



تخمین بهینه متغیرهای حالت مخدوش با نویز رنگی یک سیستم دینامیکی با استفاده از فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت

مجتبی معصوم نژاد¹، محسن نهاله کاه²، علی جمالی^{3*}، نادر نریمان زاده⁴

1- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

3- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

4- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت صندوق پستی 3756، ali.jamali@guilan.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 آبان 1392

پذیرش: 22 بهمن 1392

ارائه در سایت: 09 مهر 1393

کلید واژگان:

آونگ وارون

فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت

نویز رنگی

بهینه‌سازی چند هدفی

مسأله تخمین متغیرهای حالت مدل دینامیکی سیستم یکی از موضوعات مورد علاقه مهندسان کنترل است. فیلترهای کالمن، اچ-بینهایت و فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت از جمله متداول‌ترین فیلترهایی هستند که برای تخمین متغیرهای حالت مخدوش با نویزهای گوسی و سفید کاربرد دارند. چنانچه نویزهای فرایند یا اندازه‌گیری رنگی باشند، فیلترهای مذکور دارای عملکردی در حد مطلوب نخواهند بود. در این مقاله، روش بهینه‌سازی چند هدفی (الگوریتم ژنتیک چند هدفی) برای طراحی فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت در شرایطی مورد استفاده قرار گرفته است که متغیرهای حالت سیستم دینامیکی با نویزهای رنگی مخدوش شده‌اند. همچنین برای تحلیل اثر نویزهای رنگی بر تخمین متغیرهای حالت یک آونگ وارون از روش افزایش بعد متغیر حالت استفاده شده است و با استفاده از الگوریتم ژنتیک چند هدفی، نمودار نقاط پارتو غیر برتر از دید هر دو تابع هدف فیلترهای کالمن و اچ-بینهایت حاصل شده است. شبیه‌سازی برای یک آونگ وارون بیانگر این موضوع است که استفاده از روش پیشنهادی می‌تواند سبب بهبود قابل ملاحظه‌ای در عملکرد فیلترهای کالمن و اچ/بینهایت در شرایط وجود نویز رنگی شود. همچنین با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان از ویژگی‌های مثبت هر دو فیلتر کالمن و اچ-بینهایت بطور همزمان بهره برد، به گونه‌ای که در نقطه مصالحه طراحی در شرایط وجود نویز رنگی مقادیر توابع میانگین مجذور مربعات خطاهای تخمین و حد بالای خطاهای تخمین کمینه شوند.

Optimal state estimation of a dynamical system corrupted with colored noises using Mixed Kalman/H-infinity filter

Mojtaba Masoumnezhad, Mohsen Nahaleh-kah, Ali Jamali*, Nader Nariman-zadeh

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

* P. O. B. 3756 Rasht, Iran, ali.jamali@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 November 2013
Accepted 11 February 2014
Available Online 01 October 2014

Keywords:
Inverted Pendulum, Mixed Kalman/H-infinity, Color Noise, Multi-objective Optimization.

ABSTRACT

Control engineers are interested in state estimation problems as one of the most interesting subject. In this way, Kalman filter, H-infinity, and Mixed Kalman/H-infinity filter are the most widely used filters for state estimation of the discrete linear dynamical system corrupted with Gaussian and white noises. These filters will be, however, suboptimal for state estimation when the process noise and/or measurement noise are color noises. In this paper, a multi-objective Pareto optimization (multi-objective genetic algorithm) approach is presented for the design of combined Kalman/H-infinity filters to estimate states corrupted with color noises. In this way, a state augmentation procedure is used to analyze the effect of the colored noises on states estimation of an inverted pendulum. Some Pareto curves are then obtained to compromise between the Kalman and H-infinity filters. It is shown that the use of such approach can evidently improve the effectiveness of the filters when the color noises are significant. Therefore, by using the proposed approach, we can employ the advantages of both Kalman and H-infinity filters simultaneously to minimize both the mean of squared errors and the upper bounds limit of estimation errors.

1- مقدمه

زمانی استفاده می‌شود که نتوان تمام متغیرهای حالت را به کمک اندازه‌گیری استخراج نمود. از معروف‌ترین این تخمین‌گرها می‌توان به تخمین گر حداقل مربعات²، حداقل مربعات بازگشتی¹، حداقل مربعات عمومی² و حداقل مربعات

فیلترهای تخمین متغیرهای حالت¹ ایزاری مهم و کارآمد در سیستم‌هایی است که مدل ریاضی سیستم به کمک ورودی‌ها و خروجی‌ها تعیین می‌شود و

2- Least Squares

1- State Estimation

میانگین³ اشاره کرد [1].

هدفی طراحی بهینه‌ای همزمان میانگین مجذور مربعات خطای تخمین و حد بالای فیلتر اچ-بینهایت در شرایط وجود نویز رنگی در داده‌های اندازه‌گیری شده مدنظر است. الگوریتم فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت بر روی مدل خطی زمان گسسته یک آونگ وارون مورد استفاده قرار گرفته و نقاط پارتو بهینه غیربرتر استخراج و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

2- تعریف مسئله

2-1- معادلات سیستم

سیستم مورد بررسی آونگ وارون خطی سازی شده حول راستای قائم آونگ می‌باشد که معادلات حرکتی زمان گسسته آن در فضای حالت به صورت معادلات (1) تا (3) است.

$$x_k = Fx_{k-1} + Gu_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

$$v_k = \psi v_{k-1} + \varepsilon_k - 1 \quad (3)$$

که $x_k \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیر حالت و $y_k \in \mathbb{R}^m$ بردار اندازه‌گیری، w_k نویز سفید سیستم با ماتریس کوواریانس و نویز رنگی اندازه‌گیری است. u_k نیروی کنترلی اعمالی وارد به ارباب است که توسط کنترلی از نوع جابدهی قطب¹⁰ تولید می‌شود. در حالت کلی نویز رنگی به کمک عبور نویز سفید از یک سیستم دینامیکی حاصل می‌شود [14] که در اینجا توسط یک رابطه خطی تعیین می‌شود. ψ ماتریس انتقال نویز اندازه‌گیری و ε_k نویز سفید با میانگین صفر، کوواریانس $Q_{\varepsilon k}$ و مستقل از w_k است.

