



تحلیل غیرخطی پدیده لرزه در فرآیند تراشکاری با در نظر گرفتن همزمان دینامیک قطعه کار و ابزار براده برداری

محمد مهدی جلیلی بهابادی^{۱*}، حجت‌الله طواری^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

۲- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

*jalili@yazd.ac.ir، ۸۹۱۹۵/۷۴۱، صندوق پستی

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۷ آبان ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۳ آذر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۱۷ خرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

لرزه

فرآیند تراشکاری

پارامترهای بدون بعد

نیروهای براده برداری

چکیده

در این مقاله، یک مدل سه‌بعدی غیرخطی جدید از ارتعاشات لرزه در فرآیند تراشکاری ارائه شده است. قطعه کار به‌عنوان محور در حال دوران تحت تأثیر نیروهای براده برداری مدل‌سازی شده است. ابزار براده برداری نیز به‌عنوان تیر یک سر گیردار مدل‌سازی شده است. در ادامه با استفاده از تئوری پی-باکینگهام معادلات بدون بعد حرکت برای ارتعاشات عرضی و پیچشی قطعه کار و ارتعاشات عرضی و طولی ابزار براده برداری به دست آمده‌اند. در نهایت با به کارگیری روش مودهای فرضی، یک حل عددی برای این مسئله غیرخطی ارائه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف همچون موقعیت طولی ابزار براده برداری، عرض براده برداری و شعاع قطعه کار بر روی پایداری براده برداری در دو حالت ماشین کاری با و بدون مرغک بررسی شده است. با استفاده از این نتایج، محدوده‌های سرعت اسپیندل به‌منظور پایداری فرآیند در شرایط مختلف براده برداری تعیین شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که استفاده از مرغک برای براده برداری در موقعیت نزدیک به انتهای طول قطعه کار باعث افزایش پایداری فرآیند و کاهش احتمال رخداد لرزه نسبت به حالت بدون استفاده از مرغک می‌شود. همچنین در صورت استفاده از مرغک، فرآیند براده برداری در نواحی انتهایی قطعه کار نسبت به مناطق میانی آن از پایداری بیشتری برخوردار است.

Nonlinear analysis of chatter in turning process considering workpiece and cutting tool dynamics simultaneously

Mohammad Mahdi Jalili^{1*}, Hojjatollah Tavari²

1- Mechanical Engineering Department, Yazd University, Yazd, Iran

2- Mechanical Engineering Department, Yazd University, Yazd, Iran

*P.O.B. 89195/741 Yazd, jalili@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 October 2013
Accepted 04 December 2013
Available Online 07 June 2014

Keywords:

Chatter
Turning Process
Dimensionless Parameters
Cutting Force.

ABSTRACT

A new 3-D nonlinear model of chatter vibration in turning process is presented in this paper. Workpiece and cutting tool are modeled as rotational shaft and cantilever beam, respectively which are excited by cutting forces. Then π -Buckingham theory is used to extract dimensionless equations of motion for transverse and torsional vibrations of workpiece and transverse and longitudinal vibrations of cutting tool. Using the mode summation method, a numerical solution is presented for this nonlinear problem. Effect of cutting parameters such as longitudinal cutting position, cutting width, cutting depth and radius of workpiece for machining with and without tailstock are investigated. Using these results turning velocity intervals for stable and unstable cuts are determined. Also comparing the results for workpiece with and without tailstock shows that machining with tailstock near the end of the workpiece increases process stability and using tailstock for machining near the end of the workpiece compared to machining middle region of the workpiece decreases the probability of chatter occurrence.

۱- مقدمه

براده برداری به‌صورت سیستم جرم متمرکز، فنر و میراگر فرض شده‌اند [۱،۲]. اما در سال‌های اخیر، مدل‌سازی پدیده غیرخطی لرزه با در نظر گرفتن پدیده‌های غیرخطی مؤثر بر آن صورت گرفته است. لین و ونگ یک مدل دینامیکی دوبعدی ساده را با در نظر گرفتن نیروهای براده برداری غیرخطی روی فرآیند براده برداری با هندسه متعامد بررسی نمودند. آن‌ها همچنین اثرات ابزار براده برداری روی سطوح موج‌دار قطعه کار و تغییرات زاویه براده برداری در فرآیند براده برداری را در نظر گرفته‌اند [۳]. مرادی و همکاران

پدیده لرزه^۱ در فرآیند ماشین‌کاری یک پدیده غیرخطی است که تحت تأثیر پارامترهایی همچون شرایط براده برداری، هندسه ابزار و قطعه کار و شرایط اصطکاکی بین ابزار و قطعه کار می‌باشد. در اغلب پژوهش‌های پیشین برای پیش‌بینی مرزهای پایداری سیستم در فرآیند تراشکاری از مدل‌های صفحه‌ای استفاده شده است. به‌عنوان مثال در برخی از مدل‌ها، ساختار فرآیند

1- Chatter

Please cite this article using:

M.M. Jalili, H. Tavari, Nonlinear analysis of chatter in turning process considering workpiece and cutting tool dynamics simultaneously, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 177-188, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

سرعت براده برداری و عمق براده برداری است. همچنین مدل اجزاء محدود قطعه کار نیز با استفاده از نرم افزار انسیس تحلیل شده و پارامترهای دینامیکی سیستم به دست آمده است [۱۳]. سکار و همکاران اثرات انحنایی یک قطعه کار مهار شده توسط مرغک را در نظر گرفتند و با در نظر گرفتن حرکت نسبی ابزار و قطعه کار یک مدل دو درجه آزادی از نیروهای براده برداری دینامیکی ارائه کردند. آن‌ها متوجه شدند زمانی که قطعه کار به صورت انعطاف پذیر، بلند و باریک فرض شود، عرض بحرانی براده در سرعت‌های بالا بسیار بزرگتر از مدل قطعه کار به صورت صلب است. اثر موقعیت طولی ابزار براده برداری، ابعاد قطعه کار، انعطاف پذیری ابزار و میرایی ابزار بر روی پایداری دینامیکی نیز در این مدل در نظر گرفته شده است [۱۴].

با اینکه پژوهش‌های زیادی بر روی پدیده لرزه انجام شده است اما مدل‌های استفاده شده برای ابزار براده برداری و قطعه کار در این تحقیقات اکثراً مدل‌هایی ساده هستند. در این مقاله سعی شده است با ارائه یک مدل سه بعدی از قطعه کار و ابزار براده برداری، پدیده لرزه مورد بررسی قرار گیرد. از دیگر ویژگی‌های این پژوهش می‌توان به در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپی در مدل قطعه کار، بررسی پدیده لرزه برای براده برداری در هر نقطه در امتداد طول قطعه کار و استفاده از پارامترهای بدون بعد به منظور بررسی و آنالیز حساسیت مناسب تر روی پارامترهای مؤثر بر ارتعاشات لرزه اشاره نمود. علاوه بر این، در نظر گرفتن فرضیات تئوری تیر اولیو-برنولی با احتساب عبارتهای غیرخطی و اینرسی دورانی برای قطعه کار و بررسی همزمان ابزار براده برداری و قطعه کار از جمله موارد مورد توجه در این مقاله می‌باشند.

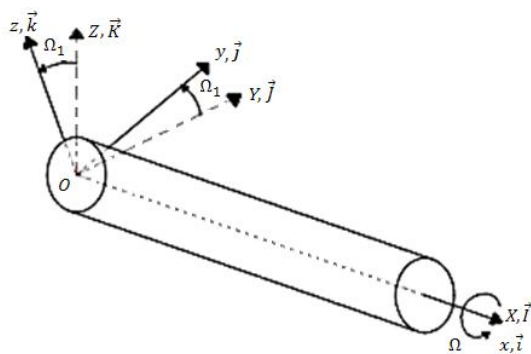
۲- مدل سازی سیستم و به دست آوردن معادلات حرکت

دو جزء اصلی در بررسی پدیده لرزه در تراشکاری، ابزار براده برداری و قطعه کار می‌باشند. بنابراین در ادامه، مدل سازی و معادلات حرکت برای این دو جزء به صورت مجزا آورده شده است.

۲-۱- قطعه کار

با توجه به اینکه قطعه کار کاملاً محکم در گیره اسپیندل ماشین تراش بسته می‌شود می‌توان آن را به صورت یک محور دورانی یک سر گیردار مدل سازی کرد. اگر انتهای قطعه کار توسط دستگاه مرغک مهار شود می‌توان آن را به صورت محور دورانی یک سر گیردار با انتهای مفصلی در نظر گرفت.

به منظور به دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر قطعه کار از چندین دستگاه مختصات استفاده شده است. مطابق شکل ۱ دستگاه مختصات متعامد Z, Y, X و بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متصل به آن در چارچوب اینرسی \mathcal{R} ثابت شده است. دستگاه مختصات متعامد z, y, x در چارچوب مرجع \mathcal{R} قرار گرفته است که این چارچوب با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega \vec{i}$ نسبت به چارچوب \mathcal{R} دوران می‌کند.



شکل ۱ دستگاه‌های مختصات قبل از تغییر شکل

فرآیند تراشکاری را به عنوان یک سیستم یک درجه آزادی شامل عبارت‌های غیرخطی مرتبه دو و سه مدل سازی کردند. آن‌ها از روش مقیاس‌های چندگانه برای یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل غیرخطی با تأخیر زمانی به منظور بررسی ارتعاشات لرزه احیاکننده، تحت تحریک نیرویی با در نظر گرفتن سایش ابزار استفاده کردند [۴]. ساجدی پور و بهبهانی با استفاده از مدل دو درجه آزادی، به منظور جلوگیری از رخداد پدیده لرزه خود تحریک در فرآیند تراشکاری، یک کنترل کننده فازی نیمه فعال ارائه کردند. در این مدل، قطعه کار به عنوان جسم صلب و ابزار براده برداری به صورت جرم متمرکز متصل به فنر و میراگر در نظر گرفته شده است [۵]. چاندیرامانی و پوسالا دینامیک لرزه را با یک مدل دو درجه آزادی از ابزار براده برداری به صورت کاملاً ساده بررسی کردند. آن‌ها متوجه شدند که با افزایش عرض براده برداری، به تناوب ابزار از قطعه کار جدا می‌شود و دامنه ارتعاشات لرزه افزایش می‌یابد. این در حالی است که با افزایش سرعت براده برداری، فرکانس جدایی ابزار از روی قطعه کار افزایش می‌یابد [۶]. چن و سائو براساس تئوری تیرها مدل دینامیکی دوبعدی از ابزار براده برداری و قطعه کار در دو حالت با و بدون مرغک ارائه کردند. آن‌ها با در نظر گرفتن قطعه کار به عنوان یک سیستم پیوسته، اثرات پارامترهای قطعه کار بر روی پایداری دینامیکی فرآیند تراشکاری را بررسی کردند. در این تحقیق همچنین اثر سرعت‌های متفاوت اسپیندل روی عرض بحرانی براده بررسی شده است. نتایج آن‌ها نشان داد که تحت شرایط متفاوت با در نظر گرفتن تغییر شکل قطعه کار، عرض بحرانی براده با فرض مدل پیوسته، همواره بزرگتر از عرض بحرانی براده با فرض مدل جسم صلب است [۷، ۸]. ولا مارتینز و همکاران یک مدل دو درجه آزادی براساس برخورد بین ابزار و قطعه کار ارائه کرده و با مدل یک درجه آزادی مقایسه کردند. آن‌ها نشان دادند که مدل دو درجه آزادی، منطقه پایداری دینامیکی بزرگتری نسبت به مدل یک درجه آزادی پیش‌بینی می‌کند [۹].

