



استفاده از روش هم-چرخشی برای تحلیل غیر خطی دینامیکی سازه تنسگریتی

شیرکو فاروقی^{1*}، مهدی بامداد²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
 2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
 *aroomie, صندوق پستی 57155-419 shirko@iust.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 26 خرداد 1393
 پذیرش: 03 شهریور 1393
 ارائه در سایت: 23 مهر 1393
 کلید واژگان:
 روش هم-چرخشی
 تحلیل دینامیک غیر خطی
 تنسگریتی
 بار گذاری دینامیکی
 پیش تنش

در این مقاله، فرمولاسیون جدید برای تحلیل غیرخطی دینامیکی سازه‌های دوبعدی میله ارائه شده است. این فرمولاسیون بر پایه و اساس روش هم-چرخشی دینامیکی المان میله دو بعدی است. ایده اصلی روش هم-چرخشی این است که موقعی که المان در مختصات محلی از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت می‌کند، حرکات صلب از تغییر فرم خالص جدا می‌شود. در این مقاله، با استفاده از ایده روش هم-چرخشی، علاوه بر بردار نیروهای داخلی، ماتریس سختی مماسی، بردار نیروی اینرسی و ماتریس سختی مماسی دینامیکی نیز بر اساس این ایده بدست آورده می‌شوند. ماتریسهای جرم، ژیروسکوپ و سختی مماسی دینامیکی بطور مستقیم از مشتق گرفتن ماتریس جهت برحسب جابجایی‌های کلی و اعضای ماتریس جهت بدست آورده می‌شوند. با استفاده از فرمولاسیون جدید ارائه شده، می‌توان پاسخ دینامیکی سازه دو بعدی اسمبل شده بوسیله المان میله را بررسی نمود که در این مقاله پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی تحت اثر بار دینامیکی به عنوان مثال مورد بررسی قرار داده شده است. تنسگریتی به سازه‌های دو بعدی سبک گفته می‌شوند که از نخ به عنوان سازه کششی و میله به عنوان سازه فشاری تشکیل شده است. پایداری سازه تنسگریتی بوسیله تعادل تنش داخلی بین اعضای کششی و فشاری است. سازه تنسگریتی به دلیل وجود نیروی پیش تنش دارای رفتار غیر خطی است. دو مثال عددی برای نشان دادن صحت و کارایی فرمولاسیون جدید ارائه شده است و نتایج نشان می‌دهند که فرمولاسیون جدید دارای نرخ همگرایی بهتری نسبت به مدل‌های موجود است.

Using co-rotational approach for analysing nonlinear dynamic tensegrity structures

Shirko Faroughi^{1*}, Mehdi Bamdad²

1- Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran.
 2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
 *P.O.B. 57155419 Urmia, Iran, shirko@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 16 June 2014
 Accepted 25 August 2014
 Available Online 15 October 2014

Keywords:
 Co-rotational approach
 nonlinear dynamic analysis
 tensegrity
 dynamic loading
 pre-stress

ABSTRACT

In this paper, new formulation is developed for nonlinear dynamic analysis of 2-D truss structures. This formulation is based on dynamics of co-rotational 2-D truss. The goal of co-rotational approach is to separate rigid body motions from pure deformations at the local element level. Here, using this approach internal force vector and tangent stiffness matrix, inertia force vector and the tangent dynamic matrix are derived. The inertia force vector, tangent dynamic matrix, mass matrix and gyroscopic matrix are directly obtained from derivation of current orientation matrix with respect to global displacements or each of the term current orientation matrixes. Using this new formulation, nonlinear response of any 2-D truss structures can be examined. Here, for example response of tensegrity structures under dynamic loads is investigated. Tensegrity structures are a class of structural system composed of cable (in tension) and strut (in compression) components with reticulated connections, and assembled in a self-balanced fashion. Their integrity is based on a balance between compression and tension. These structures have nonlinear behaviour due to pre-stress forces. Two numerical examples are presented to illustrate the new formulation and results show that new formulation has higher convergence rate than existing model ones.

1- مقدمه

کلی، در اجزای محدود از یک روش دیگر به نام روش هم-چرخشی نیز استفاده می‌شود [1-5]. روش هم-چرخشی زمانی که مدهای حرکت نسبت به مدهای صلب کمتر باشند، موثر است [6]. ایده اصلی روش هم-چرخشی این است که در میدان جابجایی سازه، مقدار تغییر فرم سازه بطور کامل از

در اجزای محدود برای مدلسازی غیر خطی دینامیکی المان میله از دو روش لاگرانژ کلی¹ و لاگرانژ به روز شده² استفاده شده است. علاوه بر این دو روش

1- Total Lagrangian
 2- Update Lagrangian

Please cite this article using:

Sh. Faroughi, M. Bamdad, Using co-rotational approach for analysing nonlinear dynamic tensegrity structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 245-250, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

پایه پیش تنش از روش ارائه شده توسط لی و همکارانش [17] بدست آورده می‌شوند. در این مقاله ابتدا، نحوه بدست آوردن فرمولاسیون دینامیکی حاکم بر المان میله دو بعدی بر اساس روش هم-چرخشی بیان خواهد شد. به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی، دو مسئله عددی تحلیل خواهد شد و نتایج حاصل از بررسی‌های عددی، نشان می‌دهد که نرخ همگرایی فرمولاسیون جدید نسبت به مدل‌های بدست آمده از روش لاگرانژ به روز شده بیشتر است و همچنین با استفاده از این فرمولاسیون به سادگی می‌توان از ماده‌های مختلف برای تحلیل سازه‌های دو بعدی استفاده نمود.