2-2- اصلاح نویز رنگی

یکی از روش‌های مرسوم برای تحلیل سیستم‌های دارای نویز رنگی روش افزایش بعد متغیر حالت¹¹ است [14,9,5]. در این روش سیستم اصلی با افزایش بعد در متغیرهای آن به سیستمی با نویز سفید تبدیل می‌شود. با توجه به اینکه نویز اندازه‌گیری رنگی است، بردار متغیر حالت با بردار نویز اندازه‌گیری در یک بردار جدید ادغام می‌شود (روابط 4, 5):

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & \psi_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ \varepsilon_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} H_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} + 0 \quad (5)$$

با انجام یک تغییر متغیر معادلات (4) و (5) به فرم معادلات (6) و (7) تبدیل خواهند شد.

$$x'_k = F'_k x'_{k-1} + w'_k - 1 \quad (6)$$

$$y_k = H'_k x'_k + v'_k \quad (7)$$

که در این روابط ماتریس‌ها به صورت معادله (8) می‌باشند.

$$x'_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad w'_k - 1 = \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ \varepsilon_{k-1} \end{bmatrix}, \quad F'_k - 1 = \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & \psi_{k-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$H'_k = \begin{bmatrix} H_k & I \end{bmatrix}, \quad v'_k = 0$$

با اعمال تغییر متغیر، سیستم دارای نویز رنگی به سیستمی جدید با نویز سفید و متغیرهای حالت و ماتریس‌های خطی جدید تبدیل شده که مقدار

یکی از چالش‌های پیش روی هر سیستم کنترلی وجود نویز است که منشأ آن عواملی همچون نویز داخل سیستم یا دستگاه‌های اندازه‌گیری است. این موضوع موجب کاهش دقت یا عدم کارایی کنترلر می‌شود. معمولاً انواع نویزهای موجود ناشی از خطاهای مشاهده، خطاهای عملکرد، دقت سنسورها و غیره است [2]. اصطلاح نویز سفید⁴ به نویزی اطلاق می‌شود که مقدار آن در هر زمان مستقل از زمان‌های قبل از خود است. در کل این نوع نویز حالتی ایده‌آل است و معمولاً در سیستم‌های دارای نویز ناچیز چنین ویژگی وجود دارد. از طرفی دیگر به نویزی که مقدار آن تابعی از مقادیر قبل از خود است، نویز رنگی⁵ گفته می‌شود. سیستم‌های شبیه‌سازی شده با نویز رنگی از نظر فیزیکی بسیار قابل اطمینان هستند و مطالعات انجام شده صحت این موضوع را نشان می‌دهند [3]. گاهی اوقات برای کاهش پیچیدگی محاسباتی فیلتر، نویز رنگی را همانند نویز سفید در نظر گرفته که در این حالت دقت فیلتر بسیار کاهش می‌یابد [4].

فیلتر کالمن⁶ یک فیلتر بازگشتی کارآمد است که متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی را به کمک مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های غیر مستقیم و مخدوش با نویز تخمین می‌زند [5]. قالب اصلی فیلتر کالمن بر پایه سیستم خطی دارای نویز سفید بنا شده است، به همین دلیل فقط تحت فرضیات محدود کننده خطی بودن سیستم و همچنین سفید و مستقل بودن نویزهای سیستم و اندازه‌گیری بهینه بودن فیلتر کالمن تضمین شده است. بنابراین برای استفاده از فیلتر کالمن باید اطلاعاتی دقیق از ماهیت نویز از جمله میانگین، واریانس و انحراف معیار در دسترس باشد که گاهی اوقات این امر مشکل یا غیر ممکن است.

فیلتر اچ-بینهایت⁷ نخستین بار در سال 1981 در مهندسی کنترل معرفی شد که هدف اصلی آن حداقل نمودن خطای تخمین در بدترین حالت ممکن است. برخلاف فیلتر کالمن که نیازمند شناخت دقیق از ماهیت نویز است، در فیلتر اچ-بینهایت به هیچ پیش فرضی از نویزهای سیستم و اندازه‌گیری نیاز نمی‌باشد و تنها شرط استفاده از آن متناهی بودن انرژی است. به همین دلیل تخمین فیلتر اچ-بینهایت از فیلتر کالمن بسیار مقاومتر⁸ است. در سال‌های اخیر استفاده از این فیلتر در زمینه کنترل بسیار مورد توجه قرار گرفته، به خصوص در مواردی که ویژگی‌های آماری نویز نامشخص یا مدل-سازی آن سخت است [6].

به منظور دستیابی به بهترین ویژگی‌های فیلترهای کالمن و اچ-بینهایت، باید از فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت بهره برد [8,7]. در نتیجه، این فیلتر ترکیبی مقدار بهترین میانگین مجذور مربعات خطای تخمین⁹ را از میان تمام تخمین‌های بدترین حالت تخمین خطا تعیین می‌نماید [9] که این منجر به نتایج دقیق‌تری در تخمین پارامترها و متغیرهای حالت شده است [11,10].

عملکرد مناسب فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت وابسته به نحوه انتخاب حد بالای طراحی فیلتر توسط طراح و سفید بودن نویزهای سیستم و مشاهده‌گر است [13,12]. در این مقاله با بهره‌گیری از بهینه‌سازی چند

1- Recursive Least Squares

2- General Least Squares

3- Least Mean Squares

4- White Noise

5-Colored Noise

6-Kalman

7- H-infinity

8- Robust

9- Root Mean Square Error

10- Pole Placement

11- State Augmentation

$$V \quad R \quad HPH^T \quad HP \left(\frac{1}{\theta^2} - P \right)^{-1} PH^T \quad (16)$$

2. ماتریس‌های $\hat{F}$ و K مطابق معادلات (17) و (18) حاصل می‌شود:

$$K \quad P_a V^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{F} \quad F - KH \quad (18)$$

3. تخمین گر معادله (12) الگوریتم ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت را ارضا می‌کند اگر و فقط اگر $\hat{F}$ پایدار باشد. برای این منظور خطای تخمین باید در محدوده معادله (19) صدق کند:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \leq \quad (19)$$

هنگامی که $\theta = 0$ (پارامتر محدوده عملکردی است که توسط طراح تعیین می‌شود) است، الگوریتم مذکور به فیلتر کالمن کاهش می‌یابد. هرچه مقدار θ بزرگتر شود، عملکرد فیلتر از فیلتر کالمن فاصله گرفته و به عملکرد فیلتر اچ-بینهایت نزدیکتر می‌شود. به عبارتی دیگر مقدار میانگین مجذور مربعات خطای تخمین (تابع هدف فیلتر کالمن) افزایش و خطای تخمین در بدترین حالت ممکن (تابع هدف فیلتر اچ-بینهایت) کاهش می‌یابد. از این رو لازم است مقداری بهینه برای θ در نظر گرفته شود تا در بهترین حالت از ویژگی‌های مثبت هر دو فیلتر بهره برد.

3-2- بهینه‌سازی

یکی از روش‌های معمول بهینه‌سازی، استفاده از مشتق تابع هدف است که به دلایلی همچون عدم توانایی بیان تابع هدف به شکل صریح، مشتق‌پذیر نبودن تابع هدف، گیر افتادن در نقاط اکسترمم محلی و غیره زمینه کاربرد محدودی دارند. به دلیل این نارسایی‌ها روش‌های تکامل تدریجی از جمله الگوریتم ژنتیک امروزه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک برخلاف روش‌های مبتنی بر مشتق، به جای استفاده از مشتق توابع هدف، از مقادیر تابع هدف به طور مستقیم استفاده می‌کند که بنابراین مشکل مشتق‌پذیر بودن تابع هدف از بین می‌رود. از طرف دیگر چون این روش جستجو را با مجموعه‌ای از نقاط (جمعیت اولیه) شروع می‌کند، احتمال گیرافتادن در نقاط اکسترمم محلی بسیار کاهش می‌یابد.