هانا و توبیاس یک مدل یک درجه آزادی از قطعه کار را به وسیله یک معادله دیفرانسیل با تأخیر زمانی با عبارت‌های چند جمله‌ای مرتبه دو و سه بررسی کردند. این عبارت‌های غیرخطی به سختی ساختاری سیستم و نیروهای براده برداری مربوط می‌شدند. آن‌ها با این مدل پایداری لرزه را پیش‌بینی کردند. این پایداری براساس عرض برش به سه ناحیه پایدار بدون شرط، پایدار مشروط و ناپایدار تقسیم می‌شود [۱۰]. داسانایاک و ساه ارتعاشات لرزه در تراشکاری را با استفاده از یک مدل سه بعدی بررسی و نتایج را با مدل یک بعدی مقایسه کردند. آن‌ها مدل سه بعدی قطعه کار را به عنوان سیستمی شامل سه قسمت دوران کننده مجزا در نظر گرفتند. این مدل از سه قسمت ماشین کاری شده، در حال ماشین کاری و ماشین کاری نشده که توسط یک شافت انعطاف پذیر به هم متصل شده‌اند تشکیل شده است. آن‌ها متوجه شدند در صورت صرف نظر از ارتعاشات قطعه کار و اکتفا کردن به در نظر گرفتن ارتعاشات ابزار براده برداری در مدل سازی تراشکاری، باعث توصیف اشتباه از دینامیک این نوع ماشین کاری می‌شود. این مسأله نشان می‌دهد که در صورت در نظر گرفتن همزمان ابزار و قطعه کار در مدل سازی فرآیند تراشکاری، می‌توان به پاسخ دقیق تری دست یافت [۱۱]. دومبوواری و همکاران یک مدل یک درجه آزادی برای فرآیند براده برداری متعامد برای تحلیل حرکت‌های با دامنه بزرگ ارائه کردند. این مدل براساس یک معادله دیفرانسیل تأخیری و با در نظر گرفتن اثر احیاکنندگی فرآیند تراشکاری تنظیم شده است [۱۲]. اوربیکین و همکاران با استفاده از روش چیشیف یک الگوریتم به منظور پیش‌بینی پایداری تراشکاری بر روی قطعه کار انعطاف پذیر ارائه کردند. این مدل یک بعدی شامل متغیرهایی همچون شعاع نوک ابزار،

۲-۲-۲- به‌دست آوردن معادلات حرکت

با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی برای قطعه کار به‌دست می‌آید. اصل هامیلتون با رابطه (۲) بیان می‌شود [۱۵].

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(U - T) - \delta W] dt = 0 \quad (2)$$

۲-۲-۱- محاسبه انرژی پتانسیل

بیان رایج برای انرژی کرنشی براساس تنش‌ها و کرنش‌های مهندسی در رابطه (۳) آورده شده است [۱۵].

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{x\eta} \varepsilon_{x\eta} + \sigma_{x\xi} \varepsilon_{x\xi}) d\eta d\xi dx \quad (3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{x\eta} &= G \varepsilon_{x\eta} \\ \sigma_{x\xi} &= G \varepsilon_{x\xi} \end{aligned} \quad (4)$$

واریشن رابطه (۳) به‌صورت رابطه (۵) به‌دست می‌آید.

$$\delta U = \int_0^L (\bar{Y}_v \delta v + \bar{Y}_w \delta w + \bar{Y}_\varphi \delta \varphi) dx + b(U) \quad (5)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_v &= (M_z \cos \varphi + M_y \sin \varphi) - (V_x v) \\ \bar{Y}_w &= (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi) - (V_x w) \\ \bar{Y}_\varphi &= -(S_x + T_x) - v(M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi) \\ &\quad - w(M_z \cos \varphi + M_y \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(U) &= [V_x v - (M_z \cos \varphi + M_y \sin \varphi)] \delta v \Big|_0^L \\ &\quad + (M_z \cos \varphi + M_y \sin \varphi) \delta v \Big|_0^L \\ &\quad + (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi) \delta w \Big|_0^L \\ &\quad + [V_x w - (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi)] \delta w \Big|_0^L \\ &\quad + (S_x + T_x) \delta \varphi \Big|_0^L \end{aligned} \quad (6)$$

تنش‌ها و گشتاورهای رابطه (۶) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} V_x &\equiv \iint_A \sigma_{xx} d\eta d\xi = EA/2 (v^2 + w^2) \\ S_x &\equiv \iint_A (\eta \sigma_{x\xi} - \xi \sigma_{x\eta}) d\eta d\xi = GJ\varphi \\ T_x &\equiv \iint_A \varphi \sigma_{xx} (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi = EJ\varphi/2 (v^2 + w^2) \\ M_y &\equiv \iint_A \xi \sigma_{xx} d\eta d\xi = EI_y (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \\ M_z &\equiv - \iint_A \eta \sigma_{xx} d\eta d\xi = EI_z (v \cos \varphi + w \sin \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

انتگرال‌های موجود در رابطه (۷) با فرض سطح مقطع دایره‌ای طبق رابطه (۸) محاسبه می‌شوند.

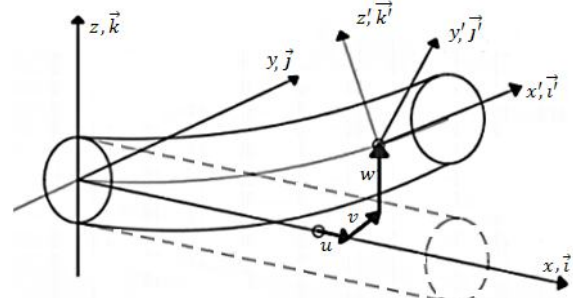
$$\begin{aligned} A &\equiv \iint_A d\eta d\xi = \pi R^2 \\ I_y &\equiv \iint_A \xi^2 d\eta d\xi = \pi/4 R^4 \\ I_z &\equiv \iint_A \eta^2 d\eta d\xi = \pi/4 R^4 \\ J &\equiv \iint_A (\xi^2 + \eta^2) d\eta d\xi = \pi/2 R^4 \end{aligned} \quad (8)$$

۲-۲-۲- محاسبه انرژی جنبشی

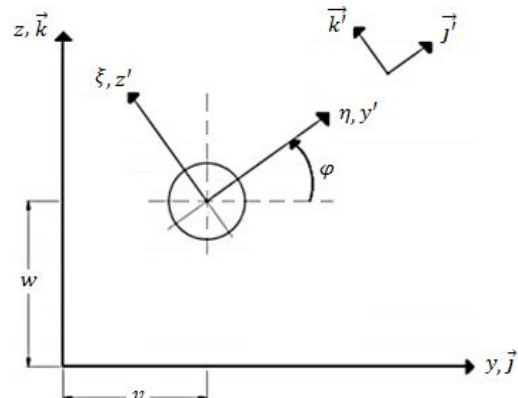
مکان یک نقطه دلخواه روی تیر بعد از تغییر شکل در مختصات (x_1, y_1, z_1) مطابق رابطه زیر قرار می‌گیرد [۱۵]:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - v(\eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi) - w(\eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi) \\ y_1 &= v + \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi \\ z_1 &= w + \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi \end{aligned} \quad (9)$$

سرعت این نقطه نسبت به چارچوب \mathcal{R} برابر است با:



شکل ۲ وضعیت تیر قبل و بعد از جابجایی‌های الاستیک



شکل ۳ مختصات سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل

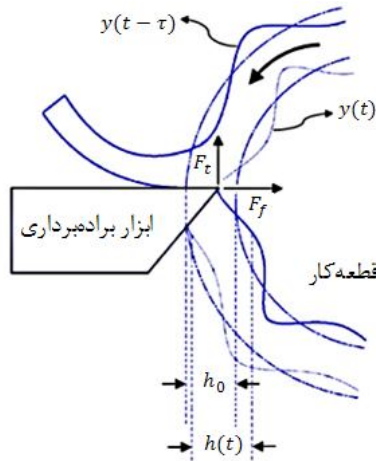
نقطه O یک نقطه ثابت دلخواه در چارچوب‌های \mathcal{R} و \mathcal{R} است که در قسمت پایه محور قرار گرفته است. دستگاه مختصات x, y, z و بردارهای یکه متناظرش، یعنی $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ در چارچوب ثابت شده‌اند.

تغییر شکل‌های خمشی تیر توسط جابجایی‌های الاستیک u, v, w به ترتیب، موازی با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. همچنین یک نقطه در دستگاه x, y, z قبل از تغییر شکل در مختصات $(x, 0, 0)$ قرار گرفته است که بعد از تغییر شکل به مختصات $(x + u, v, w)$ انتقال می‌یابد.

در شکل ۳ سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل نشان داده شده است. محورهای دستگاه مختصات η, ξ محورهای اصلی سطح مقطع هستند. پس از تغییر شکل تیر، مرکز برش آن (مبدأ دستگاه مختصات η, ξ) به اندازه u در جهت x (که در شکل ۳ نشان داده نشده است)، v در جهت y و w در جهت z جابه‌جا می‌شود. ضمناً در این شکل صفحه $\vec{k} - \vec{j}$ با صفحه $\vec{k} - \vec{i}$ در یک صفحه یکسان قرار ندارند و فقط تصویر آن در صفحه $\vec{k} - \vec{j}$ نمایش داده شده است. همچنین زاویه پیچش سطح مقطع حول محور x به اندازه φ می‌باشد. در اینجا به‌دلیل ناچیز بودن مقدار u از آن صرف نظر شده است.

چندین تبدیل مختصات در اینجا استفاده شده است که شامل یک تبدیل ساده از دستگاه $\vec{K}, \vec{J}, \vec{I}$ به دستگاه $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ و یک تبدیل پیچیده‌تر از دستگاه $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ به دستگاه $\vec{K}, \vec{J}, \vec{I}$ می‌شود. روابط مربوط به این تبدیل در رابطه (۱) آمده است [۱۵].

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \left(1 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}w^2\right) \vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \\ \vec{j} &= -(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \vec{i} + \left(1 - \frac{1}{2}v^2\right) \cos(\varphi) \\ &\quad + v\vec{j} + (1 - \frac{1}{2}w^2) \sin \varphi \vec{k} \\ \vec{k} &= -(-v \sin \varphi + w \cos \varphi) \vec{i} - \left(1 - \frac{1}{2}v^2\right) \sin(\varphi) \\ &\quad + v\vec{j} + (1 - \frac{1}{2}w^2) \cos \varphi \vec{k} \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۴ نیروهای براده‌برداری در فرآیند براده‌برداری متعامد

$$\begin{aligned}
 & EI[(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \cos \varphi + (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \sin \varphi] - m\Omega^2 v - \frac{EA}{2} [(v^2 + w^2)v] + m\dot{v} \\
 & - \rho I(\ddot{v} + \dot{\varphi}w + 2\dot{\varphi}\dot{w}) - 2m\Omega\dot{w} - F_f \delta_D(x - x_0) = 0 \\
 & EI[(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \sin \varphi - (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \cos \varphi] - m\Omega^2 w - \frac{EA}{2} [(v^2 + w^2)w] + m\dot{w} \\
 & - \rho I(\ddot{w} - \dot{\varphi}v - 2\dot{\varphi}\dot{v}) + 2m\Omega\dot{v} - F_t \delta_D(x - x_0) = 0 \\
 & GJ\varphi + EIv[(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \sin \varphi - (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \cos \varphi] + EIw[(v \cos \varphi + w \sin \varphi) \cos \varphi \\
 & + (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \sin \varphi] - 2\rho I\dot{\varphi} \\
 & - w(\ddot{v} + \dot{\varphi}w + 2\dot{\varphi}\dot{w}) + \rho I[v(\ddot{w} - \dot{\varphi}v - 2\dot{\varphi}\dot{v}) \\
 & - RF_t \delta_D(x - x_0) = 0 \tag{۲۰}
 \end{aligned}$$

در رابطه (۲۰) عبارتهای $2m\Omega\dot{v}$ و $2m\Omega\dot{w}$ معرف اثرات ژيروسکوپی می‌باشند.