2- چهار چوب هم-چرخشی

در این قسمت ابتدا بردار نیروهای داخلی، ماتریس سختی مماسی بدست آورده می‌شود و در ادامه با استفاده از همان چهارچوب هم-چرخشی بردار نیروی اینرسی و ماتریس دینامیکی سختی مماسی ارائه می‌گردد.

2-1- سیستم مختصات و سینماتیک میله

المان میله همراه با دو گره در سیستم مختصات کلی (X, Y) در شکل 1 نشان داده شده است. مختصات گره‌های 1 و 2 در سیستم مختصات کلی برابر با (x_1, y_1) و (x_2, y_2) است.

برای المان میله بردار جابجایی کلی به صورت رابطه (1) بیان می‌شود:

$$U = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2]^T \quad (1)$$

و بردار جابجایی محلی به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود:

$$\bar{U} = l_n - l_0 \quad (2)$$

که l_n معرف طول فعلی و l_0 معرف طول اولیه المان میله هستند که به صورت رابطه (3) بیان می‌شوند:

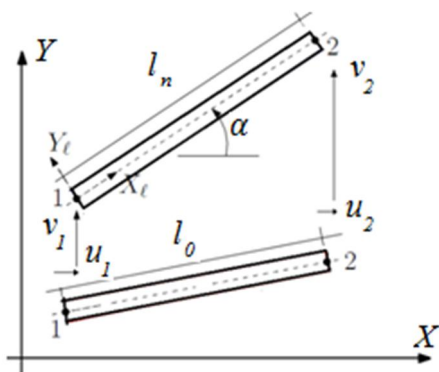
$$l_n = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 + u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 + v_1)^2} \\ l_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3)$$

با توجه به شکل 1 زاویه فعلی که سیستم مختصات محلی نسبت به سیستم مختصات کلی خواهد داشت طبق رابطه (4) برابر است با:

$$c = \cos \alpha = \frac{(x_2 + u_2 - x_1 + u_1)}{l_n} \\ s = \sin \alpha = \frac{(y_2 + v_2 - y_1 + v_1)}{l_n} \quad (4)$$

برای تبدیل نمودن بردار نیرو از مختصات محلی به کلی باید رابطه تغییرات بین مختصات محلی و کلی را بدست آورد. برای بدست آوردن این رابطه، تغییرات معادله (2) به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$\delta \bar{U} = \delta l_n \\ \delta \bar{U} = [-c \quad -s \quad c \quad s] \delta U = B \delta U \quad (5)$$



شکل 1 نمایش المان میله

حرکت صلب سازه جدا می‌شود. در این روش ابتدا تغییر فرم میله در مختصات محلی بیان می‌گردد. در حالی که قسمت اعظم هندسه غیر خطی سازه در ماتریس تبدیلی که مربوط به تبدیل بردار نیروها و ماتریس سختی مماسی از مختصات محلی به کلی است، شرکت می‌کند. یکی از مزیت‌های اصلی روش هم-چرخشی این است که مدل‌های ماده مختلفی به آسانی در مختصات محلی مدلسازی خواهند شد و المان‌های خطی موثر به طور اتوماتیک به فرمولاسیون غیر خطی تبدیل خواهند شد [7]. روش هم-چرخشی برای اولین بار توسط ویمر [8] و بیلشستو [9] ارائه شد. یکی از مرورهای موفق در زمینه هم-چرخشی توسط فلیپا و هاگیون [10] ارائه شده است.

در ادبیات موضوع، تحلیل غیر خطی استاتیکی سازه تنسگریتی با استفاده از روش هم-چرخشی قبلاً توسط نویسندگان این مقاله ارائه شده است [6]. همچنین در ادبیات موضوع برای تحلیل غیر خطی دینامیکی سازه-های مهندسی از روش هم-چرخشی استفاده شده است [5]. اما هدف اصلی این مقاله، استفاده از روش هم-چرخشی برای بدست آوردن فرمولاسیون المان میله برای تحلیل غیر خطی دینامیکی سازه دو بعدی است که بنا به دانش نویسندگان در هیچ مرجعی ارائه نشده است.

در این مقاله برای بدست آوردن بردار نیروی اینرسی، ماتریس ژبروسکوپ و ماتریس سختی دینامیکی مماسی، از همان چهارچوب هم-چرخشی که برای بدست آوردن بردار نیروی داخلی و ماتریس سختی مماسی بکار گرفته شده بود، استفاده می‌شود. در نتیجه بردار نیروی اینرسی، ماتریس سختی دینامیکی و ماتریس ژبروسکوپ بصورت فرم بسته‌ای برحسب ترم‌های جابجایی کلی و یا برحسب ترم‌های ماتریس انتقال بدست می‌آیند.

