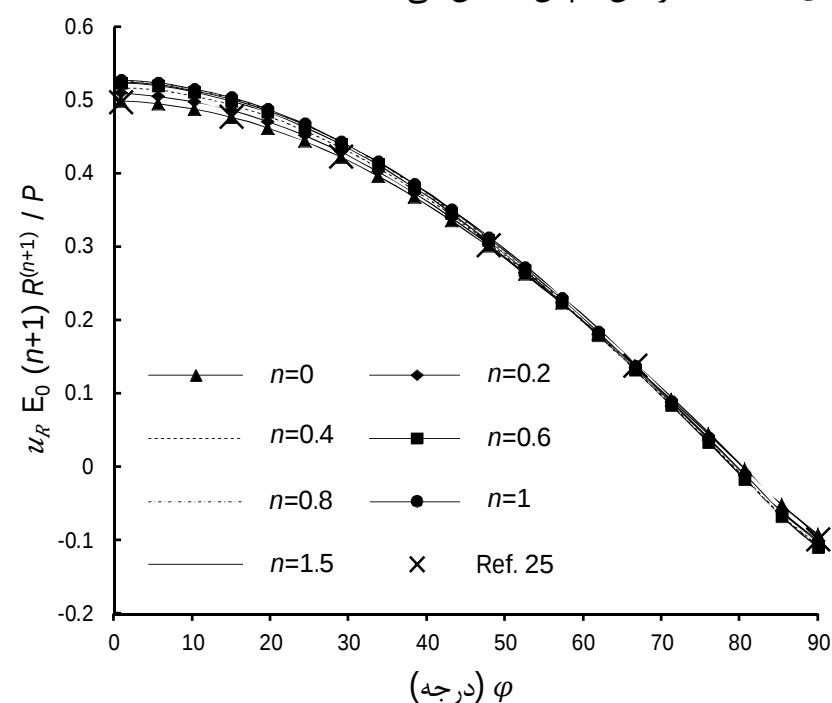
3- نتایج و بحث

در این قسمت برای مشخص شدن چگونگی توزیع تنش و تغییر مکان در یک نیم فضای ناهمگن مدرج تابعی که مدول یانگ آن به صورت تابع توانی با شعاع در دستگاه کروی متغیر است و تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد، مثال‌هایی ارائه می‌شود. نسبت پواسون $\nu = 0.25$ در نظر گرفته می‌شود و پارامتر ناهمگنی n در محدوده صفر (حالت همگن) تا $1/5$ تغییر می‌کند. لازم به ذکر است که برای اعداد ناهمگنی بالاتر از $1/5$ ، بعضاً در نمودارها رفتار غیر عادی مشاهده شده است که این امر بررسی بیشتری را می‌طلبد و لذا به همین حد بالای پارامتر ناهمگنی بسنده شده است. در تحقیقی مشابه که در آن مدول با عمق نیم فضا تغییر می‌کند. حداکثر مقدار توان ناهمگنی 1 در نظر گرفته شده است (مرجع 25 را ببینید). چگونگی توزیع تنش و تغییر مکان نیم فضا تحت بار متمرکز برحسب φ در شکل‌های 2 تا 7 و برحسب R در شکل‌های 8 تا 13 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که درجه ناهمگنی تأثیر قابل توجهی روی توزیع تنش و تغییر مکان دارد. همچنین، در تمامی این شکل‌ها پاسخ حالت همگن از مرجع [25] (علامت $\times$ در شکل‌ها) با نتایج حاصل از این تحقیق در حالت $n=0$ مقایسه شده است که انطباق کامل بین این دو پاسخ در تمام نمودارها مشاهده می‌گردد.

با رسم تغییرات u_R برحسب φ شکل 2، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی، حداکثر مقدار تغییر مکان شعاعی u_R افزایش می‌یابد. با رسم تغییرات u_φ برحسب φ شکل 3، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تغییر مکان زاویه‌ای u_φ کاهش می‌یابد. با رسم تغییرات σ_R برحسب φ همان‌طور که در شکل 4 نشان داده شده است، با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تنش شعاعی σ_R افزایش می‌یابد.

با رسم توزیع تنش زاویه‌ای σ_φ برحسب φ شکل 5، مشاهده می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی مقدار بیشینه تنش زاویه‌ای σ_φ کاهش می‌یابد. با مقایسه شکل‌های 2-5 مشخص می‌شود تغییر پارامتر ناهمگنی روی توزیع تنش و تغییر مکان زاویه‌ای σ_φ و u_φ تأثیر بیشتری دارد تا روی توزیع تنش و تغییر مکان شعاعی σ_R و u_R .

در مختصات استوانه‌ای با رسم توزیع تغییر مکان عمودی u_z برحسب φ شکل 6، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تغییر مکان عمودی u_z ، ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد.