۲-۲- ابزار براده‌برداری

ابزار براده‌برداری به صورت تیر یک سر گیردار مدل سازی شده است. با توجه به هندسه ابزار براده‌برداری، تیر با طول کوتاه فرض شده است. به منظور بررسی ارتعاشات عرضی آن از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. به منظور بررسی ارتعاشات طولی ابزار و تأثیر این ارتعاشات بر نیروهای براده‌برداری، ابزار به عنوان یک میله تحت بارگذاری محوری در نظر گرفته شده است. با توجه به خصوصیات ابزار براده‌برداری، روابط مربوط به تئوری تیر تیموشنکو در رابطه (۲۱) آورده شده است [۱۷].

$$\begin{aligned}
 & kA_t G_t \left(-\frac{\partial^2 w_t}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_t} \right) + \rho_t A_t \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} = F_t \delta_D(x_t - L_t) \\
 & -E_t I_t \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_t^2} - kA_t G_t \left(\frac{\partial w_t}{\partial x_t} - \varphi_t \right) + \rho_t I_t \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial t^2} = 0 \tag{۲۱}
 \end{aligned}$$

که در آن w_t معرف ارتعاشات عرضی تیر، φ_t بیانگر دوران سطح مقطع تیر و k ضریب تصحیح برشی است.

به منظور بررسی ارتعاشات طولی ابزار براده‌برداری، از معادله ارتعاشات طولی میله بر اساس خصوصیات ابزار براده‌برداری استفاده می‌شود [۱۷]. بر این اساس داریم:

$$E_t A_t \frac{\partial^2 u_t}{\partial x_t^2} - \rho_t A_t \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} = -F_f \delta_D(x_t - L_t) \tag{۲۲}$$

که در آن u_t بیانگر ارتعاشات طولی ابزار براده‌برداری می‌باشد.

۲-۳- بی‌بعد سازی معادلات حرکت

از جمله دلایل بی‌بعد سازی معادلات، کاهش تعداد پارامترهای معادله و آنالیز حساسیت بهتر سیستم دینامیکی تحت تغییر پارامترها می‌باشد. یکی از روش‌های رایج در بی‌بعد سازی معادلات روش بی-کینگهام می‌باشد. با استفاده از این روش، پارامترهای بدون بعد مسئله در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega \vec{I} \times \vec{r} \tag{۱۰}$$

که در آن $\vec{r} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ در چارچوب در حال دوران \mathcal{B} می‌باشد. عبارت $\Omega \vec{I} \times \vec{r}$ اثر دوران دستگاه مختصات به وجود می‌آید. سرعت‌های رابطه (۱۰) برابرند با:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{y}_1 \vec{j} + \dot{z}_1 \vec{k} \\
 \Omega \vec{I} \times \vec{r} &= -\Omega z_1 \vec{j} + \Omega y_1 \vec{k} \tag{۱۱}
 \end{aligned}$$

در نتیجه سرعت کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{v} = \dot{x}_1 \vec{i} + (\dot{y}_1 - \Omega z_1) \vec{j} + (\dot{z}_1 + \Omega y_1) \vec{k} \tag{۱۲}$$

رابطه انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, d\eta \, d\xi \, dx \tag{۱۳}$$

و واریشن رابطه فوق به صورت رابطه (۱۴) می‌باشد:

$$\delta T = \int_0^L \int_A \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} \, d\eta \, d\xi \, dx \tag{۱۴}$$

با محاسبه رابطه (۱۴) بر روی سطح مقطع تیر داریم:

$$\delta T = \int_0^L [(\bar{z}_v - \bar{z}_v) \delta v + (\bar{z}_w - \bar{z}_w) \delta w + \bar{z}_\varphi \delta \varphi] \, dx + b(T) \tag{۱۵}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_v &= m\Omega^2 v + 2m\Omega\dot{w} - m\dot{v} \\
 \bar{z}_w &= m\Omega^2 w - 2m\Omega\dot{v} - m\dot{w} \\
 \bar{z}_\varphi &= -mR^2/4 w(\dot{v} + \dot{\varphi}w - 2\dot{\varphi}\dot{w}) \\
 &+ mR^2/4 v(\dot{w} - \dot{\varphi}v - 2\dot{\varphi}\dot{v}) - mR^2/2 \dot{\varphi} \\
 \bar{z}_v &= -mR^2/4 (\dot{v} + \dot{\varphi}w - 2\dot{\varphi}\dot{w}) \\
 \bar{z}_w &= -mR^2/4 (\dot{w} - \dot{\varphi}v - 2\dot{\varphi}\dot{v}) \\
 m &= \int_A \rho \, d\eta \, d\xi = \rho A = \rho \pi R^2 \\
 b(T) &= \bar{z}_v \delta v \Big|_0^L + \bar{z}_w \delta w \Big|_0^L \tag{۱۶}
 \end{aligned}$$

۲-۲-۳- محاسبه کار مجازی نیروهای ناپایستار

کار مجازی نیروهای ناپایستار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta W = \int_0^L (L_v \delta v + L_w \delta w + M_\varphi \delta \varphi) \, dx \tag{۱۷}$$

که در آن پارامترهای L_v و L_w ، به ترتیب نیروهای توزیع شده در جهت‌های v و w هستند و M_φ ممان پیچشی حول محور الاستیک می‌باشد. این پارامترها طبق رابطه (۱۸) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 L_v &= F_f \delta_D(x - x_0) \\
 L_w &= F_t \delta_D(x - x_0) \\
 M_\varphi &= -RF_t \delta_D(x - x_0) \tag{۱۸}
 \end{aligned}$$

که در آن F_t و F_f ، به ترتیب نیروی براده‌برداری مماسی و عمودی می‌باشند. شکل ۴ نحوه تأثیر این نیروها را در فرآیند براده‌برداری نشان می‌دهد.

مطابق مرجع [۱۶] بر اساس مدل صفحه برش نازک برای فرآیند برش ابزار، نیروهای براده‌برداری مطابق روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{aligned}
 F_f &= K_f a h(t) \\
 F_t &= K_t a h(t) \\
 h(t) &= h_0 - [y(t) - y(t - \tau)] \\
 K_f &= [\tau_s \sin(\beta - \alpha)] / [\sin \phi \cos(\phi + \beta - \alpha)] \\
 K_t &= [\tau_s \cos(\beta - \alpha)] / [\sin \phi \cos(\phi + \beta - \alpha)] \tag{۱۹}
 \end{aligned}$$

که در آن h_0 ، عمق براده‌برداری نامی، K_f و K_t به ترتیب ضرایب نیروی براده‌برداری در جهت عمودی و مماسی، a ، عرض براده‌برداری و $[y(t) - y(t - \tau)]$ عمق براده دینامیکی می‌باشد. همچنین τ_s تنش برشی تسلیم، β زاویه اصطکاک بین ابزار و براده، α زاویه براده و ϕ زاویه برشی هستند.

با جایگذاری روابط (۵)، (۱۵) و (۱۷) در رابطه (۲)، معادلات حرکت حاکم بر سیستم در جهت‌های x ، y و φ به صورت زیر به دست می‌آیند.

مودهای ارتعاشات تیر و $T_{w_t}^*(t^*), T_{u_t}^*(t^*), T_{\varphi_t}^*(t^*), T_{w_i}^*(t^*), T_{v_i}^*(t^*)$ و $T_{\varphi_t}^*(t^*)$ ضرایب زمانی می‌باشند.

شرایط مرزی مربوط به تیر یک سر گیردار (بدون مرغک) و تیر یک سر گیردار-یک سر مفصل (با مرغک) به ترتیب طبق روابط (۲۶) و (۲۷) آورده شده‌اند.

$$v(0, t) = 0, w(0, t) = 0, \partial v(0, t) / \partial x = 0, \partial w(0, t) / \partial x = 0, \partial^2 v(L, t) / \partial x^2 = 0, \partial^2 w(L, t) / \partial x^2 = 0, \partial^3 v(L, t) / \partial x^3 = 0, \partial^3 w(L, t) / \partial x^3 = 0. \quad (26)$$

$$v(0, t) = 0, w(0, t) = 0, \partial v(0, t) / \partial x = 0, \partial w(0, t) / \partial x = 0, v(L, t) = 0, w(L, t) = 0, \partial^2 v(L, t) / \partial x^2 = 0, \partial^2 w(L, t) / \partial x^2 = 0. \quad (27)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در روابط (۲۳) و (۲۴)، معادلات دیفرانسیل جزئی مطابق با روابط (پ-۱) و (پ-۲) به دست می‌آیند. سپس با ضرب طرفین این روابط، به ترتیب در شکل مودهای رابطه (۲۵) و انتگرال گیری در سراسر طول قطعه کار (رابطه (۲۸)) و ابزار براده برداری (رابطه (۲۹)) معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به دست می‌آیند:

$$A_1 T_{v_i}^*(t^*) + A_2 T_{v_i}^{*3}(t^*) + A_3 T_{v_i}^*(t^*) T_{w_i}^{*2}(t^*) + A_4 T_{w_i}^*(t^*) + A_5 T_{v_i}^*(t^*) + A_6 T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{w_i}^*(t^*) + A_7 T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{w_i}^*(t^*) + A_8 F_f^*(t^*) = 0$$

$$B_1 T_{w_i}^*(t^*) + B_2 T_{w_i}^{*3}(t^*) + B_3 T_{w_i}^*(t^*) T_{v_i}^{*2}(t^*) + B_4 T_{v_i}^*(t^*) + B_5 T_{w_i}^*(t^*) + B_6 T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{v_i}^*(t^*) + B_7 T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{v_i}^*(t^*) + B_8 F_t^*(t^*) = 0$$

$$C_1 T_{\varphi_i}^*(t^*) + C_2 T_{v_i}^*(t^*) T_{w_i}^*(t^*) + C_3 T_{w_i}^*(t^*) T_{v_i}^*(t^*) + C_4 T_{w_i}^{*2}(t^*) T_{\varphi_i}^*(t^*) + C_5 T_{w_i}^*(t^*) T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{w_i}^*(t^*) + C_6 T_{v_i}^*(t^*) T_{w_i}^*(t^*) + C_7 T_{v_i}^{*2}(t^*) T_{\varphi_i}^*(t^*) + C_8 T_{v_i}^*(t^*) T_{\varphi_i}^*(t^*) T_{v_i}^*(t^*) + C_9 T_{\varphi_i}^*(t^*) + C_{10} F_t^*(t^*) = 0 \quad (28)$$

و

$$D_1 T_{w_t}^*(t^*) + D_2 T_{\varphi_t}^*(t^*) + D_3 T_{w_t}^*(t^*) + D_4 F_t^*(t^*) = 0$$

$$E_1 T_{\varphi_t}^*(t^*) + E_2 T_{w_t}^*(t^*) + E_3 T_{\varphi_t}^*(t^*) = 0$$

$$F_1 T_{u_t}^*(t^*) + F_2 T_{u_t}^*(t^*) = 0 \quad (29)$$

مقادیر ضرایب موجود در روابط (۲۸) و (۲۹) به ترتیب در روابط (پ-۳) و (پ-۴) آورده شده‌اند.