فرمولاسیون بدست آمده برای تحلیل هر نوع مسئله دو بعدی غیر خطی دینامیکی قابل استفاده است که در این مقاله با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده برای تحلیل و بررسی پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی تحت اثر بار دینامیکی استفاده شده است.

تنسگریتی نوعی سازه است که ماهیت آن مبتنی بر تعادل بین اعضای کششی و فشاری است. اعضای فشاری (میله) سازه تنسگریتی بوسیله اعضای کششی (کابل) به هم وصل شده‌اند. این سازه‌ها به علت داشتن نسبت سختی به جرم بالا به عنوان جانشین مناسب برای سازه‌های عمرانی، مهندسی مکانیک و هوا فضا معرفی شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان از پل‌های معلق نام برد، که در این سازه‌ها اعضای کششی اغلب کابل هستند. علاوه بر این، در سال‌های اخیر از سازه تنسگریتی مشبک در ساختن سقف‌ها استفاده می‌شود [11,12]. سازه‌های تنسگریتی در ربات‌ها به علت پایین بودن جرمشان استفاده می‌شوند [13,14]. اما یکی از مزیت‌های اصلی استفاده از سازه تنسگریتی علاوه بر پایین بودن جرم آن، امکان تا شدن به علت داشتن تاندون است. این ویژگی سبب می‌شود که حجم سازه کوچک و به سادگی قابل حمل و نقل شود، که این مزیت برای سازه‌های هوا فضا بسیار مطلوب است [15].

تحلیل کامل سازه تنسگریتی به دو قسمت کلی تقسیم می‌شود. قسمت اول به شکل یابی¹ معروف است. شکل یابی فرایندی است که در آن بر اساس یک توپولوژی مشخص، هندسه پایدار سازه ایجاد گردد. قسمت دوم از تحلیل سازه تنسگریتی، بررسی و تحلیل رفتار سازه تحت بار خارجی است [16]. در این مقاله فرض می‌شود که مرحله شکل یابی انجام شده و همچنین ضرایب

با جایگذاری معادله (13) در معادله (12)، انرژی جنبشی المان میله به فرم رابطه (14) بیان می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} \dot{U}^T M \dot{U} \quad (14)$$

که M ماتریس جرم المان میله در مختصات کلی است که به صورت رابطه (15) قابل محاسبه است:

$$M = T^T M^I T \quad (15)$$

که M^I و T به ترتیب ماتریس جرم در مختصات محلی و ماتریس انتقال می‌باشند. ماتریس جرم المان میله در مختصات محلی طبق رابطه (16) برابر است با:

$$M^I = \frac{\rho A l_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

و ماتریس انتقال طبق رابطه (17) برابر است با:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (17)$$

بردار نیروی اینرسی با اعمال نمودن معادله لاگرانژ به صورت رابطه (18) بدست آورده می‌شود:

$$f^e = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{U}} \right) - \left(\frac{\partial E}{\partial U} \right) \quad (18)$$

ترم اول معادله (18)، با جایگذاری معادلات (14-17) در معادله (18)، به فرم رابطه (19) نوشته خواهد شد:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{U}} \right) = M \ddot{U} + \dot{M} \dot{U} \quad (19)$$

با توجه به معادله (15) ماتریس جرم M فقط تابعی از زاویه α بوده است، در نتیجه ترم $\dot{M}$ به صورت رابطه (20) بیان می‌شود:

$$\dot{M} = \frac{\partial M}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (20)$$

با جایگذاری معادله (6) در معادله (20)، مشتق ماتریس جرم به صورت رابطه (21) بازنویسی خواهد شد:

$$\dot{M} = \frac{\partial M}{\partial \alpha} \left(\frac{C}{l_n} \dot{U} \right) \quad (21)$$

ترم $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ را می‌توان به راحتی از معادله (15) بدست آورد. طبق رابطه (22) داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\partial T^T}{\partial \alpha} M^I T + T^T M^I \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (22)$$

ترم $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ را می‌توان از معادله (17) بدست آورد. طبق رابطه (23) داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = RT \quad (23)$$

ترم دوم معادله (18) که در واقع مشتق گرفتن نسبت به جابجایی هست بصورت رابطه (24) قابل محاسبه است:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial U} \right) = \left(\frac{1}{2} \dot{U}^T \frac{\partial M}{\partial \alpha} \dot{U} \right) \frac{C}{l_n} \quad (24)$$

با جایگذاری معادلات (19-24) در معادله (18)، بردار نیروی اینرسی به صورت رابطه (25) نوشته خواهد شد:

همچنین تغییرات زاویه α را می‌توان به فرم رابطه (6) محاسبه نمود:

$$\alpha \delta = \frac{1}{l_n} [s \quad -c \quad -s \quad c] \delta U \quad (6)$$

2-1-1- محاسبه بردار نیروی داخلی و ماتریس سختی مماسی

با توجه به اینکه کار مجازی در هر دو سیستم مختصات محلی و کلی باهم برابر هستند در نتیجه رابطه (7) برقرار است:

$$V = \delta U^T f^g = \delta \bar{U}^T f^I \quad (7)$$

$$f^g = B^T f^I$$

در اینجا f^I در واقع همان نیروی محوری المان میله است که به صورت رابطه (8) قابل محاسبه است:

$$f^I = \frac{EA}{l_0} \bar{U} \quad (8)$$

که E و A به ترتیب مدول الاستیسیته و سطح مقطع المان میله هستند.