شکل 2 تغییرات u_R برحسب φ

$$-n + 6) \cos^2(z)) \text{hypg}([g, h], [1/2], \cos^2(z)) + ((n^2 - 2 + n)\vartheta - n + 2) \cos^2(z) \text{hypg}([i, j], [3/2], \cos^2(z)) \text{hypg}([c, d], [3/2], \cos^2(z))))) dz \quad (30)$$

$$I_2 = \int_0^\varphi \left(-\frac{1}{3} (\text{hypg}([c, d], [3/2], \cos^2(z)) \cos(z)) / ((\sin(z)) (((-1 + \vartheta) \text{hypg}([c, d], [3/2], \cos^2(z)) - 1/3 \text{hypg}([e, e], [5/2], \cos^2(z)) ((n^2 - 6 + n)\vartheta - n + 6) \cos^2(z)) \text{hypg}([g, h], [1/2], \cos^2(z)) + ((n^2 - 2 + n)\vartheta - n + 2) \cos^2(z) \text{hypg}([i, j], [3/2], \cos^2(z)) \text{hypg}([c, d], [3/2], \cos^2(z))))) dz \quad (31)$$

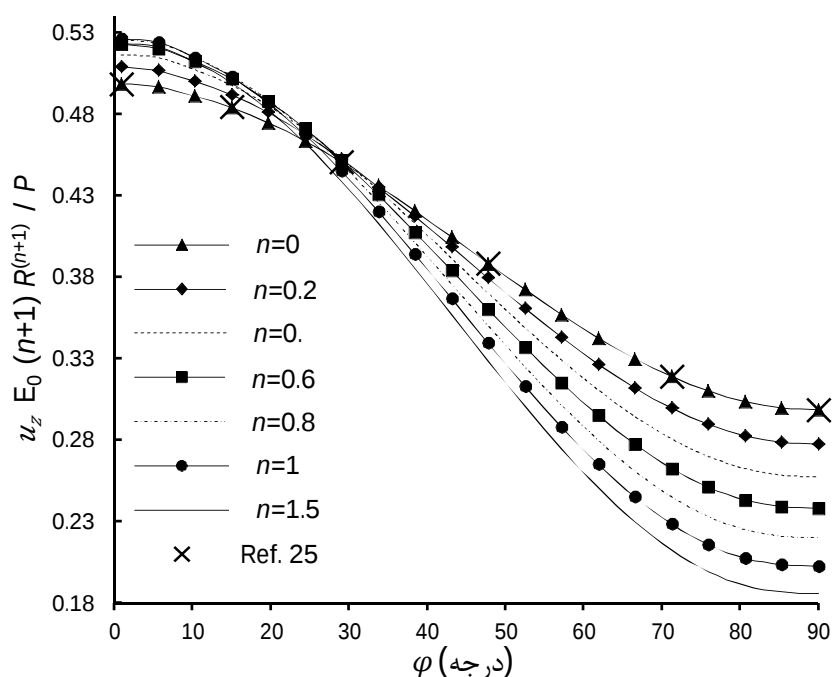
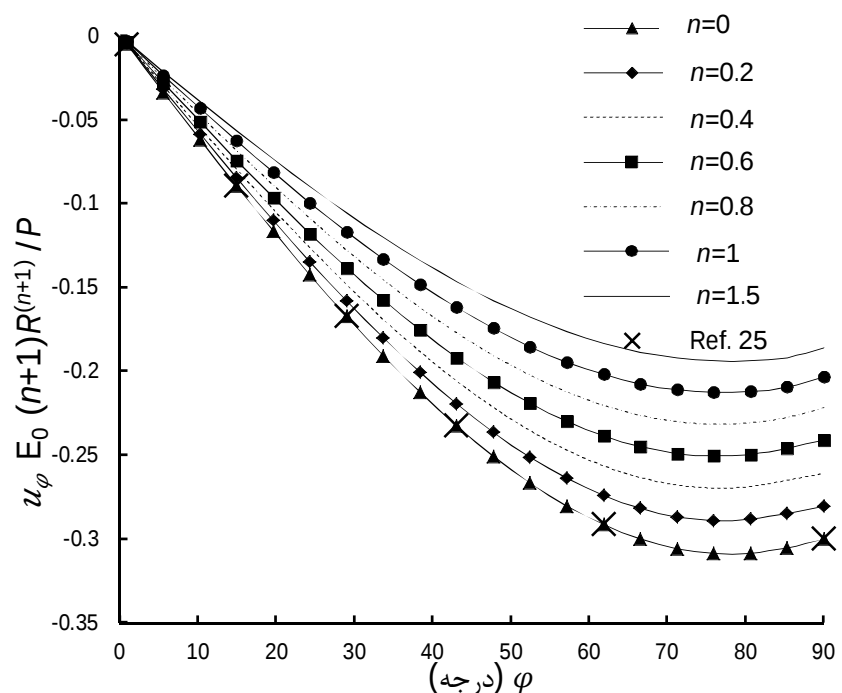
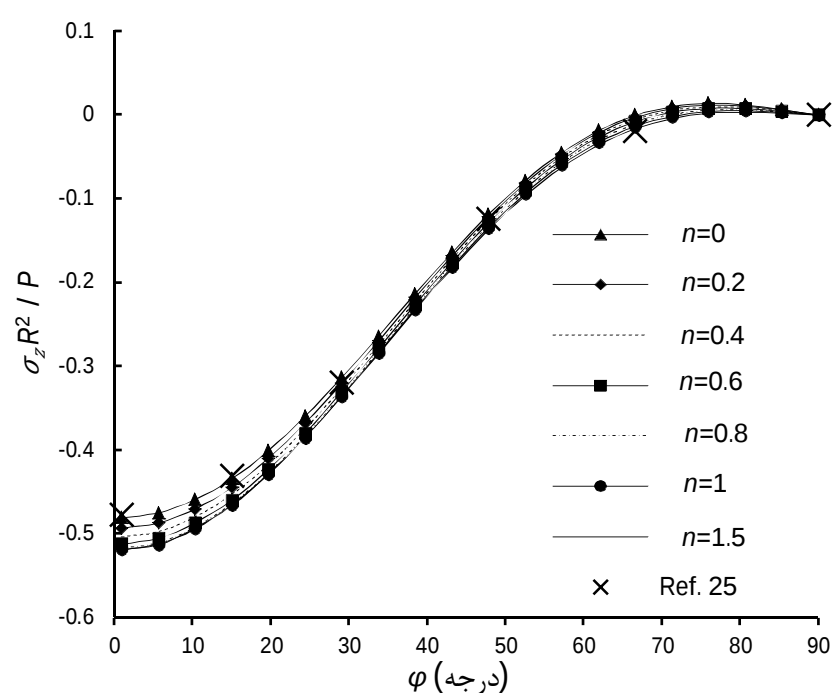
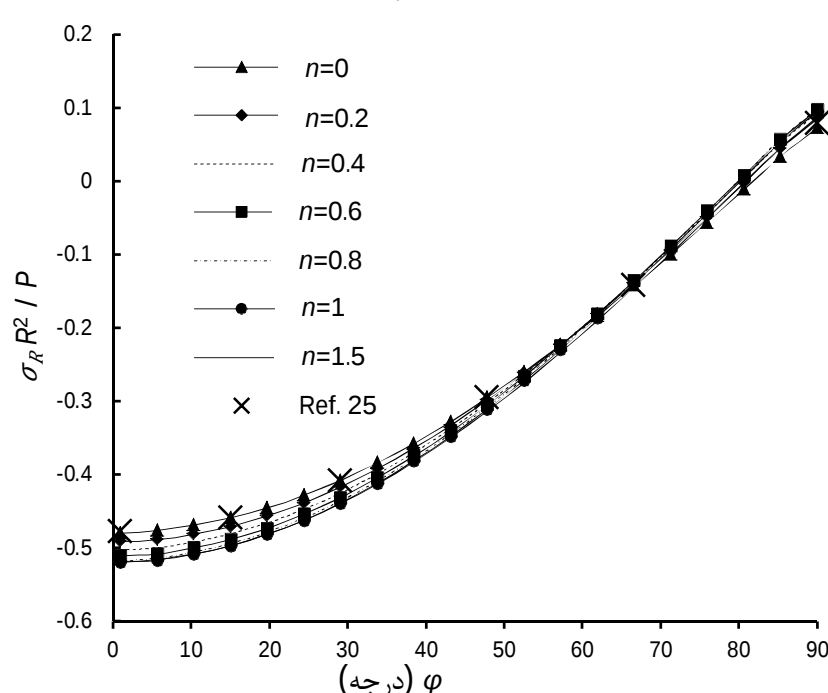
$$I_3 = \int_0^\varphi \left(-(\text{hypg}([a, b], [1/2], \cos^2(z))) / ((((-1 + \vartheta) \text{hypg}([a, b], [1/2], \cos^2(z)) - 3 \text{hypg}([k, k], [3/2], \cos^2(z)) ((n^2 - 2 + n)\vartheta - n + 2) \cos^2(z)) \text{hypg}([l, m], [3/2], \cos^2(z)) + ((n^2 - 6 + n)\vartheta - n + 6) \cos^2(z) \text{hypg}([n, o], [5/2], \cos^2(z)) \text{hypg}([a, b], [1/2], \cos^2(z)) \sin(z))) dz \quad (32)$$