در اکثر مسائل طبیعی از جمله مسائل کنترلی در نظر گرفتن چند تابع هدف نیاز است و عموماً این توابع هدف (همانند وزن کمتر و استحکام بیشتر در سازه‌ها) در تقابل با یکدیگر قرار دارند. برای حل بهینه چنین مسائلی باید از بهینه‌سازی چند هدفی بهره برد. بهینه‌سازی چند هدفی که اغلب بهینه‌سازی چند معیاری یا بهینه‌سازی برداری نامیده می‌شود، یافتن برداری است از متغیرهای تصمیم‌گیری که ارضا کننده فیتود است و تمام توابع هدف را بهینه نماید [17]. در مسائل بهینه‌سازی چند هدفی نمی‌توان نقطه‌ای را یافت که همزمان تمامی توابع هدف را اکسترمم کند؛ بنابراین مجموعه‌ای از نقاط بهینه غیر برتر تحت عنوان نقاط پارتو¹ به عنوان پاسخ مسأله ارائه می‌شود و در صورت لزوم طراح نقطه‌ای را از میان آنها برای طراحی انتخاب می‌کند [18].

یکی از روش‌های بهینه‌سازی چند هدفی که عموماً در مسائل دو هدفی استفاده می‌شود، الگوریتم NSGA II² است. روند کلی الگوریتم NSGA II شکل 1 مشاهده می‌شود. ابتدا تعداد N جمعیت اولیه به صورت تصادفی تولید می‌شود (P_t)، سپس با استفاده از عملگرهای ژنتیکی جایابی³ و

نویز اندازه‌گیری آن صفر است و کوواریانس نویز سیستم برابر با معادله (9) است.

$$E(w'_k w'^T_k) \quad \begin{bmatrix} Q_k & \\ & Q_{\varepsilon k} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3- الگوریتم ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت

3-1- الگوریتم فیلتر

فیلتر کالمن یک الگوریتم پردازش اطلاعات بازگشتی است که تخمین بهینه متغیر حالت سیستم را از میان اغتشاشات با کوواریانس معلوم ارائه می‌دهد. این فیلتر هنگامی بهینه است که شناخت دقیق از ماهیت نویز سیستم و اندازه‌گیری در دست باشد [15]. از طرفی دیگر در دهه‌های اخیر فیلتر اچ-بینهایت توجه بسیاری از محققان را در مسائل مهندسی به خود جلب کرده است و بر خلاف فیلتر کالمن، به هیچ پیش فرضی از ماهیت نویز نیاز ندارد و تنها می‌بایست محدوده انرژی متناهی باشد. در اصل فیلتر کالمن میانگین مجذور مربعات خطای تخمین را کمینه می‌کند، ولی اچ-بینهایت اثر نویز را در بدترین حالت کمینه می‌کند و از این رو از فیلتر کالمن بسیار مقاوم‌تر است [16]. در [9] به منظور ترکیب بهترین ویژگی فیلتر کالمن و بهترین ویژگی فیلتر اچ-بینهایت، الگوریتم ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت ارائه شده است. تابع هدف در فیلتر کالمن و اچ-بینهایت به ترتیب توسط توابع هدف نشان داده شده در معادلات (10) و (11) تعیین می‌شود.

$$J_2 \quad \sum_{k=0}^N E \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (10)$$

$$J_{\infty} \quad \frac{\sum_{k=0}^N E \|x_k - \hat{x}_k\|^2}{\lim_{N \rightarrow \infty} x_0^T w_k v_k \|x - \hat{x}\|_{P_0^{-1}}^2 \sum_{k=0}^N \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2} \quad (11)$$

برای اینکه در معادلات سیستم هر دو تابع هدف منظور شود، باید از معادله (12) مقدار $\hat{x}_{k+1}$ را با در نظر گرفتن شرایط مربوطه بدست آورد.

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{F}_k \hat{x}_k + K y_k \quad (12)$$

الف) ماتریس باید پایدار باشد.

ب) تابع هدف فیلتر اچ-بینهایت توسط محدوده انرژی نشان داده شده در معادله (13) مقید شود.

$$J_{\infty} < \frac{1}{\theta} \quad (13)$$

ج) در میان تخمین‌گرهایی که دو شرط بالا را اغنا می‌کنند، الگوریتم تابع هدف کالمن (J_2) را کمینه می‌کند [9].

با در نظر گرفتن این شرایط در حل مسأله، کمترین مقدار میانگین مجذور مربعات خطای تخمین در میان تمام تخمین‌گرهایی که بدترین خطای تخمین را محدود می‌کند، حاصل می‌شود. روند حل فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت به صورت معادلات (14) تا (18) است:

1. در هر مرحله ماتریس مثبت معین P که معادله ریکاتی (14) را ارضا می‌کند، پیدا می‌شود:

$$P \quad FPF^T \quad Q \quad FP \left(\frac{1}{\theta^2} - P \right)^{-1} PF^T - P_a V^{-1} P_a^T \quad (14)$$

$$P_a \quad FPH^T \quad FP \frac{1}{\theta^2} - P^{-1} PH^T \quad (15)$$

1- Pareto

2- Non-dominated Sorting Genetic Algorithm

3- Crossover

ماتریس‌های خطی سیستم به صورت معادلات (20) تا (22) حاصل می‌شود.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B}{M} & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B}{MI} & \frac{(M+m)g}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$G_u = \begin{bmatrix} \frac{-}{M} & \frac{-}{MI} \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

$$H = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (22)$$

بردار متغیر حالت شامل مکان ارايه، سرعت خطی ارايه، زاویه آونگ و سرعت زاویه‌ای آونگ و بردار اندازه‌گیری شامل مکان ارايه و زاویه آونگ به صورت معادله (23) تعريف می‌شود.

$$x = \begin{bmatrix} d & \dot{d} & \alpha & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T, y = \begin{bmatrix} d & \alpha \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

همچنین ویژگی‌های هندسی و فیزیکی ارايه و آونگ وارون مورد نظر در جدول 1 ذکر شده است.

نویزهای سیستم و مشاهده گر به صورت نرمال⁴ فرض شده‌اند که مقادیر انحراف معیار و کوواریانس آنها توسط معادله (24) بیان می‌شود.

$$\sigma_w = 0.04, Q = \sigma_w^2 \times I_n, w \sim N(0, Q), \sigma_\varepsilon = 0.24$$

$$Q_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \times I_m, \varepsilon \sim N(0, Q_\varepsilon), \psi = \zeta \times I_m \quad (24)$$

لازم به ذکر است که ضریب نویز رنگی (ζ)، میزان رنگی بودن نویز را نشان می‌دهد که مقادیر بین صفر و یک را می‌پذیرد [9]. برای مقدار صفر، نویز حاصل معادل نویز سفید است و هرچه این مقدار به یک نزدیکتر شود، میزان رنگی بودن نویز افزایش می‌یابد. در اصل ضریبی است که وابستگی نویز اندازه‌گیری را به مقدار آن در زمان قبل تبیین می‌کند. برای اصلاح رنگی بودن نویز و تبدیل آن به نویز سفید روش افزایش بعد متغیر حالت اعمال می‌شود و در نتیجه آن معادلات سیستم جدید با نویز سفید همانند معادلات (4) و (5) بدست می‌آید.