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (7) ماتریس سختی مماسی به صورت رابطه (9) بدست آورده می‌شود:

$$\delta f^g = K^g \delta U$$

$$\delta f^g = \delta B^T f^I + B^T \delta f^I \quad (9)$$

با انجام محاسبات جبری معادله (9) را می‌توان به فرم زیر بیان نمود

$$\delta f^g = \delta (B^T f^I)$$

$$= B^T \delta f^I + \delta B^T f^I$$

$$= B^T \delta (k^I \bar{U}) + \delta B^T f^I$$

$$= B^T k^I B \delta U + \delta B^T f^I \quad (10\text{-الف})$$

که ترم δB^T با دیفرانسیل‌گیری از بردار B که در معادله (5) مشخص شده است بدست آورده می‌شود.

$$\delta B^T = \delta [-c \quad -s \quad c \quad s]^T$$

$$= [s \quad -c \quad -s \quad c]^T \delta \alpha$$

$$= \frac{1}{l_n} [s \quad -c \quad -s \quad c] [s \quad -c \quad -s \quad c]^T \delta U \quad (10\text{-ب})$$

اکنون می‌توان معادلات (10-الف) و (10-ب) را باهم جمع نمود و با مقایسه نمودن با معادله (9) ماتریس سختی مماسی به فرم رابطه (10-ج) بدست خواهد آمد:

$$K^g = B^T k^I B + f^I \frac{CC^T}{l_n} \quad (10\text{-ج})$$

که مقادیر C و k^I طبق رابطه (11) برابر است با:

$$k^I = \frac{EA}{l_0}$$

$$C = [s \quad -c \quad -s \quad c] \quad (11)$$

2-2- محاسبه بردار نیروی اینرسی و ماتریس جرم

در این قسمت برای بدست آوردن بردار نیروی اینرسی و ماتریس جرم از همان تعریف سینماتیک قسمت قبل استفاده می‌شود. انرژی جنبشی یک المان میله طبق رابطه (12) برابر است با:

$$E = \frac{1}{2} \rho \left(\int \dot{u}^g{}^2 + \dot{v}^g{}^2 \right) Adl \quad (12)$$

که $\dot{u}^g$ و $\dot{v}^g$ به ترتیب سرعت‌های کلی و ρ جرم در واحد حجم المان است.

با توجه به شکل 1، مقادیر سرعت‌های کلی برای هر المان از طریق رابطه (13) محاسبه می‌شود:

$$\dot{u}^g = \dot{u}_1 + \frac{x}{l_0} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\dot{v}^g = \dot{v}_1 + \frac{x}{l_0} (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \quad (13)$$

جایی، سرعت و شتاب استفاده نمود تا اینکه مقدار g_{n+1} در مرحله $n+1$ برابر صفر و یا از یک مقدار کوچک در نظر گرفته شده کمتر گردد.

برای بدست آوردن ماتریس سختی مماسی دینامیکی، مشتق هر یکی از مؤلفه‌ها را باید بدست آورد. در ادامه ماتریس سختی مماسی، جرم و ماتریس ژبروسکوپ به طریق رابطه (30) قابل محاسبه می‌باشند:

$$K^g = \frac{\partial f^g}{\partial \dot{U}}; M = \frac{\partial f^e}{\partial \ddot{U}}; D = \frac{\partial f^e}{\partial \dot{U}} = \frac{\partial M}{\partial \alpha} \left(\frac{C}{I_n} \dot{U} \right) + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \left(\dot{U} \frac{C}{I_n} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \left(\dot{U} \frac{C}{I_n} \right) \right)^T \quad (30)$$

در این مقاله از محاسبه ترم $\frac{\partial f^e}{\partial \dot{U}}$ صرف نظر شده است به این دلیل که این ترم فقط در ماتریس سختی دینامیکی نقش دارد. به عبارت دیگر، این ترم فقط در نرخ همگرایی نقش دارد. در نتیجه ماتریس سختی مماسی دینامیکی برابر رابطه (31) خواهد بود:

$$K^d = K^g + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} D \quad (31)$$

در اینجا ترمهای β و γ ضرایب نیومارک هستند.

3-1- فلوچارت روش هم-چرخشی برای تحلیل مسایل دینامیکی

در این قسمت الگوریتم روش هم-چرخشی برای تحلیل مسایل دینامیکی سازه تنسگریتی ارائه می‌شود.

1- وارد نمودن مدول الاستیسیته، چگالی و سطح مقطع المانهای میله و نخ.

2- تشکیل سازه تنسگریتی بر اساس ورودی فوق برای یافتن بیشینه فرکانس طبیعی سازه.

