



بررسی اثر اندازه بر رفتار ارتعاشی یک نوع تیر مونتاژ شده میکروسکوپ نیرو اتمی، با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش

اردشیر کرمی محمدی^{۱*}، محمد عباسی^۲

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، akaramim@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله با بهره‌گیری از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش، اثر اندازه یک نوع تیر مونتاژ شده میکروسکوپ نیرو اتمی بر فرکانس تشدید و حساسیت آن نسبت به سختی تماسی، مورد بررسی قرار گرفته است. میکروتیر مذکور، شامل یک تیر یک‌سردرگیر افقی، یک رابط عمودی و یک نوک در انتهای سر آزاد رابط است که ساختار آن امکان روبش جداره نانومواد را برای میکروسکوپ نیرو اتمی فراهم می‌سازد. ابتدا با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش و اصل هامیلتون، معادله حرکت و شرایط مرزی برای میکروتیر مذکور بدست آمده است. سپس، فرکانس تشدید ارتعاشات خمشی میکروتیر ACP، و حساسیت آن نسبت به سختی تماسی بدست آمده و بررسی شده است. نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش با نتایج بدست آمده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تئوری تیر کلاسیک مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که با نزدیک شدن ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس، اختلاف بین تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش با تئوری‌های تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک، در پیش‌بینی رفتار ارتعاشاتی میکروتیر مذکور، قابل ملاحظه خواهد بود.

کلیدواژگان: میکروسکوپ نیرو اتمی، تیر مونتاژ شده، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش، تئوری تنش کوپل اصلاح شده.

Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory

A. Karami mohammadi^{1*}, M. Abbasi²

1- Assist. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

2- PhD Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran

* P.O.B. 361995161 Shahrood, Iran. akaramim@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, the effect of size of an atomic force microscope (AFM) with an assembled cantilever probe (ACP) on resonant frequencies and their sensitivities are investigated using the strain gradient elasticity theory. The proposed ACP comprises a horizontal microcantilever, an extension and a tip located at the free end of the extension, which make the AFM capable of scanning the sample sidewall. First, the governing differential equation of motion and boundary conditions for dynamic analysis are obtained by a combination of the basic equations of the strain gradient elasticity theory and Hamilton principle. Afterwards, the flexural resonant frequency and sensitivity of the proposed AFM microcantilever are obtained numerically. The results of the proposed method are compared with those of modified couple stress and classical beam theories. The comparison shows that the difference between the results predicted by the strain gradient elasticity theory with those obtained by couple stress and classical beam theories become significant when the horizontal cantilever thickness comes approximately close to the material length scale parameter.

Keywords: Atomic Force Microscope, Assembled Cantilever Probe, Strain Gradient Elasticity Theory, Modified Couple Stress Theory.

۱- مقدمه

میکروسکوپ نیرو اتمی^۱ (AFM) که از یک تیر یکسر درگیر و یک نوک مخروطی یا هرمی شکل تشکیل یافته است، یکی از ابزارهای مهم و اساسی برای بدست آوردن تصاویر سطوح و خصوصیات سطحی نانومواد بوده و به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲، ۱]. هنگامی که نوک تیر، سطح نمونه را روبش می‌نماید، نیروهای برهم‌کنش دینامیکی بین نوک و سطح نمونه بوجود می‌آیند. این نیروهای دینامیکی بسیار پیچیده‌اند و بر فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات تأثیر بسزایی دارند. فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات نیز از پارامترهای اساسی در تعیین سرعت و کیفیت تصویربرداری می‌باشند. به همین دلیل، بررسی فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی ضروری است و در همین راستا مطالعات فراوانی صورت پذیرفته است [۴، ۳]. تورنر و همکاران [۵] ارتعاشات خمشی تیر AFM را به صورت خطی و غیرخطی با دو دیدگاه تیر الاستیک و مدل جرم نقطه‌ای تحلیل، و نتایج را با یکدیگر مقایسه نمودند تا بتوانند محدودیت‌های مدل جرم متمرکز را در زمینه محدوده فرکانسی، میرایی و رفتار غیرخطی مورد بررسی قرار دهند. وو و همکاران [۶] تأثیر ابعاد نوک و سختی‌های نرمال و جانبی را بر روی حساسیت و فرکانس تشدید مدهای ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی بررسی نموده‌اند. چانگ و گروهش [۷] نیز تأثیر میرایی بر روی رفتار دینامیکی تیر میکروسکوپ را مورد تحلیل قرار داده‌اند. آنها دریافتند که تأثیر میرایی در سختی‌های کوچک بین نوک تیر و سطح نمونه قابل ملاحظه می‌باشد. مختاری نژاد و همکاران [۸] تأثیر تقارن هندسی ناشی از مکان نوک میکروسکوپ نیرو اتمی را بر روی حساسیت مدهای مختلف آن مورد بررسی قرار دادند. عباسی و کرمی محمدی [۹] تأثیر عوامل مختلف نظیر زاویه تیر، میرایی و ممان اینرسی نوک را بر روی فرکانس تشدید تیر میکروسکوپ نیرو اتمی مورد مطالعه قرار داده‌اند. اخیراً نیز، لی و چانگ [۱۰] با استفاده از روش المان محدود، رفتارهای ارتعاشاتی یک تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را که در طی فرایند لیتوگرافی^۲ ترک برداشته، مورد بررسی قرار داده‌اند.