جهت اجتناب از طولانی شدن این روابط، پارامترهای $a, b, c, d, e, g, h, i, j, k, l, m, n, o$ معرفی و بیان مبسوط آن‌ها در ضمیمه آ ارائه شده است. در پاسخ فوق، تابع سه پارامتری $\text{hypg}(A, B, C)$ تابع فوق هندسی نام دارد (مرجع 26 را ببینید) که در بسیاری از نرم‌افزارهای محاسباتی، مقادیر عددی آن به سهولت قابل دسترسی است. با قرار دادن پاسخ محاسبه شده برای $g(\varphi)$ در رابطه (26)، $f(\varphi)$ نیز مشخص می‌گردد. اینک ثابت C_2 از رابطه (27) مشخص می‌گردد و پاسخ میدان تنش و میدان تغییر مکان به طور کامل تعیین می‌شود. در این جا به علت طولانی بودن پاسخ نهایی از ذکر آن اجتناب می‌شود. در نهایت، میدان تنش و میدان تغییر مکان برحسب توابع فوق هندسی محاسبه می‌شود، که نتایج عددی آن‌ها در بخش 3 ارائه خواهد شد. در این جا لازم به توضیح است که در روند حل تحلیلی مساله، چون به طور همزمان از روابط کرنش- تغییر مکان و قانون هوک استفاده شده است، تغییر مکان‌ها نیز در فرمول‌بندی مساله وارد شده اند و توابع مجهول مساله با در نظر گرفتن آن‌ها به دست آمده اند و لذا به نحوی روابط سازگاری کرنش نیز به صورت ضمنی در مساله منظور شده و برقرارند و در نتیجه میدان تغییر مکان بدست آمده، پیوسته و تک مقداری خواهد بود.

همچنین می‌توان با استفاده از تبدیلات متغیرهای میدانی، u_z و σ_z را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کرد، روابط (33) و (34).

$$u_z = u_R \cos(\varphi) - u_\varphi \sin(\varphi) \quad (33)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_R + \sigma_\varphi + (\sigma_R - \sigma_\varphi) \cos(2\varphi) - 2\tau_{R\varphi} \sin(2\varphi)) \quad (34)$$

شکل 6 تغییرات u_z بر حسب φ شکل 3 تغییرات u_φ بر حسب φ شکل 7 تغییرات σ_z بر حسب φ شکل 4 تغییرات σ_R بر حسب φ

می‌کند.

با رسم تغییرات u_R بر حسب R شکل 8، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی، حداکثر مقدار تغییر مکان شعاعی u_R افزایش می‌یابد.

با رسم تغییرات u_φ بر حسب R شکل 9، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تغییر مکان زاویه‌ای u_φ افزایش می‌یابد.

با رسم تغییرات σ_R بر حسب R همان‌طور که در شکل 10 نشان داده شده است، با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تنش شعاعی σ_R افزایش می‌یابد.

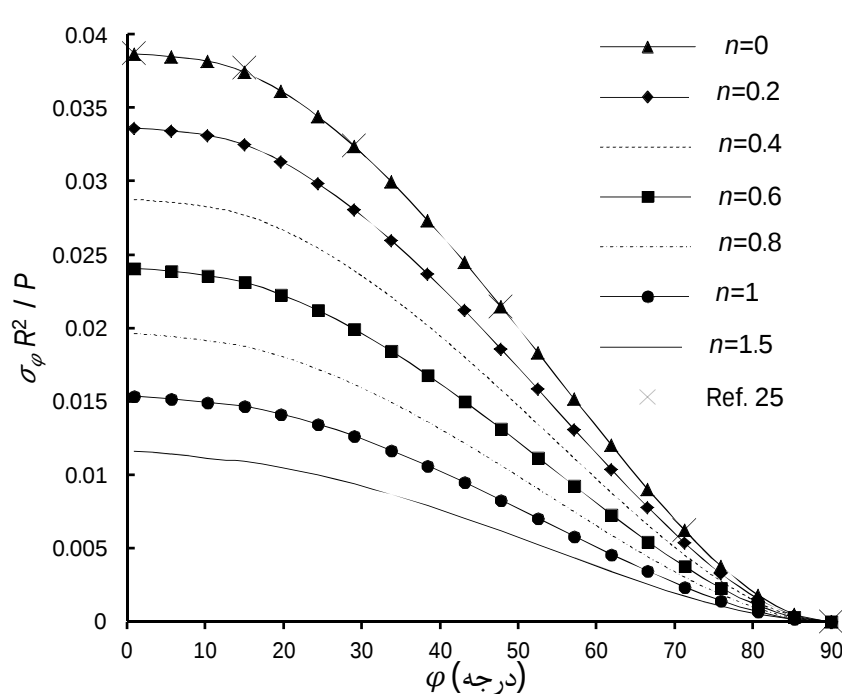
با رسم توزیع تنش زاویه‌ای σ_φ بر حسب R شکل 11، مشاهده می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی مقدار بیشینه تنش زاویه‌ای σ_φ کاهش می‌یابد.

در مختصات استوانه‌ای با رسم توزیع تغییر مکان عمودی u_z بر حسب R شکل 12، مشخص می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تغییر مکان عمودی u_z ، افزایش می‌یابد.

با رسم توزیع تنش عمودی σ_z بر حسب R در مختصات استوانه‌ای شکل 13، مشاهده می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تنش عمودی σ_z ، افزایش می‌یابد.