3- محاسبه گام زمانی $\Delta t = \frac{1}{\omega_{\max}}$ و تقسیم‌بندی زمان اجرا برنامه. * تکرار قسمت چهارم به بعد برای هر گام زمانی:

4- محاسبه نیروهای داخلی و ماتریس سختی مماسی سازه تنسگریتی با استفاده از روابط (7) و (10).

5- محاسبه ماتریس جرم، ماتریس ژبروسکوپ، ماتریس سختی مماسی دینامیکی و بردار نیرو اینرسی با استفاده از روابط (15)، (30)، (31) و (25).

6- یافتن باقیمانده بردار نیرو از معادله (26) و سپس محاسبه نرم باقیمانده بردار نیرو.

7- اگر نرم باقیمانده بردار نیرو کوچک‌تر از مقدار مورد نظر باشد به گام دهم رجوع شود.

8- اگر نرم باقیمانده بردار نیرو بزرگ‌تر از مقدار مورد نظر باشد، با استفاده از روش نیومارک، جابجایی، سرعت و شتاب را به‌روز نموده، و با استفاده از جابجایی، سرعت و شتاب جدید بردارهای نیروهای داخلی و اینرسی و ماتریسهای سختی مماسی را تشکیل داده و با استفاده از نیوتن-رافسون این مرحله تکرار خواهد شد تا نرم باقیمانده بردار نیرو از مقدار از پیش تعیین شده کوچک‌تر گردد.

$$f^e = M\ddot{U} + \dot{M}\dot{U} - \left(\frac{1}{2} \dot{U}^T \frac{\partial M}{\partial \alpha} \dot{U} \right) \frac{C}{I_n} \quad (25)$$

3- سازه تنسگریتی

معادلات ارائه شده در قسمت پیشین برای حل هر نوع مسایل غیر خطی دینامیکی سازه‌های میله‌ای کاربرد دارد. در این مقاله سازه تنسگریتی به عنوان مثال بررسی خواهد شد.

سازه تنسگریتی به عنوان یک دسته ویژه از سازه‌های سبک شناخته می‌شوند. پایداری سازه تنسگریتی به تعادل تنش داخلی بین اعضای فشاری و کششی بستگی دارد. در این کار فرض شده است که مرحله تشکیل دادن تنسگریتی کامل انجام شده است. در نتیجه مختصات گره‌ها، طول اعضای پیش تنش و بردار ضریب چگالی نیرو مشخص شده‌اند. اکنون سازه تحت تأثیر بارگذاری خارجی دینامیکی قرار گرفته و به علت وجود پیش تنش سازه مذکور غیر خطی خواهد شد. اکنون با استفاده از روابط ارائه شده، پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

معادله حرکت غیر خطی سازه تنسگریتی را می‌توان به فرم رابطه (26)

نوشت:

$$f^e + f^g - f^{\text{ext}} = 0 \quad (26)$$

که f^e ، f^g و f^{ext} به ترتیب بردار نیروهای اینرسی، داخلی و خارجی می‌باشند. روش نیومارک ضمنی برای حل معادله (26) مورد استفاده قرار خواهد گرفت. معادله (26) در گام $n+1$ را می‌توان به فرم رابطه (27) نوشت:

$$f_{n+1}^i - f_{n+1}^{\text{ext}} = g_{n+1} \quad (27)$$

که g_{n+1} در واقع نیروی خارج از تعادل دینامیکی است. اگر تمام اطلاعات در مرحله n موجود باشد با استفاده از روش پیش‌بینی و تصحیح معادله (26) قابل حل خواهد بود. ترم f_{n+1}^i را می‌توان به فرم رابطه (28) بازنویسی نمود.

$$f_{n+1}^i = f_n^i + K_n^d \Delta U \quad (28)$$

که K_n^d ماتریس سختی مماسی دینامیکی است و ΔU اختلاف جابه‌جایی در گام $n+1$ و گام n است. با جایگذاری معادله (28) در معادله (27) مقدار ΔU بدست آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش نیومارک مقادیر تصحیح شده سرعت و شتاب بدست می‌آیند. طبق رابطه (29) داریم:

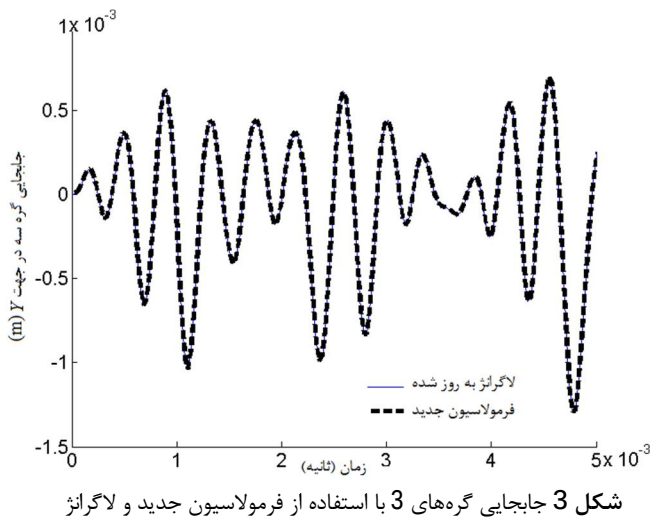
$$U_{n+1} = U_n + \Delta U$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t \left((1-\gamma)\ddot{U}_n + \gamma \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} (U_{n+1} - U_n) \right) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_n - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{U}_n \right)$$

$$\ddot{U}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (U_{n+1} - U_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_n - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{U}_n \quad (29)$$

که γ و β پارامترهای روش نیومارک هستند.