همچنین برای کنترل آونگ وارون از روش کنترلی جابدهی قطب استفاده شده است که قطب‌های مورد نظر به صورت معادله (25) در نظر گرفته شده است. البته این مقادیر تأثیری در روند مسأله ندارد. چون در الگوریتم پیشنهادی محدودیتی در مورد کنترل وجود ندارد.

$$D = [-1.5 + 0.5i \quad -1.5 - 0.5i \quad -0.5 + i \quad -0.5 - i] \quad (25)$$

پاسخ الگوریتم حاصل به ازای مقادیر مختلف پارامتر θ رفتار مختلفی خواهد داشت که اگر این مقدار به سمت صفر میل کند، پاسخی مشابه فیلتر کالمن حاصل می‌گردد و هرچه این مقدار افزایش یابد، عملکرد فیلتر از نظر فیلتر

جدول 1 مشخصات هندسی و فیزیکی پاندول معکوس

عنوان پارامتر	مقدار پارامتر
جرم پاندول	$m = 0.2 \text{ kg}$
طول پاندول	$l = 0.1 \text{ m}$
جرم ارايه	$M = 1 \text{ kg}$
ضریب اصطکاک	$B = 0.1$
شتاب گرانش	$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$

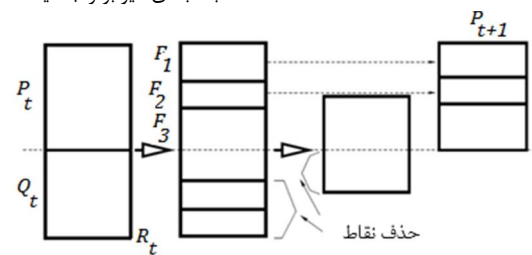
جهش¹ جمعیت جدید Q تولید می‌شود [19].

کل کروموزوم‌های بدست آمده جبهه‌بندی² می‌شوند. در این مرحله کروموزوم‌هایی که از نظر هر دو تابع هدف برتری نسبت به هم ندارند در یک جبهه قرار می‌گیرند. سپس برای رعایت ثبات در تعداد جمعیت اولیه، با استفاده از معیار شلوغی (CDA) کروموزوم‌هایی که در نزدیکی یکدیگر قرار می‌گیرند حذف می‌شوند (نحوه محاسبه معیار شلوغی در شکل 2 مشاهده می‌شود). این روند تکرار می‌شود تا سیر تکامل تدریجی حاصل شود [20]. در حل مسأله به کمک این روش، مقدار θ به عنوان متغیر طراحی و محدوده انرژی فیلتر اچ-بینهایت و خطای کالمن به عنوان توابع هدف در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه اعمال بهینه‌سازی چند هدفی NSGA II نمودار پارتو نقاط غیر برتر حاصل می‌شود که به کمک این نمودار نقطه مصالحه طراحی θ ، از دید هر دو تابع هدف انتخاب می‌شود.

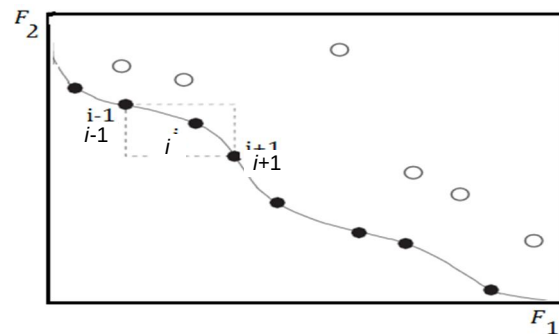
4- شبیه‌سازی

معادله خطی شده زمان گسسته سیستم آونگ وارون که در شکل 3 مشاهده می‌شود، توسط معادلات (1) و (2) بیان می‌شود.

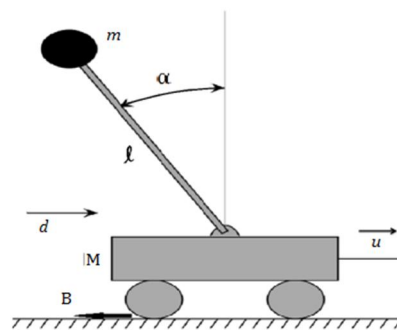
طبقه‌بندی بر اساس معیار شلوغی طبقه‌بندی غیر برتر جمعیت



شکل 1 روش عملکرد NSGA II



شکل 2 نحوه محاسبه معیار شلوغی (CDA³)



شکل 3 شماتیک یک آونگ وارون

1- Mutation

2- Front

3- Crowding Distance Assignment

جدول 2 مقادیر میانگین و واریانس میانگین مجذور مربعات خطای تخمین به ازای 500 داده تصادفی به ازای $\zeta = 0.2$

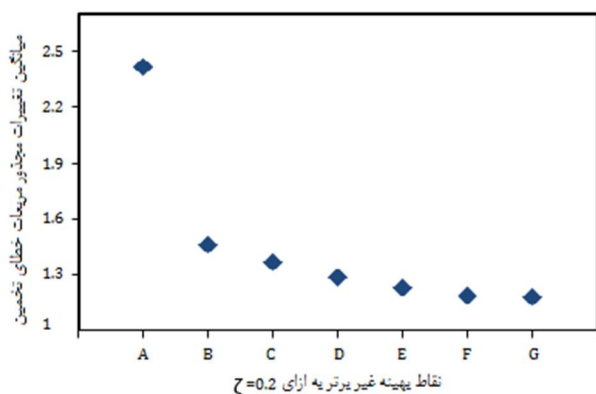
نقطه	θ	میانگین	واریانس
A	0/9777688	2/41449231	0/01867864
B	0/804135	1/45321449	0/03513168
C	0/716293	1/3644559	0/03745576
D	0/691815	1/27944947	0/04261969
E	0/632101	1/22822142	0/04500581
F	0/604181	1/18541331	0/0496816
G	0/564785	1/17606736	0/05966147