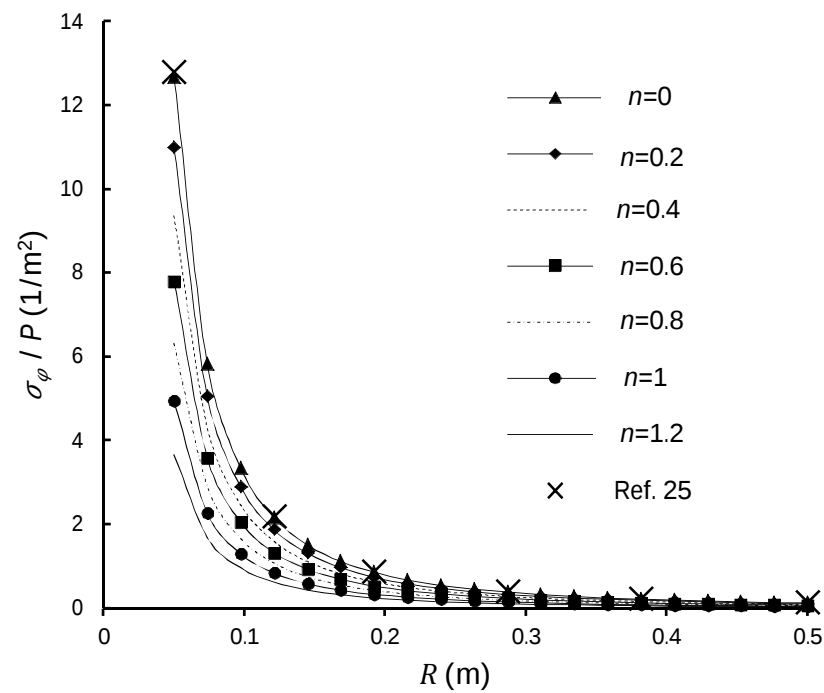
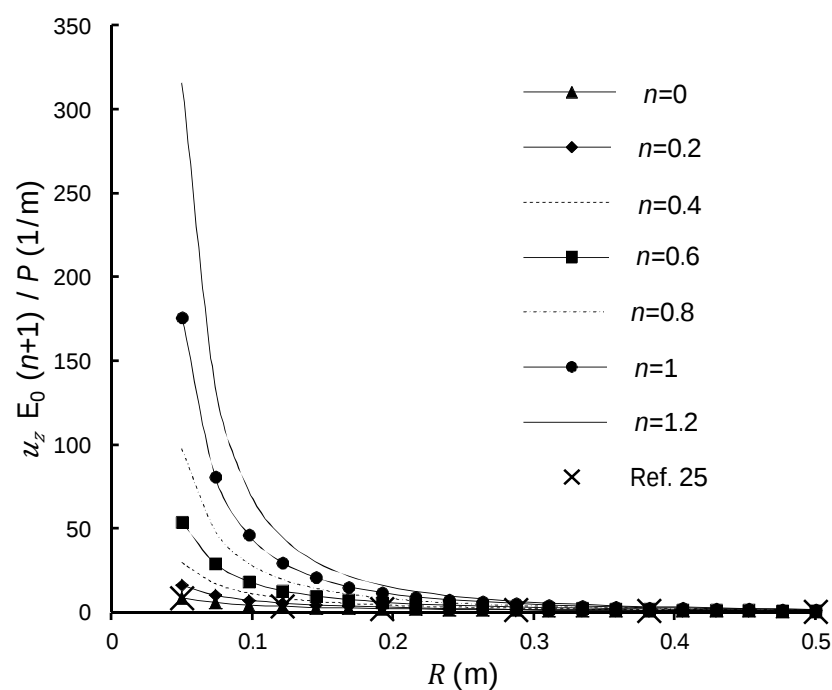
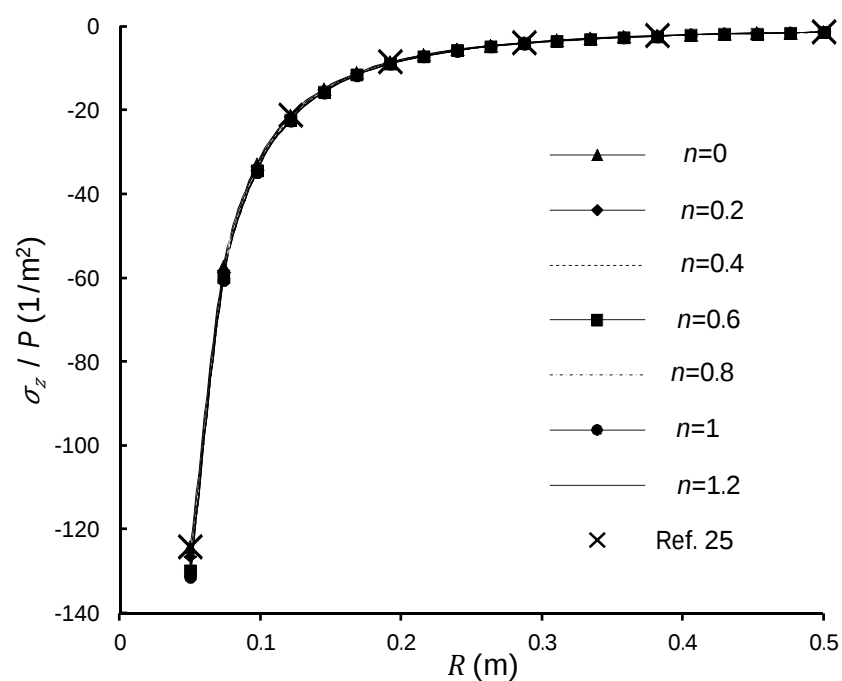
4- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک راه‌حل تحلیلی برای محاسبه میدان تنش و تغییر مکان یک نیم فضای ناهمگن که در آن خصوصیات ماده به‌صورت تابع توانی با شعاع در