در ادامه مقادیر جابه‌جایی، سرعت و شتاب جدید بدست آمده را در معادله (27) جایگذاری نموده اگر مقدار g_{n+1} برابر صفر شد جواب‌های بدست آمده در مرحله $n+1$ هستند ولی اگر مقدار g_{n+1} مخالف صفر باشد می‌توان از روش نیوتن-رافسون برای بدست آوردن مقادیر بهبودیافته جابه-

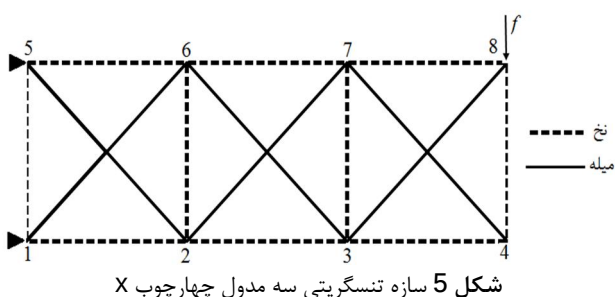
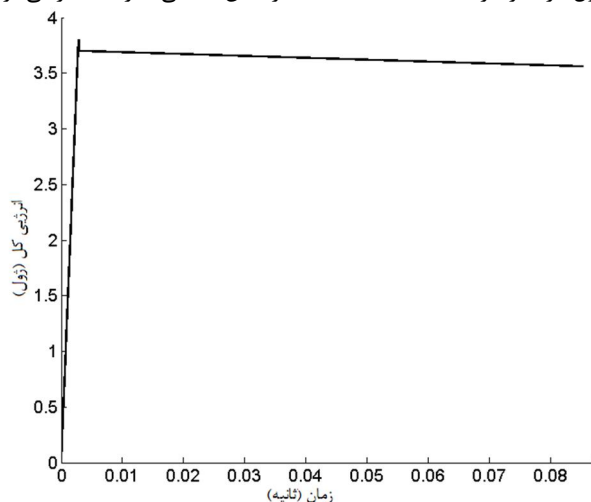


در تحلیل‌های دینامیکی که از روش نیومارک استفاده می‌شود به علت وجود دمپینگ عددی، اتلاف انرژی کلی در طول زمان فرایند تحلیل رخ خواهد داد. شکل 4 نشان‌دهنده اتلاف انرژی در مدت زمان انجام تحلیل است. نتایج نشان می‌دهد که فرمولاسیون جدید در مدت زمان انجام تحلیل پایدار است. اتلاف انرژی بین ثانیه $t = 0.005$ s تا $t = 0.08$ s در حدود 0/03% است.

2-4- مثال دوم: سازه تنسگریتی سه مدول چهارچوب X

سازه تنسگریتی سه مدول چهارچوب X همچون شکل 5 در نظر گرفته می‌شود. این سازه از 10 المان نخ و 6 المان میله تشکیل شده است. شرایط مرزی در شکل 5 نشان داده شده است.

مدول الاستیسیته، چگالی و سطح مقطع المانهای میله و نخ مشابه مسئله اول در نظر گرفته شده است. بیشینه فرکانس طبیعی سازه تنسگریتی برابر



- 9- ذخیره جابجایی، سرعت و شتاب بدست آمده در این مرحله، به عنوان جابجایی، سرعت و شتاب در گام زمانی t_i .
- 10- اضافه نمودن گام زمانی Δt به t_i و تکرار مراحل چهارم تا نهم.

4- مثال عددی

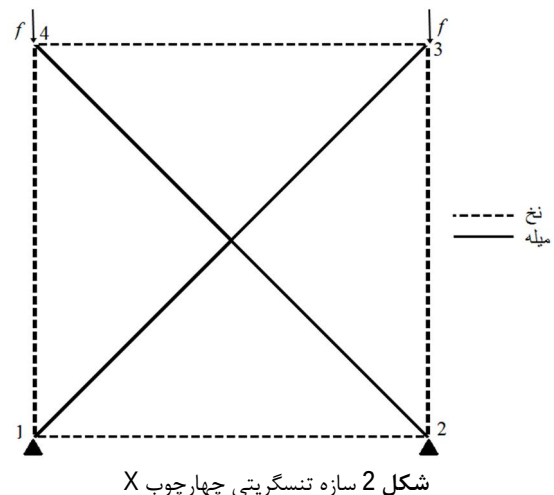
برای نشان دادن کارایی فرمولاسیون جدید، دو مثال عددی تحلیل و بررسی می‌شود. در این مثال‌ها پاسخ سازه تنسگریتی تحت بارگذاری دینامیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده با استفاده از فرمولاسیون جدید با نتایج بدست آمده بوسیله روش لاگرانژ به روز شده که به عنوان مرجع در نظر گرفته می‌شود، مقایسه شده‌اند. در کلیه مثال‌های تحلیل‌شده، گام زمانی برابر با $\Delta t = \frac{1}{\omega_{\max}}$ در نظر گرفته شده است. که $\omega_{\max}$ بیشینه فرکانس طبیعی سازه تنسگریتی است.