۴- ارائه نتایج

معادلات دیفرانسیل (۲۸) و (۲۹) با استفاده از روش رانگ کوتا در نرم افزار متلب حل شده‌اند و نتایج شبیه سازی برای دو حالت براده برداری پایدار و ناپایدار (به همراه پدیده لرزه) آورده شده‌اند.

۴-۱- فرآیند براده برداری پایدار

در صورتی که در فرآیند تراشکاری پدیده لرزه رخ ندهد، براده برداری در حالت پایدار انجام می‌شود. برای نمونه، مقادیر پارامترهای بدون بعد برای یک فرآیند براده برداری پایدار بدون استفاده از مرغک در جدول ۲ آورده شده‌اند.

جدول ۲ مقادیر پارامترهای براده برداری بدون بعد در حالت پایدار			
پارامتر بدون بعد	مقدار	پارامتر بدون بعد	مقدار
Ω^*	۰/۰۶۴	A_t^*	۰/۰۰۱۴
R^*	۰/۰۷۵	I_t^*	$1/65 \times 10^{-7}$
A^*	۰/۰۱۷۷	J_t^*	$2/78 \times 10^{-7}$
I^*	$2/48 \times 10^{-5}$	h_0^*	$2/5 \times 10^{-5}$
J^*	$4/97 \times 10^{-5}$	x_0^*	۰/۷۵
a^*	۰/۰۱۲۵	L_t^*	۰/۲

جدول ۱ پارامترهای بدون بعد قطعه کار و ابزار براده برداری

پارامتر بی بعد	تعریف	پارامتر بی بعد	تعریف
A^*	A/L^2	R^*	R/v
E^*	$E/\rho\Omega^2 L^2$	t^*	$\Omega t/2\pi$
F_f^*	$F_f/\rho\Omega^2 L^4$	v^*	v/L
F_t^*	$F_t/\rho\Omega^2 L^4$	w^*	w/L
G^*	$G/\rho\Omega^2 L^2$	x^*	x/L
I^*	I/L^4	φ^*	φ
J^*	J/L^4	δ_D^*	$L\delta_D$
A_t^*	A_t/L^2	u_t^*	u_t/L
E_t^*	$E_t/\rho\Omega^2 L^2$	w_t^*	w_t/L
G_t^*	$G_t/\rho\Omega^2 L^2$	x_t^*	x_t/L
I_t^*	I_t/L^4	φ_t^*	φ_t
a^*	a/L	x_0^*	x_0/L
h_0^*	h_0/L	ρ_t^*	ρ_t/ρ
L_t^*	L_t/L	w_t^*	w_t/L
Ω^*	$1/\sqrt{E^*}$	r^*	$\sqrt{v^{*2} + w^{*2}}$

با استفاده از پارامترهای بدون بعد جدول ۱، معادلات حرکت بی بعد حاکم بر قطعه کار به صورت رابطه (۲۳) به دست می‌آیند.

$$E^* I^* [(v^* \cos \varphi^* + w^* \sin \varphi^*) \cos \varphi^* + (v^* \sin \varphi^* - w^* \cos \varphi^*) \sin \varphi^*] - \frac{E^* A^*}{2} [(v^{*2} + w^{*2}) v^*] - \frac{A^* \dot{w}^*}{\pi} + \frac{A^* \dot{v}^*}{4\pi^2} - A^* v^* - F_f^* \delta_D^* (x^* - x_0^*) - \frac{I^*}{4\pi^2} (\ddot{v}^* + \dot{\varphi}^* w^* + 2\dot{\varphi}^* \dot{w}^*) = 0$$

$$E^* I^* [(v^* \cos \varphi^* + w^* \sin \varphi^*) \sin \varphi^* - (v^* \sin \varphi^* - w^* \cos \varphi^*) \cos \varphi^*] - \frac{E^* A^*}{2} [(v^{*2} + w^{*2}) w^*] + \frac{A^* \dot{w}^*}{\pi} + \frac{A^* \dot{v}^*}{4\pi^2} - A^* w^* - F_t^* \delta_D^* (x^* - x_0^*) - \frac{I^*}{4\pi^2} (\ddot{w}^* - \dot{\varphi}^* v^* - 2\dot{\varphi}^* \dot{v}^*) = 0$$

$$G^* J^* \varphi^* - \frac{I^* w^*}{4\pi^2} (\ddot{v}^* + \dot{\varphi}^* w^* + 2\dot{\varphi}^* \dot{w}^*) + \frac{I^* v^*}{4\pi^2} (\ddot{w}^* - \dot{\varphi}^* v^* - 2\dot{\varphi}^* \dot{v}^*) - \frac{I^* \dot{\varphi}^*}{2\pi^2} + E^* I^* v^* [(v^* \cos \varphi^* + w^* \sin \varphi^*) \sin \varphi^* - (v^* \sin \varphi^* - w^* \cos \varphi^*) \cos \varphi^*] + I^* w^* [(v^* \cos \varphi^* + w^* \sin \varphi^*) \cos \varphi^* + (v^* \sin \varphi^* - w^* \cos \varphi^*) \sin \varphi^*] - F_t^* \delta_D^* (x^* - x_0^*) = 0 \quad (23)$$

همچنین معادلات بی بعد حاکم بر ابزار براده برداری طبق رابطه (۲۴) به دست می‌آیند.

$$k A_t^* G_t^* \left(-\frac{\partial^2 w_t^*}{\partial x_t^{*2}} + \frac{\partial \varphi_t^*}{\partial x_t^*} \right) + \rho_t^* A_t^* \ddot{w}_t^* + F_t^* \delta_D^* (x_t^* - L_t^*) = 0$$

$$E_t^* I_t^* \frac{\partial^2 \varphi_t^*}{\partial x_t^{*2}} + k A_t^* G_t^* \left(\frac{\partial w_t^*}{\partial x_t^*} - \varphi_t^* \right) - \rho_t^* I_t^* \ddot{\varphi}_t^* = 0$$

$$E_t^* A_t^* \frac{\partial^2 u_t^*}{\partial x_t^{*2}} - \rho_t^* A_t^* \ddot{u}_t^* - F_f^* \delta_D^* (x_t^* - L_t^*) = 0 \quad (24)$$

۳- شبیه سازی فرآیند براده برداری

در این پژوهش به منظور حل معادلات حرکت، از روش مودهای فرضی [۱۸] استفاده شده است. به این منظور، پاسخ معادلات (۲۳) و (۲۴) به صورت ترکیب خطی شکل مودها به صورت زیر فرض می‌شود:

$$v^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n V_i^*(x^*) T_{v_i}^*(t^*)$$

$$w^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n W_i^*(x^*) T_{w_i}^*(t^*)$$

$$\varphi^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^*(x^*) T_{\varphi_i}^*(t^*)$$

$$w_t^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n W_{t_i}^*(x^*) T_{w_{t_i}}^*(t^*)$$

$$\varphi_t^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n \varphi_{t_i}^*(x^*) T_{\varphi_{t_i}}^*(t^*)$$

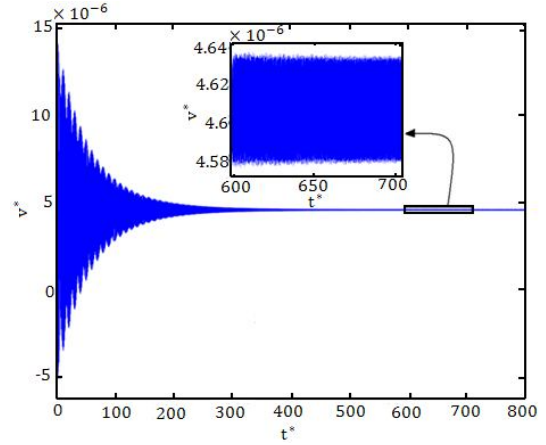
$$u_t^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n U_{t_i}^*(x^*) T_{u_{t_i}}^*(t^*) \quad (25)$$

که در آن $V_i^*(x^*)$ ، $W_i^*(x^*)$ ، $\varphi_i^*(x^*)$ ، $W_{t_i}^*(x^*)$ ، $\varphi_{t_i}^*(x^*)$ ، $U_{t_i}^*(x^*)$ و $T_{v_i}^*(t^*)$ شکل

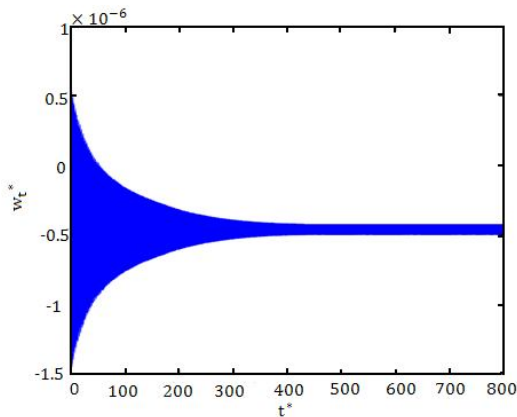
یکسان هستند استفاده نمود. برای نمونه مقادیر این پارامترها برای یک حالت خاص در جدول ۳ آورده شده است.

نتایج مربوط به براده برداری در حالت پایدار در شکل‌های ۵ تا ۸ آورده شده است. شکل‌های ۵ تا ۷ مربوط به ارتعاشات مرکز قطعه کار می‌باشند. همچنین شکل‌های ۷ و ۸ مربوط به ارتعاشات انتهای ابزار براده برداری می‌باشند. نتایج مربوط به نمودار مسیر در شکل ۹ و نمودار فاز در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ ارائه شده‌اند. نمودار مسیر نشان‌دهنده موقعیت نقطه مرکز سطح مقطع قطعه کار در محل براده برداری می‌باشد. نمودار فاز نیز نشان‌دهنده پایداری یا ناپایداری سیستم می‌باشد.

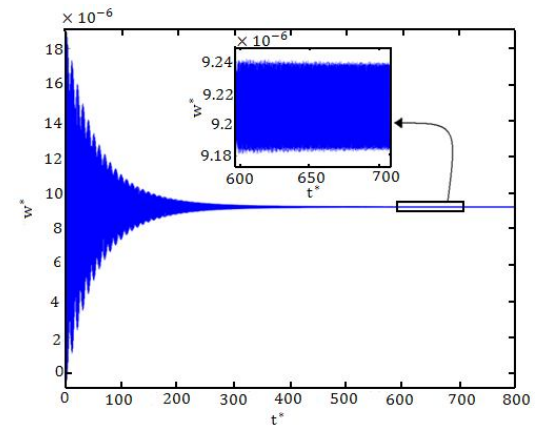
مطابق شکل‌های ۵ تا ۸، پس از گذشت مدت زمانی از شروع فرآیند براده برداری، دامنه ارتعاشات کاهش یافته و در یک مقدار معین ثابت می‌شود.