شکل 5 تغییرات σ_φ بر حسب φ

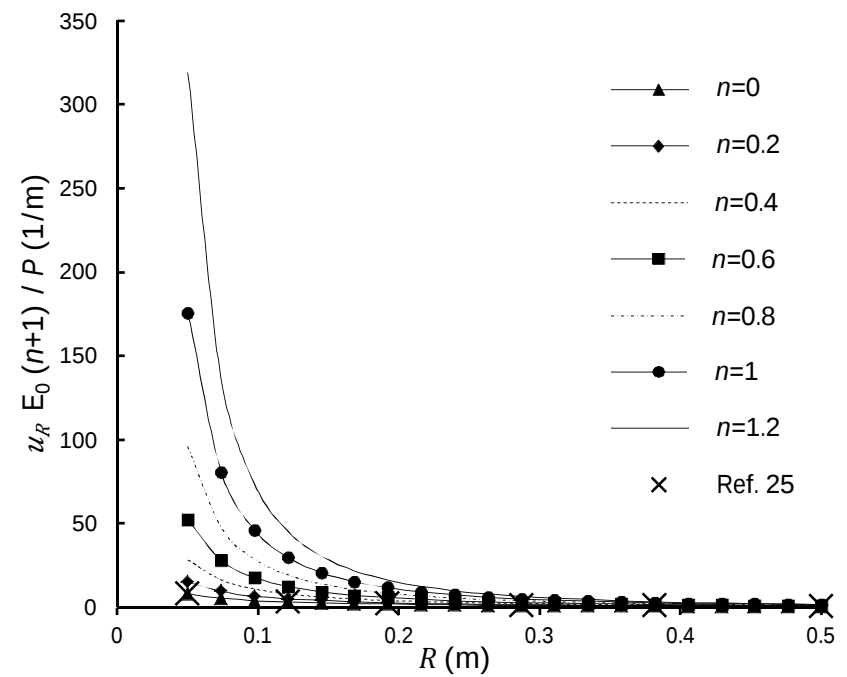
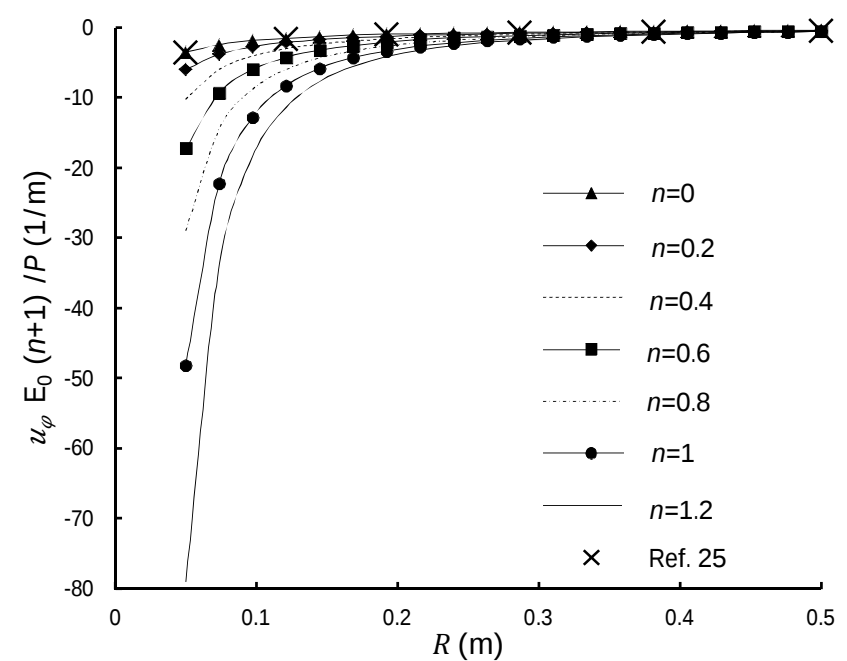
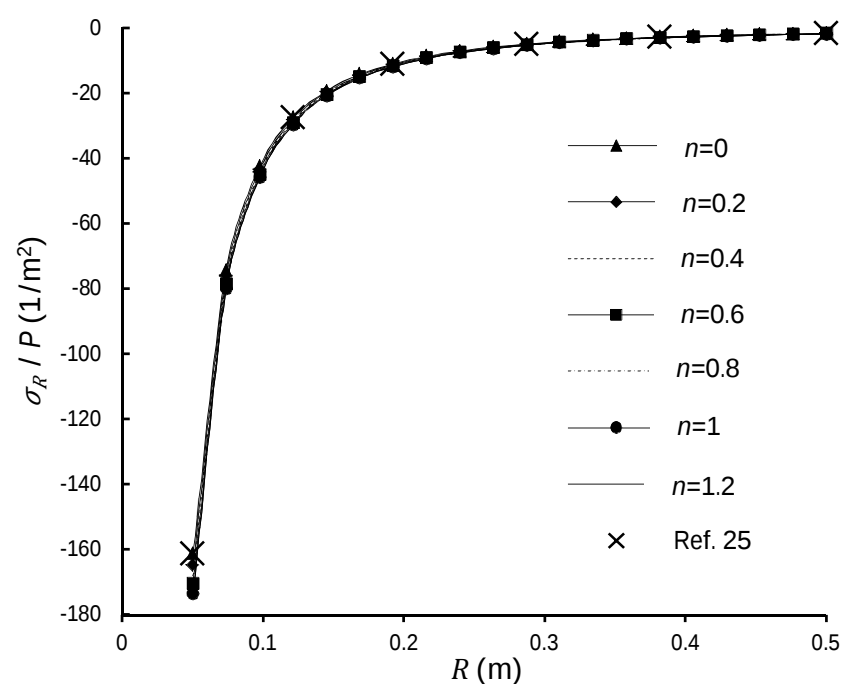
با رسم توزیع تنش عمودی σ_z بر حسب φ در مختصات استوانه‌ای شکل 7، مشاهده می‌شود که با افزایش درجه ناهمگنی حداکثر مقدار تنش عمودی σ_z ، ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد.