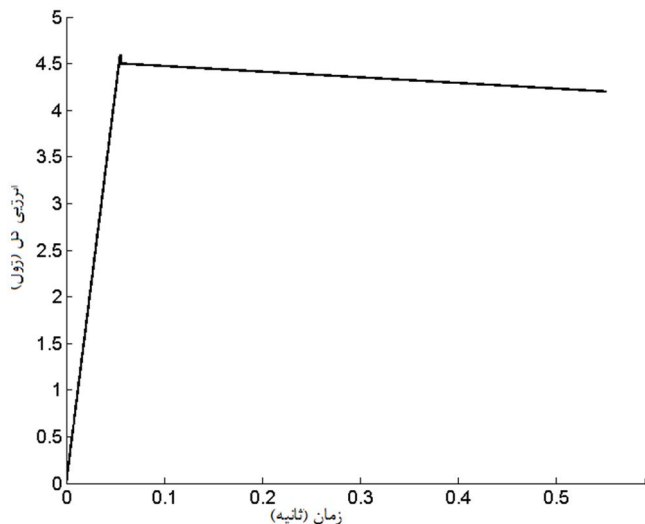
1-4- مثال اول: سازه تنسگریتی چهارچوب X

سازه تنسگریتی چهارچوب X همچون شکل 2 در نظر گرفته می‌شود. این سازه از 4 نخ و دو میله تشکیل شده است. شرایط مرزی در شکل 2 نشان داده شده است.

مدول الاستیسیته، چگالی و سطح مقطع المانهای نخ و میله به ترتیب $E_s = 70e9$ Pa، $\rho_s = 2740$ kg/m³، $A_s = 0.20e - 4$ m² و $E_b = 210e9$ Pa، $\rho_b = 7800$ kg/m³، $A_b = 0.35e - 4$ m² در نظر گرفته شده است. با توجه به داده‌های مورد استفاده، بیشینه فرکانس طبیعی سازه فوق برابر $f = 3159.14$ Hz است. در نتیجه گام زمانی برای تحلیل مسئله برابر $\Delta t = 2.8416e - 4$ s در نظر گرفته شده است. سازه تنسگریتی مورد نظر تحت تاثیر نیروی هارمونیک $F_{\text{ext}} = 1000\sin(6000\pi t)$ در دو گره 3 و 4 در جهت قائم است. با توجه به مقارن بودن سازه تنسگریتی جابجایی گره 3 تحت تاثیر نیروی هارمونیک با استفاده از فرمولاسیون جدید و روش لاگرانژ به روز شده در شکل 3 نشان داده شده است.

با توجه به شکل 3 نتایج بدست آمده بوسیله فرمولاسیون جدید دقیقاً با نتایج بدست آمده از روش لاگرانژ یکسان است. مدت زمان لازم و تعداد تکرار (180 گام زمانی) برای فرمولاسیون جدید 5s و 185 و برای روش لاگرانژ به روز شده برابر 7 s و تعداد تکرار 210 است. به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت که فرمولاسیون جدید دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش لاگرانژ به روز شده دارد.