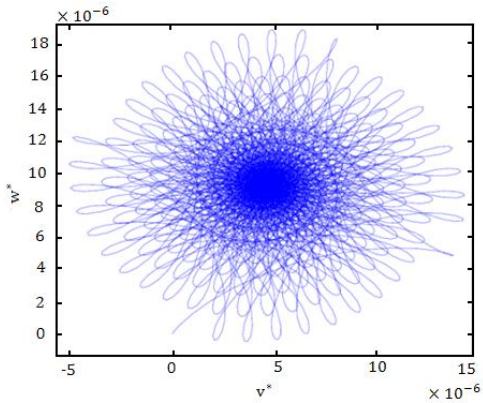
شکل ۵ نمودار $(v^* - t^*)$ در حالت براده برداری پایدار



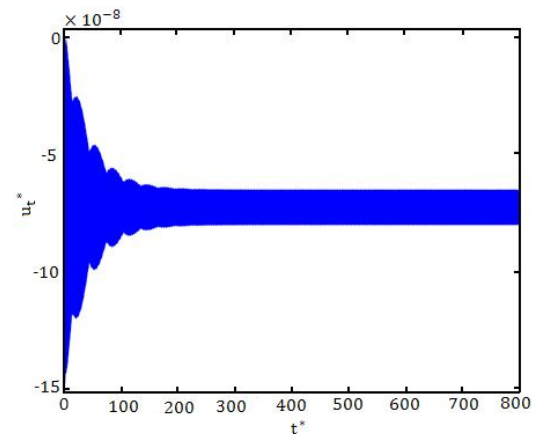
شکل ۸ نمودار $(w_t^* - t^*)$ در حالت براده برداری پایدار



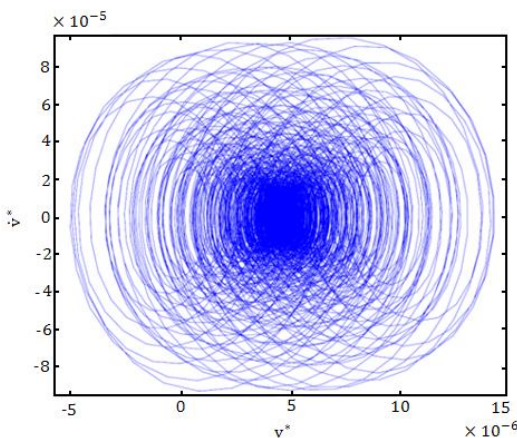
شکل ۶ نمودار $(w^* - t^*)$ در حالت براده برداری پایدار



شکل ۹ نمودار مسیر $(w^* - v^*)$ در حالت براده برداری پایدار



شکل ۷ نمودار $(u_t^* - t^*)$ در حالت براده برداری پایدار

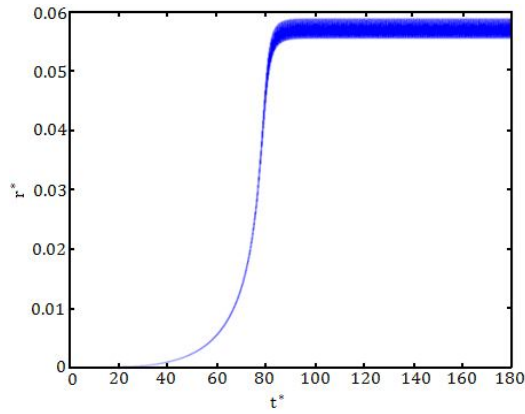


شکل ۱۰ نمودار فاز $(v_t^* - v^*)$ در حالت براده برداری پایدار

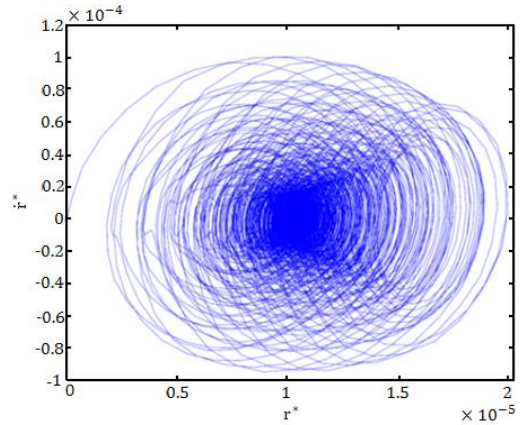
جدول ۳ پارامترهای نمونه واقعی قطعه کار و ابزار براده برداری

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
R	0.03 (m)	L	0.04 (m)
Ω	7700 (rpm)	x_0	0.03 (m)
ρ	7850 (kg/m^3)	h_0	10^{-5} (m)
E	200×10^9 (N/m^2)	G	80×10^9 (N/m^2)
a	0.05 (m)	L_t	0.08 (m)
A_t	$2/24 \times 10^{-6}$ (m^2)		

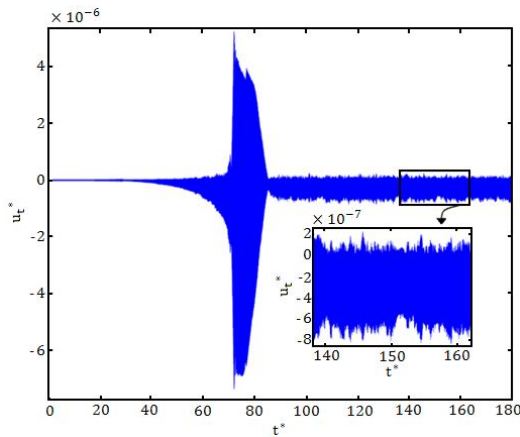
البته با توجه به اینکه از پارامترهای بدون بعد برای بررسی مسئله استفاده شده است، می‌توان نتایج را برای تمام حالت‌هایی که دارای پارامتر بدون بعد



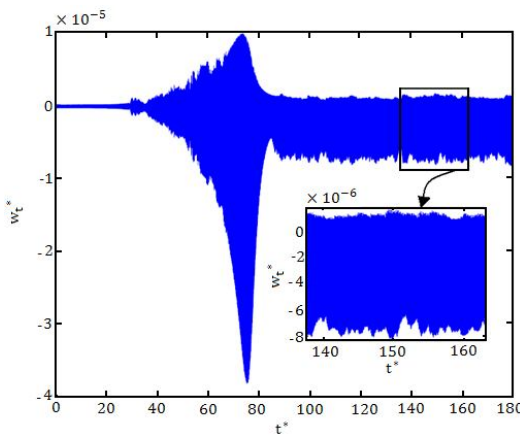
شکل ۱۴ نمودار $(r^* - t^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار



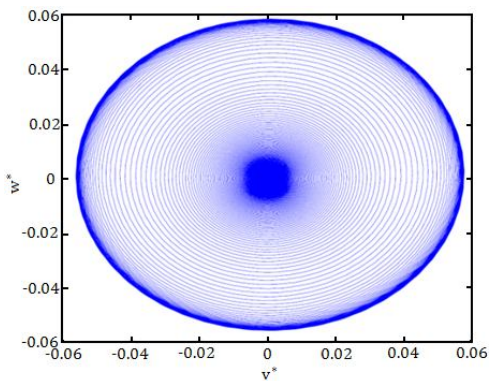
شکل ۱۱ نمودار فاز $(\dot{r}^* - r^*)$ در حالت براده‌برداری پایدار



شکل ۱۵ نمودار $(u_t^* - t^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار



شکل ۱۶ نمودار $(w_t^* - t^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار

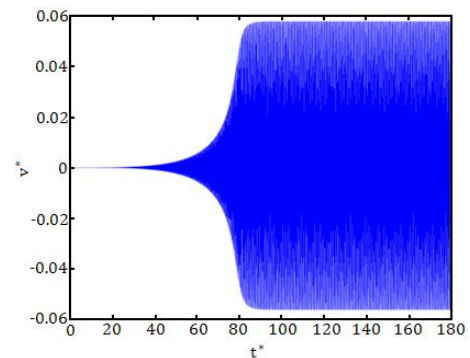


شکل ۱۷ نمودار مسیر $(w^* - v^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار

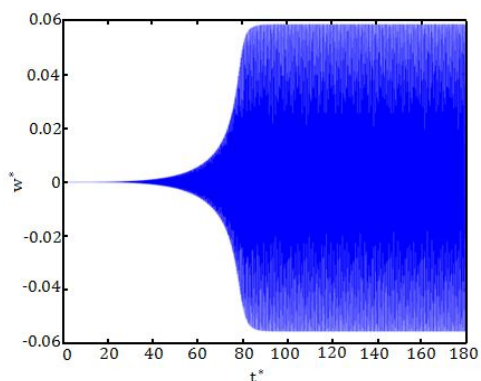
براساس شکل ۹ نوسانات مرکز سطح مقطع قطعه‌کار از مبدأ دستگاه مختصات شروع شده و در ادامه از مبدأ فاصله گرفته و حول نقطه‌ای در صفحه سطح مقطع قطعه‌کار به نوسانات ادامه می‌دهد. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نیز که به‌عنوان نمودار فاز نشان‌دهنده پایداری فرآیند می‌باشند. براده‌برداری در این حالت، پایدار تلقی می‌شود.

۴-۲- فرآیند براده‌برداری ناپایدار

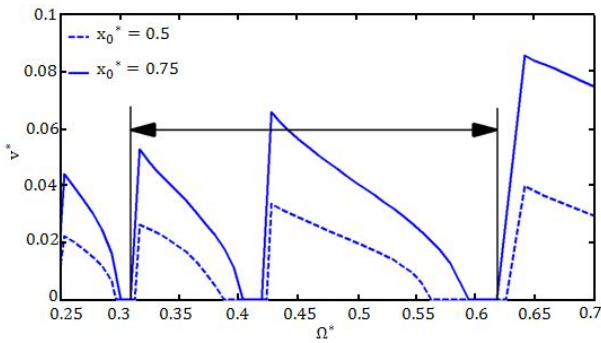
در صورتی که پدیده لرزه در فرآیند براده‌برداری رخ دهد، براده‌برداری به‌صورت ناپایدار می‌باشد. به‌عنوان نمونه، اگر سرعت دورانی بدون بعد ارائه شده در جدول ۲ به $\Omega^* = 0.473$ کاهش یابد پدیده لرزه اتفاق افتاده و فرآیند براده‌برداری ناپایدار می‌شود. نتایج مربوط به براده‌برداری در حالت ناپایدار در شکل‌های ۱۲ تا ۱۶ آورده شده‌اند. شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ مربوط به ارتعاشات مرکز قطعه‌کار می‌باشند. همچنین شکل‌های ۱۵ و ۱۶ مربوط به ارتعاشات انتهای ابزار براده‌برداری می‌باشند.