چگونگی توزیع تنش و تغییر مکان نیم فضا تحت بار متمرکز بر حسب R در شکل‌های 8-13 نشان داده شده است. نمودارها در $\varphi = \pi/6$ ترسیم شده‌اند و پارامتر ناهمگنی n در محدوده صفر (حالت همگن) تا $1/2$ تغییر

شکل 11 تغییرات σ_ϕ بر حسب R شکل 12 تغییرات u_z بر حسب R شکل 13 تغییرات σ_z بر حسب R

روابط حاکم بر نیم فضای همگن را دارد. با توجه به حل ارائه شده مشخص شد، میدان تنش یک نیم فضا تحت بار متمرکز، فارغ از خصوصیات ماده همواره با مجذور شعاع در مختصات کروی نسبت معکوس دارد.

مختصات کروی تغییر می‌کند و تحت اثر بار متمرکز عمود بر سطح قرار دارد، ارائه شد. در مورد تأثیر پارامتر ناهمگنی ماده روی توزیع تنش و تغییر مکان با ذکر مثال‌هایی بحث شد. روابط محاسبه شده برای میدان تنش و تغییر مکان یک نیم فضای ناهمگن تحت بار متمرکز، قابلیت کاهش یافتن به

شکل 8 تغییرات u_R بر حسب R شکل 9 تغییرات u_ϕ بر حسب R شکل 10 تغییرات σ_R بر حسب R

5- فهرست علائم

E	مدول یانگ
e_R	کرنش شعاعی
e_φ	کرنش زاویه‌ای در راستای φ
e_θ	کرنش زاویه‌ای در راستای θ
$e_{R\varphi}$	کرنش برشی
u_R	تغییر مکان شعاعی
u_φ	تغییر مکان زاویه‌ای
u_z	تغییر مکان عمودی
علائم یونانی	
ϑ	نسبت پواسون
σ_R	تنش شعاعی
σ_φ	تنش زاویه‌ای در راستای φ
σ_θ	تنش زاویه‌ای در راستای θ
σ_z	تنش عمودی
$\tau_{R\varphi}$	تنش برشی

6- ضمایم

ضمیمه آ

بیان پارامترهای بکار رفته در روابط (29) تا (32)

$$a = \frac{1}{4} (3\sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (1)$$

$$b = \frac{1}{4} (3\sqrt{-1 + \vartheta} - \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (2)$$

$$c = \frac{1}{4} (5\sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (3)$$

$$d = \frac{1}{4} (5\sqrt{-1 + \vartheta} - \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (4)$$

$$e = \frac{1}{4} (9\sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (5)$$

$$g = (-3 + 3\vartheta + \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (6)$$

$$h = (-3 + 3\vartheta - \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (7)$$

$$i = (-7 + 7\vartheta - \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (8)$$

$$j = (-7 + 7\vartheta + \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (9)$$

$$k = 1/4 (7\sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / \sqrt{-1 + \vartheta} \quad (10)$$

$$l = (-5 + 5\vartheta - \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (11)$$

$$m = (-5 + 5\vartheta + \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (12)$$

$$n = (-9 + 9\vartheta + \sqrt{-1 + \vartheta} + \sqrt{(4n^2 \vartheta + (-4 + 4\vartheta)n - 1 + \vartheta)}) / (-4 + 4\vartheta) \quad (13)$$