تایید می‌کند زیرا تغییر واریانس نویزها پراکندگی کمتری در مقدار مجذور مربعات خطای تخمین حاصل شده ایجاد نموده‌اند و به همین دلیل فیلتر طراحی شده بر اساس پارامتر مربوط به نقطه A مقاوم‌تر است. نمودار میانگین این مقادیر در شکل 5 و نمودار تغییر واریانس مقادیر میانگین تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین در شکل 6 برای نقاط منتخب از نمودار پارتو نشان داده شده در شکل 4 ترسیم شده است. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد تمامی نقاط پارتو نسبت به یکدیگر غیر برتر می‌باشند به این معنی که بهبود در یکی از توابع هدف باعث بدتر شدن مقدار تابع هدف دیگر می‌شود. طراح می‌تواند بر اساس مصالحه بین توابع هدف یکی از این نقاط را انتخاب نماید. لازم به ذکر است که تمامی این نقاط دارای عملکرد بهینه‌ای از دید هر دو تابع هدف هستند. طراح بر اساس اهمیتی که برای هر کدام از توابع هدف در نظر می‌گیرد می‌تواند یکی از این نقاط را انتخاب کند. با توجه به شکل‌های 5 و 6، نقطه D را می‌توان به عنوان نقطه مصالحه طراحی انتخاب کرد. دلیل انتخاب نقطه D این است که نقطه D نسبت به هر یک از نقاط بهینه تک هدفی A و G به ترتیب بیشترین تغییرات را نسبت به یک تابع هدف با کمترین تغییرات در مقدار تابع هدف دیگر دارد.

4-2- ضریب نویز رنگی برابر 0/5

با افزایش مقدار ضریب نویز رنگی به مقدار 0/5 میزان وابستگی نویز اندازه-گیری به مقدار قبلی خود (رنگی‌تر شدن نویز) بیشتر می‌شود که با انجام فرایند بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفی NSGA II، نمودار پارتو نقاط بهینه غیربرتر آن همانند شکل 7 حاصل شده است.

همانند مرحله قبل هفت نقطه از نمودار انتخاب می‌شود که مقاوم بودن فیلترهای حاصل شده به ازای این هفت مقدار مختلف به کمک 500 مقدار تصادفی با توزیع گوسی مشابه بخش 4-1 برای واریانس و میانگین نویز سیستم و اندازه‌گیری سنجیده شده است.



شکل 5 نمودار میانگین تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین برای $\zeta = 0.2$

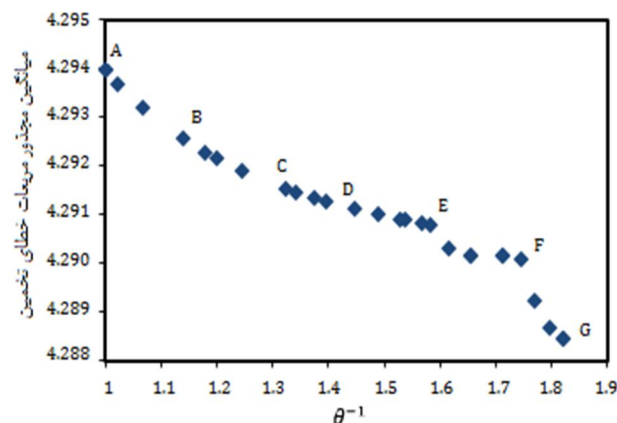
اچ-بینهایت مقاوم‌تر و خطای کالمن بیشتر خواهد شد. از این رو برای بهینه نمودن فیلتر مذکور از روش بهینه‌سازی چند هدفی NSGA II استفاده می‌شود که پارامتر θ به عنوان متغیر طراحی و توابع میانگین مجذور مربعات خطای تخمین فیلتر کالمن و محدوده انرژی تابع هدف فیلتر اچ-بینهایت (θ^{-1}) به عنوان توابع هدف در نظر گرفته می‌شود.

پارامترهای الگوریتم NSGA II نیز بدین صورت در نظر گرفته می‌شود: طول جمعیت برابر 80، تعداد نسل 400، تکامل جمعیت، ضریب عملگر پیوند و جهش به ترتیب برابر 0/9 و 0/1 انتخاب شده است. در ادامه شبیه‌سازی برای مقادیر 0/2، 0/5 و 0/9 ضریب نویز رنگی انجام شده است.

4-1- ضریب نویز رنگی برابر 0/2

در ابتدا ضریب نویز رنگی (ζ) معادل 0/2 در نظر گرفته شده و بهینه‌سازی در این شرایط اعمال می‌شود. در نتیجه نمودار نقاط بهینه غیر برتر همانند شکل 4 حاصل می‌شود. نقاط نزدیک به محور قائم نقاطی هستند که از نظر فیلتر اچ-بینهایت عملکرد مناسبی دارند؛ چون تابع هدف فیلتر در این حالت را محدودتر می‌کند. از طرفی برای این نقاط خطای فیلتر کالمن به نسبت از سایر نقاط بیشتر است. هر چه نقاط بهینه غیر برتر از محور قائم دورتر و به محور افقی نزدیک‌تر شوند، عملکرد فیلتر اچ-بینهایت به دلیل گسترش بیشتر محدوده تابع هدف کاهش می‌یابد و در عوض به علت کاهش خطای فیلتر کالمن، عملکرد فیلتر کالمن بهبود می‌یابد. نقاط میانی نیز به تناسب محل قرارگیری از شرایطی میانی برخوردار هستند. از میان تمام نقاط بهینه غیر برتر حاصله هفت نقطه به عنوان نماینده که از نظر هر دو فیلتر دارای ویژگی-های متفاوتی هستند انتخاب می‌شوند. تاثیر تغییر واریانس نویزهای سیستم و اندازه‌گیری بر روی این نقاط مطالعه می‌شود که در اصل میزان شناخت از ماهیت نویز و مقدار ریسک‌پذیری آن که توسط معادله (24) در نظر گرفته شده بود، در این بررسی سنجیده می‌شود.

مقدار میانگین و واریانس میانگین مجذور مربعات خطای تخمین در جدول 2 با استفاده از 500 مقدار تصادفی که برای میانگین نویز سیستم (σ_w) و میانگین نویز اندازه‌گیری (σ_θ) تولید می‌شود محاسبه می‌شود. همان‌طور که ذکر شد نقطه A در مقایسه با نقطه G از نظر فیلتر اچ-بینهایت بهتر و از نظر فیلتر کالمن ضعیف‌تر است و به همین سبب میانگین مجذور مربعات خطای تخمین حاصل شده برای نقطه A در مقایسه با نقطه G بزرگ‌تر هستند، چون برای این نقطه فیلتر کالمن عملکرد ضعیف‌تری دارد. از طرف دیگر واریانس این مقادیر برای نقطه A در مقایسه با نقطه G کمتر است که این مطلب مقاوم بودن نقطه A را در مواجهه با نویزهای مدل و مشاهده‌گر