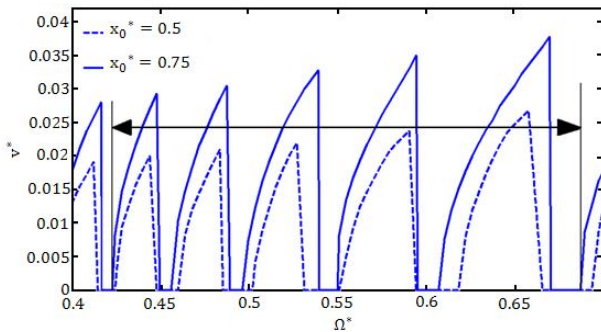
شکل ۱۲ نمودار $(v^* - t^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار



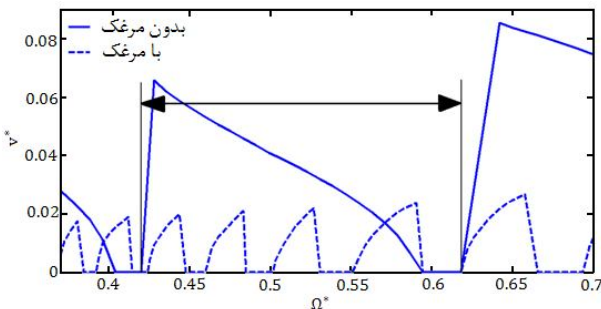
شکل ۱۳ نمودار $(w^* - t^*)$ در حالت براده‌برداری ناپایدار



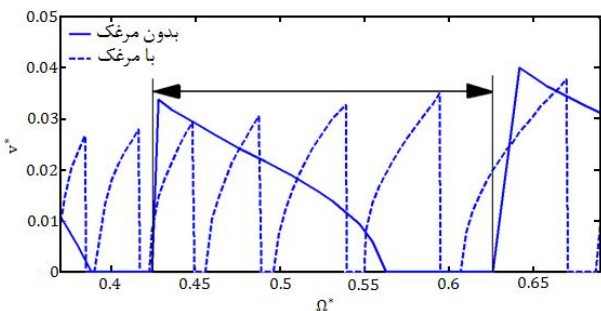
شکل ۲۰ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری بدون مرغک



شکل ۲۱ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری با مرغک



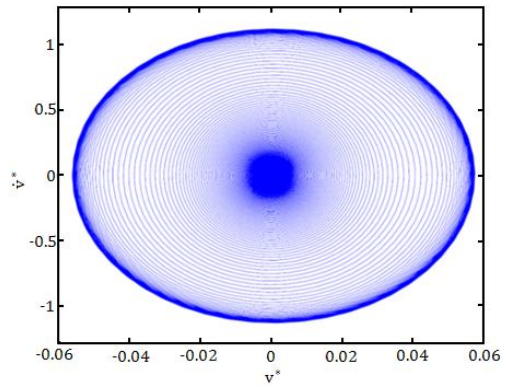
شکل ۲۲ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری در $x_0^* = 0.7/5$



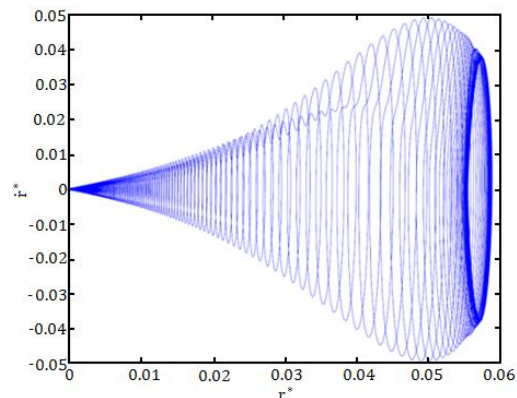
شکل ۲۳ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری در $x_0^* = 0.1/5$

همچنین در این نمودارها زمانی که فرآیند پایدار و بدون لرزه می‌باشد مقدار v^* کوچک بوده و منحنی پاسخ تقریباً به محور Ω^* چسبیده است و زمانی که فرآیند ناپایدار باشد مقدار v^* افزایش یافته و منحنی پاسخ از محور Ω^* فاصله گرفته است.

براساس شکل ۲۰ ملاحظه می‌شود، در حالت براده برداری بدون استفاده از مرغک با افزایش Ω^* ، عرض بازه‌هایی که فرآیند براده برداری، پایدار و بدون لرزه می‌باشد افزایش می‌یابد. همچنین به طور متقابل عرض بازه‌هایی که فرآیند براده برداری با پدیده لرزه همراه می‌باشد، افزایش می‌یابد. به علاوه با افزایش Ω^* مقدار بیشینه حالت ماندگار دامنه ارتعاشات لرزه نیز افزایش پیدا



شکل ۱۸ نمودار فاز $(\dot{v}^* - v^*)$ در حالت براده برداری ناپایدار



شکل ۱۹ نمودار فاز $(\dot{f}^* - f^*)$ در حالت براده برداری ناپایدار

نتایج مربوط به نمودار مسیر در شکل ۱۷ و نمودارهای فاز در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ ارائه شده‌اند.

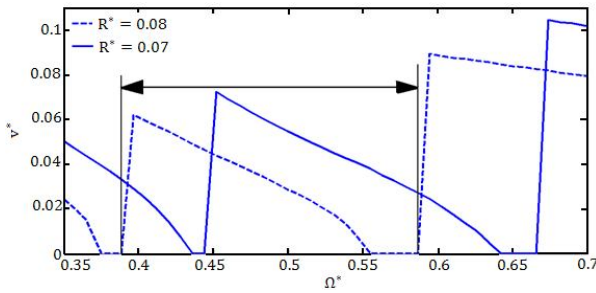
مطابق شکل‌های ۱۲ تا ۱۶، پس از گذشت زمان کوتاهی از شروع فرآیند براده برداری، دامنه ارتعاشات به طور ناگهانی افزایش یافته و در یک مقدار بحرانی ثابت می‌شود. براساس شکل ۱۷ نوسانات مرکز سطح مقطع قطعه کار از نزدیکی مبدأ دستگاه مختصات شروع شده و در ادامه از مبدأ فاصله گرفته و در شعاع ثابتی به نوسانات ادامه می‌دهد. مطابق شکل‌های ۱۸ و ۱۹ که به عنوان نمودار فاز ارائه شده‌اند، روند تغییرات سرعت نسبت به جابه‌جایی را نشان می‌دهند. براده برداری در این حالت، ناپایدار تلقی می‌شود.

۳-۴- تأثیر پارامترهای براده برداری بر پایداری فرآیند در حالت‌های با و بدون مرغک

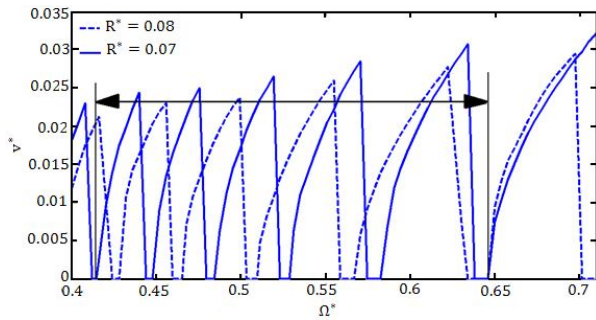
در این قسمت به منظور بررسی تأثیر پارامترهای مختلف براده برداری و همچنین اثر استفاده یا عدم استفاده از مرغک به عنوان تکیه‌گاه کمکی در فرآیند براده برداری، نتایج به طور مقایسه‌ای و تفکیک شده ارائه شده‌اند. به منظور افزایش قابلیت مقایسه بین نتایج در حالت‌های مختلف، مطابق با جدول ۲، یک حالت پایه برای پارامترهای براده برداری در نظر گرفته شده است که در بررسی هر یک از پارامترها، تغییر مقدار آن پارامتر به طور مشخص در نتایج ذکر شده است. نتایج برای مقادیر مختلف Ω^* ارائه شده‌اند.

۳-۴-۱- تأثیر موقعیت طولی ابزار براده برداری (x_0^*)

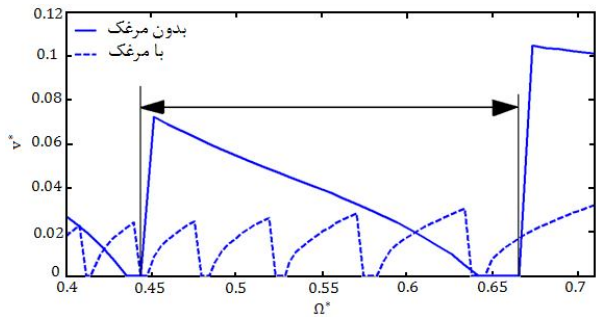
به منظور بررسی تأثیر موقعیت طولی ابزار براده برداری، نتایج براساس براده برداری در دو نقطه مختلف روی قطعه کار و در دو حالت با و بدون مرغک در شکل‌های ۲۰ تا ۲۳ آورده شده‌اند. در این شکل‌ها منظور از v^* مقدار حالت ماندگار دامنه ارتعاشات v^* می‌باشد.



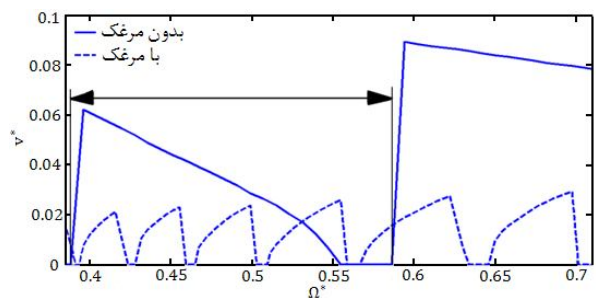
شکل ۲۴ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده‌برداری بدون مرغک



شکل ۲۵ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده‌برداری با مرغک



شکل ۲۶ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده‌برداری در $R^* = 0.07$



شکل ۲۷ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده‌برداری در $R^* = 0.08$

$$\begin{aligned}
 \text{شکل ۲۴} &\Rightarrow \begin{cases} R^* = 0.07 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 4 \\ R^* = 0.08 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 16 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۵} &\Rightarrow \begin{cases} R^* = 0.07 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 13/0.9 \\ R^* = 0.08 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 15/43 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۶} &\Rightarrow \begin{cases} \text{بدون مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 10/73 \\ \text{با مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 13/65 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۷} &\Rightarrow \begin{cases} \text{بدون مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 13/58 \\ \text{با مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 16 \end{cases}
 \end{aligned}$$

می‌کند. در حالت براده‌برداری قطعه‌کار بدون استفاده از مرغک، هر چه موقعیت طولی ابزار براده‌برداری به سمت انتهای قطعه‌کار حرکت کند، عرض بازه‌های پایداری فرآیند کاهش یافته و مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات در زمان ایجاد لرزه افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۲۱، نتایج مربوط به فرآیند براده‌برداری در حالت با مرغک همانند نتایج حالت بدون مرغک می‌باشد، با این تفاوت که در حالت براده‌برداری با استفاده از مرغک هر چه موقعیت طولی ابزار براده‌برداری از نیمه طول قطعه‌کار به سمت انتهای قطعه‌کار حرکت کند، عرض بازه‌های پایداری فرآیند افزایش یافته و مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات در زمان ایجاد لرزه کاهش می‌یابد. همچنین در شکل ۲۲ روند تغییرات دامنه ارتعاشات حالت دائم برای دو حالت براده‌برداری با و بدون مرغک نشان داده شده است. براساس این شکل در $x_0^* = 0.75$ زمانی که از مرغک استفاده می‌شود، عرض بازه‌های Ω^* که براده‌برداری بدون رخداد پدیده لرزه صورت می‌گیرد افزایش می‌یابد. اما در شکل ۲۳، چون براده‌برداری در نقطه $x_0^* = 0.5$ انجام می‌شود و این نقطه در شکل مود اول تیر یک سر گیردار یک سر مفصل از جمله نقاط با بیشترین جابه‌جایی محسوب می‌شود، استفاده از مرغک حتی باعث افزایش ناپایداری سیستم می‌شود. به‌منظور تحلیل عددی پایداری در این شکل‌ها، بازه‌های روی شکل مشخص شده است که در این بازه، درصد پایداری و ناپایداری فرآیند ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
 \text{شکل ۲۰} &\Rightarrow \begin{cases} x_0^* = 0.5 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 30/78 \\ x_0^* = 0.75 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 12/82 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۱} &\Rightarrow \begin{cases} x_0^* = 0.5 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 19/39 \\ x_0^* = 0.75 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 35/18 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۲} &\Rightarrow \begin{cases} \text{بدون استفاده از مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 12/0.1 \\ \text{با استفاده از مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 38/41 \end{cases} \\
 \text{شکل ۲۳} &\Rightarrow \begin{cases} \text{بدون استفاده از مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 31/39 \\ \text{با استفاده از مرغک} \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 17/67 \end{cases}
 \end{aligned}$$

۴-۳-۲- تأثیر شعاع قطعه‌کار (R^*)

به‌منظور بررسی تأثیر تغییر شعاع سطح مقطع قطعه‌کار بر پایداری سیستم، نتایج زیر در دو حالت با و بدون مرغک در شکل‌های ۲۴ تا ۲۷ آورده شده‌اند.