7- مراجع

- [1] M.J. Boussinesq, *Application Des Potentials, a l' Etude de l' Equilibre et du Mouvement Des Solides Elastiques*, Paris: Gauthier-Villars, 1885.
- [2] V. Cerruti, Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti, *Rendiconti Reale Accademia dei Lincei Roma*, series 4, pp. 785-792, 1888.
- [3] R. Mindlin, Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics*, Vol. 7, pp.195-202, 1936.
- [4] R. Gibson, Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space, *Geotechnique*, Vol. 17, pp. 58-67, 1967.
- [5] R. Gibson, Kalsi GS, The surface settlement of a linearly inhomogeneous cross-anisotropic elastic half-space, *Z Angew Math Phys*, Vol. 25, pp. 843-847, 1974.
- [6] J. Booker, Balaam NP, Davis EH, The behavior of an elastic non-homogeneous half-space. Part I—line and point loads, *Int J Numer Anal Meth Geomech*, Vol. 9, pp. 353-367, 1985.
- [7] J. Booker, Balaam NP, Davis EH. The behavior of an elastic non-homogeneous half-space. Part II—circular and strip footings, *Int J Numer Anal Meth Geomech*, Vol. 9, pp. 369-381, 1985.
- [8] P. Kumar, Stress concentration due to underground excavation in cross-anisotropic and nonhomogeneous elastic halfspace, *Comput Struct*, Vol. 25, pp. 687-694, 1987.
- [9] R. Rajapakse, A vertical load in the interior of a nonhomogeneous incompressible elastic half-space, *Q J Mech Appl Math*, Vol. 43, pp. 1-14, 1990.
- [10] R. Stark, J. Booker, Surface displacements of a nonhomogeneous elastic half-space subjected to uniform surface tractions. Part I—loading on arbitrarily shaped areas, *Int J Numer Anal Meth Geomech*, Vol. 21, pp. 361-378, 1997.
- [11] R. Stark, J. Booker, Surface displacements of a nonhomogeneous elastic half-space subjected to uniform surface tractions. Part II—loading on rectangular shaped areas, *Int J Numer Anal Meth Geomech*, Vol. 21, pp. 379-395, 1997.
- [12] N. Schwarzer, F. Richter, G. Hecht, The elastic field in a coated half space under hertzian pressure distribution, *Surface and Coatings Technology*, Vol. 114, pp. 292-303, 1999.
- [13] U. Holzlohner, Strip loads on a non-linear heterogeneous halfspace, *Geotechnique*, Vol. 51, pp. 655-664, 2001.
- [14] S. Aizikovic, V. Alexandrov, J. Kalker, L. Krenev, I. Trubchik, Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth of the elastic properties, *Int J Solids Struct*, Vol. 39, pp. 2745-2772, 2002.
- [15] C. Wang, C. Tzeng, E. Pan, J. Liao, Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogeneous transversely isotropic half-space, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 40, pp. 667-685, 2003.
- [16] C. Kuo, Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-space subjected to contact loading, *Int J Solids Struct*, Vol. 44, pp. 860-873, 2007.
- [17] H. Xu, X. Yao, X. Feng, H. Yeh, Fundamental solution of a power-law orthotropic and half-space functionally graded material under line loads, *Composites Science and Technology*, Vol. 68, pp. 27-34, 2008.
- [18] S. Chen, C. Yan, P. Zhang, H. Gao, Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space, *J Mech Phys Solids*, Vol. 57, pp. 1437-1448, 2009.
- [19] R. Kulchitsky-Zhyhailo, G. Rogowski, Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space, *Tribol Int*, Vol. 43, pp. 1592-1601, 2010.
- [20] Kun Zhou, W. Chen, L. Keer, X. Ai, K. Sawamiphakdi, P. Glaws, Q. Wang, Multiple 3D inhomogeneous inclusions in a half space under contact loading, *Mechanics of Materials*, Vol. 43, pp. 444-457, 2011.
- [21] Xu Guo, F. Jin, H. Gao, Mechanics of non-slipping adhesive contact on a power-law graded elastic half-space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 2565-2575, 2011.
- [22] R. Kulchitsky-Zhyhailo, A. Bajkowski, Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 54, pp. 105-112, 2012.
- [23] A. Talezadeh Lari, M. Sadighi, Numerical analysis of the fracture parameters in the sliding contact problem between a rigid flat punch and a FG semi-infinite medium in the presence of a surface crack, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 14-24, 2014. (In Persian)
- [24] Praveen G.N. and Reddy J.N., Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, pp 4457-4476, 1998
- [25] M.H. Sadd, *Elasticity, Theory, Application, Numerics*, 2nd ed., Academic Press, 2009.
- [26] M. Abramovitz, I.A. Stegun (Editors), *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Tables*, New York, Dover, 1972.