شکل 7 نمایش اتلاف انرژی کل در مدت زمان اجرا

6- مراجع

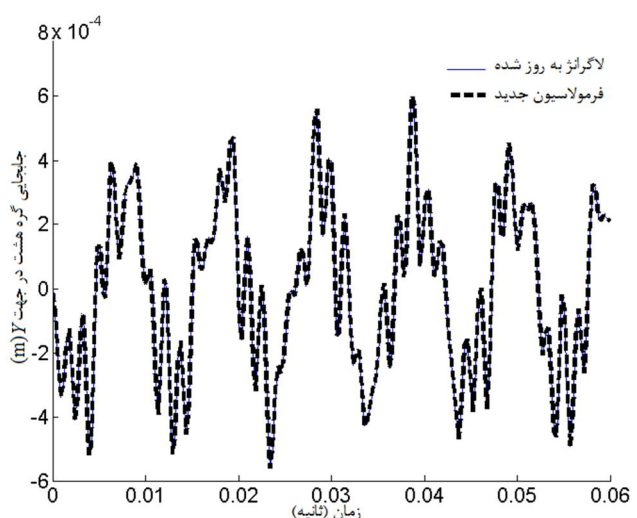
- [1] M. A. Crisfield, J. Shi, An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements, *Nonlinear Dynamic*, Vol. 9, pp. 37-52, 1994.
- [2] U. Galvanetto, M. A. Crisfield, An energy conserving co-rotational procedure for dynamics of planar beam structures, *International Journal Numerical Methods Engineering*, Vol. 39, pp.2265-2282, 1996.
- [3] K. M. Hsiao, J. Y. Lin, W.Y. Lin, A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, Vol. 169, pp.1-18, 1999.
- [4] K. Behdinan, M.C. Stylianou, B. Tabarrok, Co-rotational dynamic analysis of flexible beams, *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, Vol. 154, pp.151-161, 1998.
- [5] T. N. Le, J. M. Battini, M.Hijaj, A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures, *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, Vol. 154, pp.1982091, 2013.
- [6] A. Ghafori, sh. Faroughi, M. Bamdad, Geometrical nonlinear analysis and effect of pre-stress on tensegrity structures using co-rotational method, *Modares Mechanical Engineering*, (In Persian)
- [7] A. Eriksson, C. Pacoste, Element formulation and numerical techniques for stability problems in shells, *Computer Methods Applied Mechanic Enging*, Vol. 191, pp. 3775-3810, 2002.
- [8] G. Wempner, Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells, *International Journal Solid and structures*, Vol.5, pp. 117-153, 1969.
- [9] T. Belytschko, B.J. Hsieh, Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates, *International Journal Numerical Mathematic Engineering*, Vol. 7, pp. 255-271, 1973.
- [10] C. A. Felippa, B. Haugen, A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory, *Computer Methods Applied Mechanic Engineering*, Vol. 194, pp. 2285-2335, 2005.
- [11] S. Adriaenssen, M. Barnes, Tensegrity spline beam and grid shell structures, *Engineering Structure*, Vol. 23, pp. 29-36, 2001.
- [12] J. Quirant, M. Kazi-Aoual, and R. Motro, Designing tensegrity systems: the case of a double layer grid, *Engineering Structure*, Vol. 25, pp. 1121-1130, 2003.
- [13] J. Aldrich, *Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures*, PhD thesis, University of California, 2004.
- [14] M. Masic, R. Skelton, Open-loop control of class-2 tensegrity towers, *Proc. SPIE 5383*, pp.298-308, 2004.
- [15] H. Furuya, Concepts of deployable structures in space applications, *International Journal Space Structure*, Vol. 7, pp.143-152, 1992.
- [16] H. C. Tran, J. Lee, Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures, *ActaMechanical Science*, Vol. 27, pp. 938-949, 2011.
- [17] H. C. Tran, J. Lee, Self-stress design of tensegrity grid structures with exostresses, *International Journal Solid and structures*, Vol. 47, pp. 2660-2671, 2010.

$\Delta t = 2.9956e - 4$ s برابر گام زمانی برای $f = 3338.54$ Hz است. سازه تنسگریتی مورد نظر تحت تأثیر نیروی هارمونیک $F_{ext} = 1000\sin(12000\pi t)$ در گره 8 در جهت قائم است. جابجایی گره 8 تحت تأثیر نیروی هارمونیک با استفاده از فرمولاسیون جدید و روش لاگرانژ به روز شده در شکل 6 نشان داده شده است.

با توجه به شکل 6 نتایج بدست آمده بوسیله فرمولاسیون جدید دقیقاً با نتایج بدست آمده از روش لاگرانژ یکسان است. مدت زمان لازم و تعداد تکرار برای (200 گام زمانی) برای فرمولاسیون جدید 8s و 207 و برای روش لاگرانژ به روز شده برابر 13s و تعداد تکرار 260 است. به عبارت دیگر می توان نتیجه گرفت که فرمولاسیون جدید دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش لاگرانژ به روز شده است. شکل 7 نشان دهنده اتلاف انرژی در مدت زمان انجام تحلیل است. نتایج نشان می دهد که فرمولاسیون جدید در مدت زمان انجام تحلیل پایدار است. اتلاف انرژی بین ثانیه $t=0.07$ s تا $t=0.52$ s در حدود 0/065% است.

5- نتیجه گیری

در این مقاله یک فرمولاسیون جدید غیر خطی برای المان میله دوبعدی که برای تحلیل مسایل دینامیکی بکار گرفته می شود، ارائه گردید. این فرمولاسیون بر اساس روش هم-چرخشی است. اساس این روش بر این است که در مختصات محلی، جابجایی المان از حرکات صلب المان جدا می شود. در این مقاله، برای بدست آوردن نیروی اینرسی و ماتریس سختی مماسی دینامیکی از همان چهارچوب روش هم-چرخشی استفاده شده است. همچنین در این مقاله، ماتریس جرم، ژبروسکوپ و بردار نیروی اینرسی بصورت معادله تحلیلی بیان شده است. با استفاده از این فرمولاسیون می توان هر نوع تحلیل غیر خطی دینامیکی دو بعدی برای سازه هایی که بوسیله المان میله اسمبل شده اند، انجام داد که در این تحقیق، سازه تنسگریتی که به علت وجود نیروی پیش تنش حالت غیر خطی دارد، به عنوان مثال تحلیل شده است. نتایج نشان می دهد که فرمولاسیون جدید دارای دقت و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش لاگرانژ به روز شده است.



شکل 6 جابجایی گره 8 با استفاده از فرمولاسیون جدید و لاگرانژ