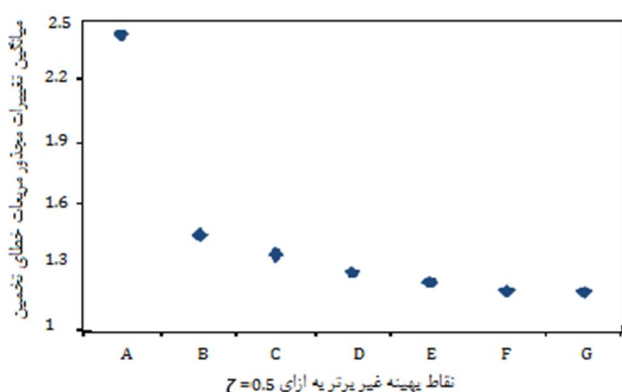


شکل 4 نمودار نقاط بهینه غیر برتر به ازای $\zeta = 0.2$

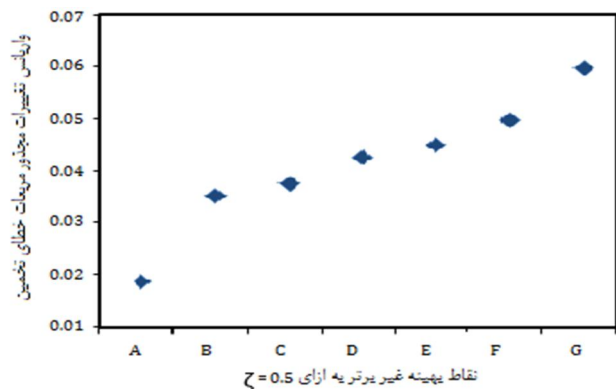
رنگی را تا مقدار 0/9 افزایش داده که شدت رنگی بودن نویز در این حالت از دو حالت قبل بیشتر است. با طی روندی مشابه برای حل مسأله و اعمال بهینه‌سازی، نمودار پارتو نقاط بهینه غیر برتر به صورت شکل 10 حاصل شده است.

با انتخاب هفت نقطه متمایز از این نمودار، با در نظر گرفتن 500 مقدار تصادفی برای واریانس نویز سیستم و اندازه‌گیری، مقاوم بودن این هفت نقطه انتخابی بررسی شده است که نتایج آن در جدول 4 ارائه شده است. همانند مراحل قبل، 500 مقدار تصادفی براساس میانگین نویز سیستم و میانگین نویز اندازه‌گیری σ_e تولید شده است.

روند تغییرات با حرکت از نقطه A به سمت نقطه G مانند دو حالت قبلی است. واریانس و میانگین تغییرات مجذور مربعات خطای برای 500 مقدار تصادفی تولید شده برای σ_w و در شکل‌های 11 و 12 مشاهده می‌شود.



شکل 8 نمودار میانگین تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین به ازای $\zeta = 0.5$

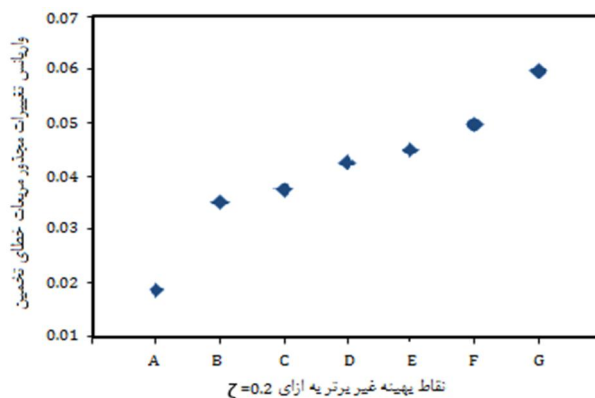


شکل 9 نمودار واریانس تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین به ازای $\zeta = 0.5$

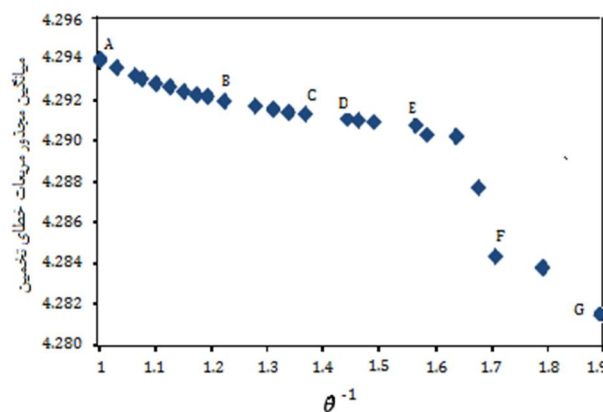
جدول 4 مقادیر میانگین و واریانس میانگین مجذور مربعات خطای تخمین به ازای

500 داده تصادفی به ازای $\zeta = 0.9$

نقطه	θ	میانگین	واریانس
A	0/979384	2/282901844	0/01629138
B	0/952733	2/024371489	0/018571334
C	0/848947	1/569829846	0/033986276
D	0/77829	1/399679493	0/037626385
E	0/722456	1/316583923	0/040644962
F	0/653612	1/255632813	0/042930691
G	0/640536	1/252511939	0/043757256



شکل 10 نمودار واریانس تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین برای $\zeta = 0.2$



در حرکت از نقطه A به سمت نقطه G در جدول 3 میانگین مقادیر میانگین مجذور مربعات خطای تخمین کاهش می‌یابد زیرا فیلتر حاصل از نقطه G از نظر فیلتر کالمن عملکرد بهتری دارد. از طرف دیگر واریانس خطاها از نقطه A تا نقطه G سیری صعودی دارند که این مطلب کاهش مقاوم بودن را تایید می‌کند. با وجود اینکه مقادیر میانگین مجذور مربعات خطای تخمین برای نقطه A مقدار بزرگتری دارند، ولی پراکندگی کمتری دارند و با تغییر شناخت طراح از ماهیت نویز مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد. در شکل‌های 8 و 9 میانگین و واریانس تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین برای نقاط منتخب نمودار پارتو شکل 7 رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نقطه طراحی D می‌تواند نقطه مصالحه طراحی باشد.

4-3- ضریب نویز رنگی برابر 0/9

به منظور افزایش وابستگی نویز اندازه‌گیری به مقدار قبل خود، ضریب نویز

جدول 3 مقادیر میانگین و واریانس میانگین مجذور مربعات خطای تخمین به ازای

500 داده تصادفی به ازای $\zeta = 0.5$

نقطه	θ	میانگین	واریانس
A	0/999469	2/43267446	0/02152886
B	0/868796	1/62034964	0/02899086
C	0/730521	1/34059144	0/03940022
D	0/693662	1/29932659	0/04199338
E	0/610647	1/26844797	0/0446632
F	0/58551	1/23515482	0/04789695
G	0/527734	1/21930271	0/05988362

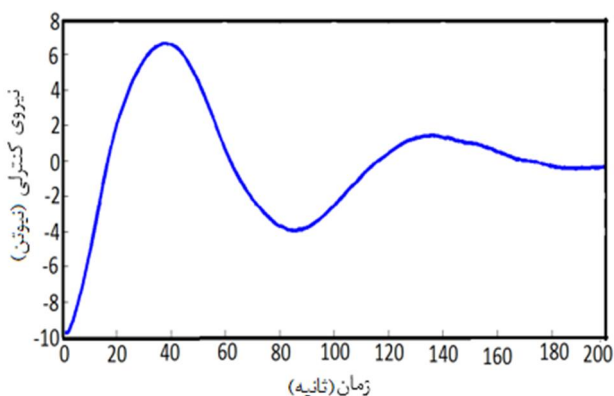
نخواهد داشت و با انتخاب مقدار θ بهینه فیلتر حاصل پاسخ مناسبی از نظر توابع هدف هر دو فیلتر کالمن و اچ-بینهایت دارد.