با توجه به شکل ۲۴ ملاحظه می‌شود، در حالت براده‌برداری بدون استفاده از مرغک با افزایش Ω^* عرض بازه‌هایی که فرآیند براده‌برداری، بدون لرزه می‌باشد افزایش می‌یابد. همچنین عرض بازه‌هایی که فرآیند براده‌برداری با پدیده لرزه همراه می‌باشد، افزایش می‌یابد. با افزایش Ω^* مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات لرزه نیز افزایش پیدا می‌کند. البته با تغییر شعاع قطعه‌کار، چون کلاً هندسه مسئله تغییر می‌کند، محل بازه‌های Ω^* پایدار جابه‌جا می‌گردد. همچنین با افزایش شعاع قطعه‌کار، بازه‌های پایداری سیستم افزایش می‌یابد. مطابق با شکل ۲۵، همانند شکل ۲۴ در حالت براده‌برداری با استفاده از مرغک با افزایش Ω^* عرض بازه‌هایی که فرآیند براده‌برداری بدون لرزه می‌باشد، افزایش می‌یابد. براساس شکل‌های ۲۶ و ۲۷ زمانی که از مرغک استفاده می‌شود، عرض بازه‌های Ω^* که براده‌برداری بدون رخداد پدیده لرزه صورت می‌گیرد افزایش می‌یابد. بررسی پایداری به‌صورت عددی به‌صورت زیر می‌باشد.

۴-۳-۳- تأثیر عرض براده برداری (a^*)

به منظور بررسی تأثیر مقدار عرض براده برداری، نتایج زیر در دو حالت با و بدون استفاده از مرغک در شکل‌های ۲۸ تا ۳۱ آورده شده‌اند.

با توجه به شکل ۲۸ در حالت براده برداری بدون استفاده از مرغک با افزایش Ω^* ، عرض بازه‌هایی که فرآیند براده برداری بدون لرزه می‌باشد، افزایش می‌یابد. همچنین عرض بازه‌هایی که فرآیند براده برداری با پدیده لرزه همراه می‌باشد، افزایش می‌یابد. با افزایش Ω^* ، بیشینه دامنه ارتعاشات لرزه افزایش پیدا می‌کند. مطابق شکل ۲۹، همانند شکل ۲۸ در حالت براده برداری با استفاده از مرغک نیز با افزایش Ω^* ، عرض بازه‌هایی که فرآیند براده برداری بدون لرزه می‌باشد، افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عرض براده برداری عرض بازه‌های براده برداری پایدار افزایش می‌یابد. براساس شکل‌های ۳۰ و ۳۱، زمانی که از مرغک استفاده می‌شود، عرض بازه‌های Ω^* که براده برداری بدون پدیده لرزه صورت می‌گیرد افزایش می‌یابد. بررسی پایداری به صورت عددی به صورت زیر می‌باشد.

$$\Rightarrow \text{شکل ۲۸} \begin{cases} a^* = 0/0.1 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 22/5 \\ a^* = 0/0.2 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 12/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{شکل ۲۹} \begin{cases} a^* = 0/0.1 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 36/67 \\ a^* = 0/0.2 \Rightarrow \text{درصد پایداری} = 24/65 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{شکل ۳۰} \begin{cases} \text{درصد پایداری} = 22/24 \Rightarrow \text{بدون استفاده از مرغک} \\ \text{درصد پایداری} = 23/27 \Rightarrow \text{با استفاده از مرغک} \end{cases}$$

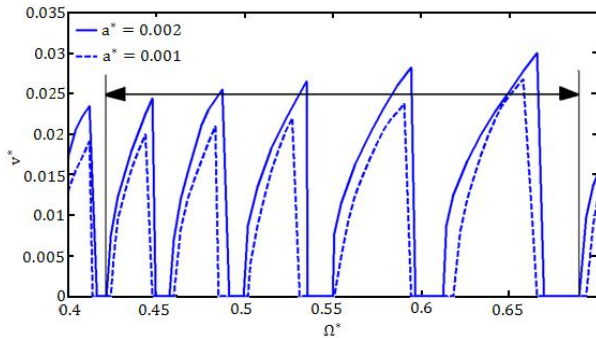
$$\Rightarrow \text{شکل ۳۱} \begin{cases} \text{درصد پایداری} = 14/82 \Rightarrow \text{بدون استفاده از مرغک} \\ \text{درصد پایداری} = 38/52 \Rightarrow \text{با استفاده از مرغک} \end{cases}$$

۵- نتیجه گیری

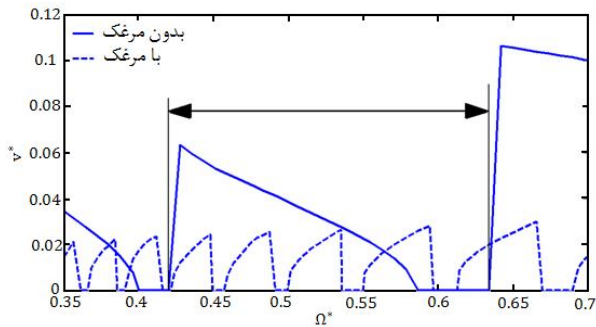
در این مقاله، پدیده لرزه در فرآیند تراشکاری متعامد مورد بررسی قرار گرفته است. قطعه کار با استفاده از یک مدل سه بعدی غیرخطی و ابزار براده برداری به عنوان تیر یک سر گیردار تحت تأثیر نیروهای براده برداری مدل سازی شده‌اند. معادلات حرکت با استفاده از روش پی-باکینگهام، بی بعد سازی شده‌اند. در نهایت با استفاده از روش رانگ کوتا یک حل عددی برای این مسئله غیرخطی به دست آمده است. با تغییر پارامترهای بدون بعد متناظر با پارامترهای براده برداری همچون موقعیت طولی ابزار براده برداری، عرض براده برداری و شعاع قطعه کار، یک آنالیز حساسیت انجام شده است.

نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که:

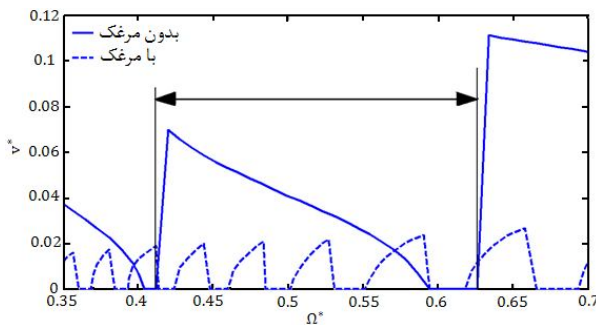
- فرآیند براده برداری در برخی از سرعت‌های دورانی به صورت پایدار و بدون رخداد پدیده لرزه و در سرعت‌های دورانی دیگر ناپایدار می‌باشد.



شکل ۲۹ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری با مرغک



شکل ۳۰ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری در $a^* = 0/0.1$



شکل ۳۱ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری در $a^* = 0/0.2$

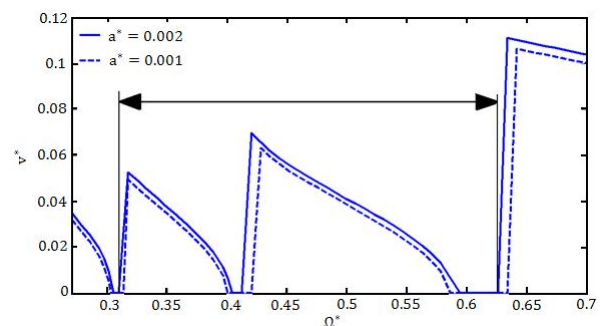
- در صورت رخداد پدیده لرزه، دامنه ارتعاشات به طور ناگهانی افزایش یافته و در یک مقدار حالت دائم، ثابت می‌شود.

- در صورت استفاده از مرغک به منظور مهار انتهای قطعه کار، در صورتی که براده برداری در نواحی انتهایی قطعه کار باشد، پایداری فرآیند افزایش یافته و امکان ایجاد پدیده لرزه کاهش می‌یابد. اما در صورتی که فرآیند براده برداری در مناطق میانی قطعه کار انجام شود، استفاده از مرغک نه تنها موجب افزایش پایداری نمی‌شود بلکه احتمال کاهش پایداری فرآیند نیز وجود دارد.

- در حالت براده برداری با و بدون استفاده از مرغک با افزایش پارامتر بدون بعد متناظر با سرعت دورانی قطعه کار، مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات لرزه در زمان ناپایداری فرآیند براده برداری و عرض بازه‌های سرعت دورانی بدون بعد که در آنها فرآیند براده برداری به صورت پایدار انجام می‌شود، افزایش می‌یابد.

- در حالت براده برداری بدون مرغک، هر چه موقعیت ابزار براده برداری به انتهای قطعه کار نزدیک‌تر شود، پایداری فرآیند ماشین کاری کاهش یافته و احتمال بروز لرزه افزایش می‌یابد.

- با افزایش پارامتر بدون بعد متناظر با شعاع قطعه کار، پایداری فرآیند ماشین کاری افزایش می‌یابد. با تغییر پارامتر بدون بعد متناظر با شعاع قطعه کار، کلاً هندسه قطعه کار تغییر می‌کند و محل بازه‌های سرعت دورانی بدون بعد که در آنها فرآیند براده برداری به صورت پایدار انجام می‌شود، جابه‌جا می‌شوند.