در میان نقاط غیر برتر حاصل شده از مقادیر مختلف ضریب نویز رنگی، مقدار θ نقطه C در $\zeta = 0.5$ به عنوان نقطه طراحی در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن برابر با 0/730521 است.

لازم به توضیح است که برای مقایسه مقدار میانگین مجذور مربعات خطای تخمین، نیروی کنترلی یکسانی مطابق با معادله (25) اعمال شده است که بتوان تغییرات میانگین مجذور مربعات خطای تخمین را در حضور اعمال نیروی کنترلی یکسان بررسی نمود. این نیروی کنترلی یکسان برای نویزهای رنگی متفاوت در شکل 13 نشان داده شده است.

همچنین تاثیر عدم لحاظ رنگی بودن نویز بررسی شده است. برای این منظور میانگین مجذور مربعات خطای تخمین برای چند مقدار مختلف نویز رنگی از دو روش محاسبه شده است. در روش اول بدون در نظر گرفتن رنگی بودن نویز، از "فرم استاندارد فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت" استفاده شده و هیچ اقدام یا تغییری برای اصلاح نویز رنگی اندازه‌گیری صورت نگرفته است. در روش دیگر از روش "افزایش بعد متغیر حالت" بهره برده شده که روند کلی آن پیشتر ذکر شده است. لازم به ذکر است که مقادیر نویز اندازه‌گیری برای تمام فواصل زمانی در هر دو روش دقیقاً یکسان است و تنها تفاوت در نوع روش‌ها است. در جدول 5 با در نظر گرفتن مقدار θ بهینه طراحی نتایج مشاهده می‌شوند.

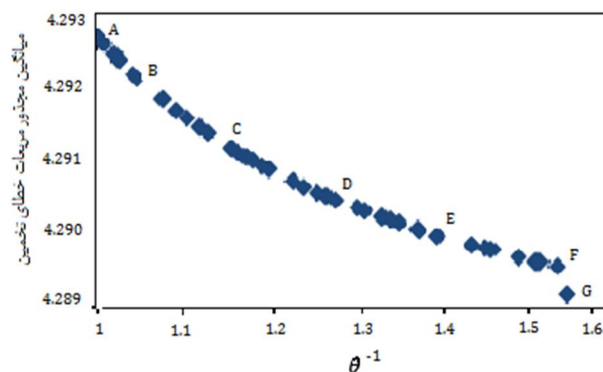
همان‌طور که در جدول 5 مشاهده می‌شود هنگامی که میزان ζ صفر است، دو روش اختلاف کمی دارند. ولی هرچه این میزان افزایش می‌یابد، خطای فیلتر استاندارد بسیار بیشتر می‌شود و در صد خطای روش‌ها نیز افزایش می‌یابد. به همین جهت عدم سفید فرض نمودن نویز رنگی برای ساده‌سازی مسأله بسته به ماهیت نویز رنگی خطای زیادی ایجاد می‌نماید و استفاده از روش‌های مرسوم برای کاهش خطای تخمین‌گر بسیار سودمند خواهد بود.



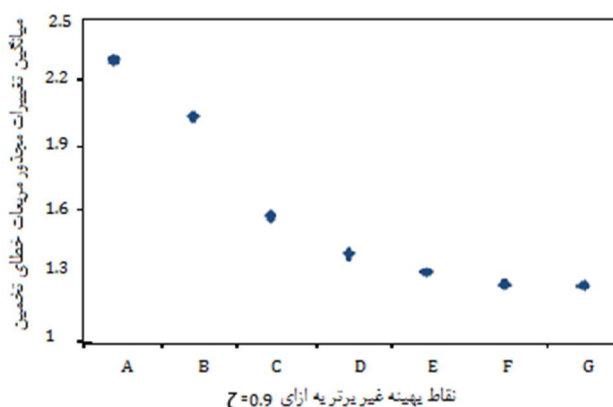
شکل 13 نیروی کنترلی اعمالی یکسان برای مقادیر متفاوت ضرایب نویز رنگی

جدول 5 مقایسه خطای حاصل از سفید فرض نمودن نویز رنگی

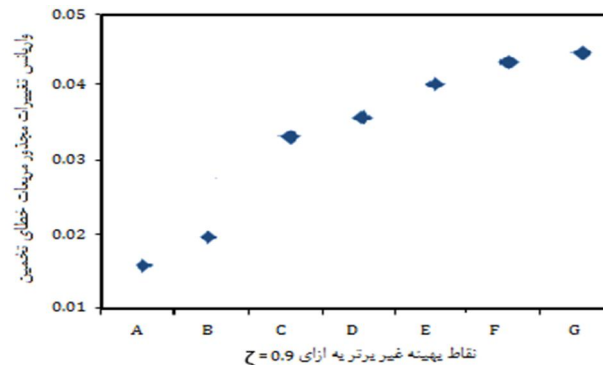
ζ	فیلتر استاندارد	فیلتر پیشنهادی	درصد خطا
0/0	4.318299922507	4.2915116002496	0/624216471
0/2	4.320055536074	4.2915074689629	0/665222356
0/4	4.327169315647	4.2914792319035	0/831649923
0/6	4.349251591858	4.2913186136344	1/350004123
0/7	4.377585143184	4.2910874549395	2/015752164
0/9	4.826801730385	4.2903128428847	12/50465659



شکل 10 نمودار نقاط بهینه غیر برتر به ازای $\zeta = 0.9$



شکل 11 نمودار میانگین تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین به ازای $\zeta = 0.9$



شکل 12 نمودار واریانس تغییرات مجذور مربعات خطای تخمین به ازای $\zeta = 0.9$

4-4- معرفی مقدار مصالحه طراحی

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی مشاهده شد، برای سه نویز رنگی متفاوت منحنی پارتو ارائه گردید و نقطه مصالحه طراحی از دید دو تابع هدف مذکور ارائه شد که در هر قسمت نقطه مصالحه دارای مقدار متفاوت بود. در این قسمت هدف انتخاب مقداری از پارامتر θ (شاخص عملکرد فیلتر اچ-بینهایت) است که برای تمامی این نویزهای رنگی عملکردی مناسب داشته باشد و به مقدار ζ وابسته نباشد. مقدار مصالحه طراحی برای این مقدار باید با در نظر گرفتن تمام مقادیر ضریب نویز رنگی حاصل شود. از این‌رو، این نقطه باید از بین تمامی نقاط غیر برتر نمودارهای پارتو حاصل از مقادیر مختلف ضریب نویز رنگی (که همگی دارای عملکردی مطلوب از نظر هر دو فیلتر می‌باشند) انتخاب شود. با معرفی چنین مقداری کارایی بر خط کنترلر بسیار بهبود می‌یابد، زیرا تمام مراحل بهینه‌سازی به صورت غیر بر خط صورت می‌گیرد و زمان اجرای این بخش تأثیری در زمان اجرای برخط کنترلر

5- نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله اثرات نویز رنگی بر روی سیستم آونگ وارون خطی مخدوش با نویز رنگی اندازه گیری، به کمک فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت بررسی شده است. با اعمال بهینه سازی در محدوده باند این فیلتر، اثر تغییر واریانس نویز سیستم و اندازه گیری بر میانگین مجذور مربعات خطای تخمین بررسی شد. بر این اساس هرچه مقدار محدوده باند (θ) بزرگ تر باشد، فیلتر از نظر کالمن ضعیف تر (خطای مربع میانگین بیشتر) و از نظر فیلتر اچ-بینهایت مقاوم تر است و از این رو در برابر تغییر واریانس نویز سیستم و اندازه گیری مقاوم تر است.

همچنین از میان نقاط غیر برتر در ضرایب مختلف نویز رنگی، مقداری بهینه برای محدوده باند θ به عنوان نقطه طراحی در نظر گرفته شده است که به ازای این مقدار فیلتری بهینه حاصل می شود که این فیلتر ویژگی های مثبت هر دو فیلتر کالمن و اچ-بینهایت را دارد. در اصل در این روش مسأله الگوریتم به صورت غیر برخط بهینه سازی می شود، سپس با انتخاب یک نقطه طراحی از میان تمام نقاط غیر برتر حاصل شده، فیلتر به صورت برخط بهینه عمل خواهد کرد. با این روش پیشنهاد شده پیچیدگی محاسباتی برای داشتن فیلتری بهینه کاهش می یابد و این روش برای بسیاری از زمینه های مختلف قابل اجرا است. همچنین برای نقطه طراحی در نظر گرفته شده، مقدار نیروی کنترلر به ازای مقادیر مختلف نویز رنگی مقایسه شده و نشان داده شد که اگر از صورت عادی فیلتر ترکیبی کالمن/اچ-بینهایت برای نویز رنگی استفاده شود و با نویز رنگی همانند نویز سفید رفتار شود، خطای بسیار زیادی در تخمین رخ خواهد داد که کارایی فیلتر را تضعیف می کند.

6- فهرست علائم

B	ضریب اصطکاک
D	محل قطب های مورد نظر
d	موقعیت ارابه
l	طول پاندول
M	جرم ارابه
m	جرم پاندول
P	کوواریانس خطای تخمین متغیر حالت
Q	کوواریانس نویز سیستم
v	نویز اندازه گیری
w	نویز سیستم
x	بردار متغیر حالت
y	بردار اندازه گیری

علائم یونانی

α	زاویه پاندول با راستای قائم
ζ	ضریب نویز رنگی
θ	پارامتر عملکرد فیلتر که توسط طراح تعیین می شود
σ	انحراف معیار

7- مراجع

- [1] B. Ramkumar, M. P. Schoen, F. Lin, Hybrid enhanced continuous tabu search and genetic algorithm for parameter estimation in colored noise environments, *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, No. 4, pp. 3009-3917, 2011.
- [2] J. Ding, C. Fan, J. Lin, Auxiliary model based parameter estimation for dual-rate output error systems with colored noise, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 6, pp. 4051-4058, 2013.
- [3] X. Zhang, W. Xu, B. Zhou, Mean first-passage time in a bistable system driven by multiplicative and additive colored noises with colored cross-correlation, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 14, NO. 12, pp. 4220-4225, 2009.
- [4] L. WU, C. MAO, F. LU, X. Lei, Theoretical Analysis on the Filtering Accuracy of the White Noise Equivalence of Colored Measurement Noise, *Procedia Engineering*, Vol. 23, pp. 192-198, 2011.
- [5] M. Geist, O. Pietquin, Kalman filtering & colored noises: the (autoregressive) moving-average case, *proceedings of the IEEE Workshop on Machine Learning Algorithms, Systems and Applications (MLASA 2011)*, 2011.
- [6] A. Giremus, E. Grivel, F. Castanie, Is H^∞ filtering relevant for correlated noises in GPS navigation, *16th International Conference on Digital Signal Processing*, 2009.
- [7] G. Huijun, J. Lam, X. Lihua, W. Changhong, New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, No. 8, pp. 3183-3192, 2005.
- [8] M. Masoumnezhad, A. Moafi, N. Nariman-Zadeh, Optimal State Estimation of Inverted pendulum using Unscented H_∞ -infinity, in *21st Annual International Conference on Mechanical Engineering*, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, 2013.
- [9] D. Simon, *Optimal State Estimation, Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*: John Wiley & Sons, INC, 2006.
- [10] W. Li, Y. Jia, H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform, *Signal Processing*, Vol. 90, No. 12, pp. 3301-3307, 2010.
- [11] H. Jwu-Sheng, Y. Chia-Hsing, Second-Order Extended H_∞ -infinity Filter for Nonlinear Discrete-Time Systems Using Quadratic Error Matrix Approximation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 59, No. 7, pp. 3110-3119, 2011.
- [12] W. Jun-hou, S. Chun-lei, Y. Xing-tai, C. Jia-bin, Sigma point H_∞ -infinity filter for initial alignment in marine strapdown inertial navigation system, in *Proceeding of 2nd International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS)*, pp. 580-584, 2010.
- [13] P. Ni, S. Li, Unscented H_∞ -infinity filter based simultaneous localization and mapping, in *Proceeding of 30th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 3942-3946, 2011.
- [14] H. D. Choi, C. K. Ahn, M. T. Lim, Time-domain filtering for estimation of linear systems with colored noises using recent finite measurements, *Measurement*, Vol. 46, No. 8, pp. 2792-2797, 2013.
- [15] Y. Bulut, Applied kalman filter theory, Thesis, Civil Engineering Dissertations, *Northeastern University*, Doctor of Philosophy, 2011.
- [16] W. Li, Y. Jia, H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform, *Signal Processing*, Vol. 90, NO. 12, pp. 3301-3307, 2010.
- [17] A. Jamali, A. Hajiloo, N. Nariman-zadeh, Reliability-based robust Pareto design of linear state feedback controllers using a multi-objective uniform-diversity genetic algorithm (MUGA), *Expert Systems with Applications*, Vol. 37, No. 1, pp. 401-413, 2010.
- [18] M. Masoumnezhad, A. Moafi, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Optimal design of mixed Kalman- H_∞ infinity filter using multi objective optimization method, *Journal of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University*, 2013.
- [19] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, D. A. V. Veldhuizen, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Second Edition ed., pp. 63-94, Springer, 2007.
- [20] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan, A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 6, No. 2, pp. 182-197, 2002.