شکل ۲۸ نمودار $(v^* - \Omega^*)$ در حالت براده برداری بدون مرغک

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [A^* V_i^*(x^*) - I^* V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_6 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-I_i^*(x^*) W_i^*(x^*) - I_i^*(x^*) W_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_7 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-2I_i^*(x^*) W_i^*(x^*) - 2I_i^*(x^*) W_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_8 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-\delta_D^*(x^* - x_0^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 B_1 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [E^* I^* W_i^{(4)}(x^*) - A^* W_i^*(x^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_2 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 \left[-\frac{3}{2} E^* A^* W_i^2(x^*) W_i^*(x^*) \right] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_3 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-E^* A^* W_i^*(x^*) V_i^*(x^*) V_i^*(x^*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} E^* A^* W_i^*(x^*) V_i^2(x^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_4 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 2A^* V_i^*(x^*) W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_5 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [A^* W_i^*(x^*) - I^* W_i^*(x^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_6 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [I^{**} V_i^*(x^*) V_i^*(x^*) + I^{**} V_i^*(x^*) V_i^*(x^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_7 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [2I^{**} V_i^*(x^*) V_i^*(x^*) + 2I^{**} V_i^*(x^*) V_i^*(x^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 B_8 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-\delta_D^*(x^* - x_0^*)] W_i^*(x^*) dx^* \\
 C_1 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 G^{**} V_i^*(x^*) V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_2 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [E^* I^* V_i^*(x^*) W_i^*(x^*) + I^* W_i^*(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_3 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-I^* W_i^*(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_4 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-I^* W_i^2(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_5 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-2I^* W_i^2(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_6 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 I^* V_i^*(x^*) W_i^*(x^*) V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_7 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-I^* V_i^2(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_8 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-2I^* V_i^2(x^*) V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_9 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-2I^{**} V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 C_{10} &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-\delta_D^*(x^* - x_0^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 D_1 &= -kA_t^* G_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^8 W_{t_i}^*(x_{t_i}^*) W_{t_i}^*(x_{t_i}^*) dx_{t_i}^* \\
 D_2 &= kA_t^* G_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^8 t_i^*(x_{t_i}^*) W_{t_i}^*(x_{t_i}^*) dx_{t_i}^* \\
 D_3 &= \rho_t^* A_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^8 W_{t_i}^2(x_{t_i}^*) dx_{t_i}^* \\
 D_4 &= \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^8 \delta_D^*(x_{t_i}^* - L_t^*) W_{t_i}^*(x_{t_i}^*) dx_{t_i}^* \quad (3-پ)
 \end{aligned}$$

با افزایش پارامترهای بدون بعد متناظر با عرض براده‌برداری، پایداری فرآیند ماشین‌کاری کاهش یافته و احتمال بروز پدیده لرزه افزایش می‌یابد.

۶- پیوست

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^8 [E^* I^* V_i^{(4)}(x^*) T_{V_i}^*(t^*) - \frac{A^*}{\pi} W_i^*(x^*) \dot{T}_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad - \frac{E^* A^*}{2} \{ (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*))^2 \\
 &\quad + (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*))^2 \} (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*)) \\
 &\quad - \frac{I^*}{4\pi^2} [V_i^*(x^*) \ddot{T}_{V_i}^*(t^*) + V_i^*(x^*) \ddot{T}_{\phi_i}^*(t^*) W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad + 2^* V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) W_i^*(x^*) \dot{T}_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad + \frac{A^*}{4\pi^2} \ddot{V}_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*) - A^* V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*)] - F_t^* \delta_D^*(x^* - x_0^*) = 0 \\
 &\sum_{i=1}^8 [E^* I^* W_i^{(4)}(x^*) T_{W_i}^*(t^*) + \frac{A^*}{\pi} V_i^*(x^*) \dot{T}_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad - \frac{E^* A^*}{2} \{ (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*))^2 \\
 &\quad + (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*))^2 \} (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*)) \\
 &\quad - \frac{I^*}{4\pi^2} W_i^*(x^*) \ddot{T}_{W_i}^*(t^*) - V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*) \\
 &\quad - 2^* V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) V_i^*(x^*) \dot{T}_{V_i}^*(t^*) \\
 &\quad + \frac{A^*}{4\pi^2} W_i^*(x^*) \ddot{T}_{W_i}^*(t^*) - A^* W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*)] - F_t^* \delta_D^*(x^* - x_0^*) = 0 \\
 &\sum_{i=1}^8 [G^{**} V_i^*(x^*) T_{\phi_i}^*(t^*) \\
 &\quad - \frac{I^*}{4\pi^2} (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*)) [V_i^*(x^*) \dot{T}_{V_i}^*(t^*) \\
 &\quad + V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad + 2^* V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) W_i^*(x^*) \dot{T}_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad + \frac{I^*}{4\pi^2} (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*)) [W_i^*(x^*) \dot{T}_{W_i}^*(t^*) \\
 &\quad - V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*) \\
 &\quad - 2^* V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*) V_i^*(x^*) \dot{T}_{V_i}^*(t^*) \\
 &\quad + E^* I^* (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*)) (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*)) \\
 &\quad + I^* (W_i^*(x^*) T_{W_i}^*(t^*)) (V_i^*(x^*) T_{V_i}^*(t^*)) \\
 &\quad - \frac{I^*}{2\pi^2} V_i^*(x^*) \dot{T}_{\phi_i}^*(t^*)] - F_t^* \delta_D^*(x^* - x_0^*) = 0 \quad (1-پ) \\
 &\sum_{i=1}^8 \{ kA_t^* G_t^* [\frac{\partial}{\partial x_{t_i}^*} (t_i^*(x^*) T_{\phi_{t_i}^*}^*(t^*)) - \frac{\partial^2}{\partial x_{t_i}^{*2}} (W_{t_i}^*(x^*) T_{W_{t_i}^*}^*(t^*))] \\
 &\quad + \rho_t^* A_t^* W_{t_i}^*(x^*) \ddot{T}_{W_{t_i}^*}^*(t^*) \} + F_t^* \delta_D^*(x_{t_i}^* - L_{t_i}^*) = 0 \\
 &\sum_{i=1}^8 [-E_t^* I_t^* \frac{\partial^2}{\partial x_{t_i}^{*2}} (t_i^*(x^*) T_{\phi_{t_i}^*}^*(t^*)) \\
 &\quad - kA_t^* G_t^* \left(\frac{\partial}{\partial x_{t_i}^*} W_{t_i}^*(x^*) T_{W_{t_i}^*}^*(t^*) - t_i^*(x^*) T_{\phi_{t_i}^*}^*(t^*) \right) \\
 &\quad + \rho_t^* I_t^* t_i^*(x^*) \ddot{T}_{\phi_{t_i}^*}^*(t^*)] = 0 \\
 &\sum_{i=1}^8 [E_t^* A_t^* \frac{\partial^2}{\partial x_{t_i}^{*2}} (U_{t_i}^*(x^*) T_{U_{t_i}^*}^*(t^*)) \\
 &\quad - \rho_t^* A_t^* U_{t_i}^*(x^*) \ddot{T}_{U_{t_i}^*}^*(t^*)] - F_f^* \delta_D^*(x_{t_i}^* - L_{t_i}^*) = 0 \quad (2-پ) \\
 A_1 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [E^* I^* V_i^{(4)}(x^*) - A^* V_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_2 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 \left[-\frac{3}{2} E^* A^* V_i^2(x^*) V_i^*(x^*) \right] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_3 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-E^* A^* V_i^*(x^*) W_i^*(x^*) W_i^*(x^*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} E^* A^* V_i^*(x^*) W_i^2(x^*)] V_i^*(x^*) dx^* \\
 A_4 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^8 [-2A^* W_i^*(x^*)] V_i^*(x^*) dx^*
 \end{aligned}$$

- [6] N. K. Chandiramani, T. Pothala, Dynamics of 2-dof regenerative chatter during turning, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 1, pp. 448-464, 2006.
- [7] C. K. Chen, Y. M. Tsao, A stability analysis of turning a tailstock supported flexible work-piece, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 46, No. 1, pp. 18-25, 2006.
- [8] C. K. Chen, Y. M. Tsao, A stability analysis of regenerative chatter in turning process without using tailstock, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 29, No. 7, pp. 648-654, 2006.
- [9] L. Vela-Martínez, J. C. Jáuregui-Correa, E. Rubio-Cerda, G. Herrera-Ruiz, A. Lozano-Guzmán, Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning process, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 48, No. 9, pp. 1054-1062, 2008.
- [10] N. Hanna, S. Tobias, A theory of nonlinear regenerative chatter, *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 96, No. 1, pp. 247-255, 1974.
- [11] A. V. Dassanayake, C. S. Suh, On nonlinear cutting response and tool chatter in turning operation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, No. 5, pp. 979-1001, 2008.
- [12] Z. Dombovari, D. A. W. Barton, R. Eddie Wilson, G. Stepan, On the global dynamics of chatter in the orthogonal cutting model, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 1, pp. 330-338, 2011.
- [13] G. Urbikain, L. N. López de Lacalle, F. J. Campa, A. Fernández, A. Elías, Stability prediction in straight turning of a flexible workpiece by collocation method, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 54-55, No. 9, pp. 73-81, 2012.
- [14] M. Sekar, J. Srinivas, K. Kotaiah, S. Yang, Stability analysis of turning process with tailstock-supported workpiece, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 43, No. 9, pp. 862-871, 2009.
- [15] D. H. Hodges, E. H. Dowell, Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades, *NASA technical note*, 1974.
- [16] Y. Altintas, *Manufacturing Automation*, 2nd Ed., New York :Cambridge University Press, 2012.
- [17] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*, first edition, Wiley, New York, 2007.
- [18] W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, 4th Ed., New Jersey:Prentice Hall, 2004.

$$\begin{aligned}
 1 &= -E_t^* I_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} t_i^*(x_t^*)^* (x_t^*)^* dx_t^* \\
 &+ kA_t^* G_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{*2}(x_t^*)^* dx_t^* \\
 2 &= -kA_t^* G_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} W_t^*(x_t^*)^* t_i^*(x_t^*)^* dx_t^* \\
 3 &= \rho_t^* A_t^* G_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{*2}(x_t^*)^* dx_t^* \\
 1 &= E_t^* A_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} U_t^*(x_t^*)^* U_t^*(x_t^*)^* dx_t^* \\
 2 &= -\rho_t^* A_t^* \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} U_t^{*2}(x_t^*)^* dx_t^* \\
 3 &= \int_0^{L_t^*} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_D^*(x_t^* - L_t^*) U_t^*(x_t^*)^* dx_t^*
 \end{aligned} \tag{۴-پ}$$

۷- مراجع

- [1] J. Tlustý, M. Polacek, The stability of machine tools against self excited vibrations in machining, *Proceedings of the International Research in Production Engineering Conference*, Pittsburgh, PA, ASME, New York, pp. 465-474, 1963.
- [2] S. A. Tobias, W. Fishwick, The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions, *Transactions of ASME*, Vol. 80, No. 5, pp. 1079-1088, 1958.
- [3] J. S. Lin, C. I. Weng, Nonlinear dynamics of the cutting process, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 33, No. 8, pp. 645-657, 1991.
- [4] H. Moradi, F. Bakhtiari-Nejad, M. R. Movahhedy, M. T. Ahmadian, Nonlinear behaviour of the regenerative chatter in turning process with a worn tool: Forced oscillation and stability analysis, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, No. 8, pp. 1050-1066, 2010.
- [5] D. Sajedi Pour, S. Behbahani, Integrated mechatronic modeling and semi-active control of chatter vibration in turning, using MR damper, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 7, pp. 45-53, 2013. (In Persian)