رویش سطوح جداره نمونه‌ها در مقیاس نانو یکی از موارد مهم و ضروری در علم نانو می‌باشد. نوک میکروسکوپ نیرو اتمی، حتی اگر خیلی تیز باشد، هرگز نمی‌تواند به اندازه کافی به سطوح جداره نمونه نزدیک شود تا سطح آن را روبش کند. از اینرو، دای و همکاران [۱۱]، انواع جدیدی از تیر میکروسکوپ نیرو اتمی، با نام تیر مونتاژ شده^۳ (ACP) را معرفی نمودند که در آنها از یک یا چند تیر یا رابط عمودی که بر روی تیر افقی یکسر درگیر متصل می‌شوند، جهت روبش استفاده می‌شود. چانگ و گروهش [۱۲] حساسیت و فرکانس تشدید مدهای ارتعاشات خمشی یک نمونه از این تیر ACP را که شامل یک تیر یک سردرگیر و یک رابط عمودی در انتهای آزاد تیر بود، مورد مطالعه قرار دادند. به تازگی نیز کهرباییان و همکاران [۱۳] رفتار ارتعاشاتی نوعی دیگر از تیر مونتاژ شده معرفی شده توسط دای و همکاران [۱۴] را که شامل دو نوک یکی بر روی تیر یک سر درگیر و دیگری بر روی رابط عمودی بودند، مورد مطالعه قرار دادند.

تیرهای مورد استفاده در برخی دستگاه‌ها، نظیر میکروسکوپ نیرو اتمی، دارای ابعادی در حد میکرون و کوچک تر از آن می‌باشند. رفتار دینامیکی و استاتیکی وابسته به اندازه مواد در مقیاس میکرون و کوچک تر از آن، از طریق آزمایش‌های متفاوت به اثبات رسیده است. به عنوان مثال، فلک و همکاران [۱۵] در سال ۱۹۹۴، در آزمایش پیچش یک میکروسیم مسی نازک مشاهده کردند که با کاهش قطر سیم از $170\text{ }\mu\text{m}$ به $12\text{ }\mu\text{m}$ ، سختی پیچشی آن تا سه برابر افزایش می‌یابد. همچنین، در آزمایش خمش یک میکرو تیر نازک از جنس نیکل در سال ۱۹۹۸، استوکلن و ایوانز [۱۶] متوجه شدند که با کاهش ضخامت تیر از $50\text{ }\mu\text{m}$ به $12/5\text{ }\mu\text{m}$ ، سختی ناشی از کار پلاستیک، به طور چشمگیری افزایش می‌یابد. نظریه کلاسیک مکانیک محیط پیوسته قادر به شرح رفتار وابسته به اندازه که در سازه‌های در حد میکرون و کوچک‌تر اتفاق می‌افتد نیست. از این رو، تئوری‌های غیر کلاسیک محیط پیوسته که در معادلات ساختاری آنها، یک یا چند پارامتر طول مقیاس علاوه بر دو پارامتر کلاسیک وجود دارد، ارائه شده‌اند [۱۷-۱۹]. یکی از این تئوری‌های غیرکلاسیک، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده می‌باشد که در سال ۲۰۰۳ توسط لام و همکاران [۲۰] معرفی شد. این تئوری

1. Atomic Force Microscope

2. Lithography

3. Assembled Cantilever Probe

$$+ \delta_{ki}(\partial_j \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \varepsilon_{mj})] \quad (4)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qj} + e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qi}) \quad (5)$$

در روابط (۲) تا (۵)، ε_{ij} ، γ_i و $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^s به ترتیب درایه-های تانسور کرنش، بردار گرادینان اتساع، تانسور گرادینان کشیدگی و تانسور گرادینان چرخش متقارن می‌باشند. u_i بردار جابجایی و δ_{ij} دلتای کرونگر می‌باشند. همچنین، تنش‌های متناظر با پارامترهای ε_{ij} ، γ_i و $\eta_{ijk}^{(1)}$ به ترتیب با p_i ، σ_{ij} و $\tau_{ijk}^{(1)}$ نشان داده می‌شوند که σ_{ij} معرف تانسور تنش کلاسیک و p_i و $\tau_{ijk}^{(1)}$ بیانگر تانسورهای تنش مرتبه بالا بوده که با استفاده از روابط (۶) تا (۹) بدست می‌آیند [۳۲].

$$\sigma_{ij} = k \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon'_{ij} \quad (6)$$

$$p_i = 2G l_0^2 \gamma_i \quad (7)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2G l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (8)$$

$$m_{ij}^s = 2G l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (9)$$

در روابط (۶) تا (۹)، $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij}$ ، l_0 و l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طول ماده هستند که در معادلات ساختاری تنش‌های مرتبه بالاتر ظاهر می‌شوند. همچنین، k و G مدول حجمی و برشی ماده بوده که با استفاده از مدول یانگ، E و ضریب پواسون، ν به صورت $k = \frac{E}{2(1+\nu)}$ و $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ بدست می‌آیند.

۳- مدل سازی دینامیکی تیر ACP

تیر ACP مورد نظر در این مقاله، شامل یک تیر یک‌سر درگیر افقی، یک تیر عمودی و یک نوک تعبیه شده در انتهای تیر عمودی می‌باشد. هندسه این نوع تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. مطابق شکل ۱، تیر افقی با طول L ، شامل یک سطح مقطع یکنواخت با ضخامت h و عرض b می‌باشد. تیر عمودی نیز با سطح مقطع مشابه تیر افقی، دارای طول q می‌باشد که یک نوک با طول p در انتهای آن تعبیه شده است. با توجه به نسبت صلبیت تیر عمودی نسبت به تیر افقی، انحراف تیر عمودی نسبت به تیر افقی ناچیز و قابل چشم‌پوشی می‌باشد، از این رو فرض می‌شود تیر عمودی صلب بوده و برای پرهیز از اشتباه، رابط عمودی نامیده می‌شود. به همین خاطر در حین تماس نوک با سطح، تیر افقی تحت ارتعاشات خمشی قرار می‌گیرد.

شامل سه پارامتر مقیاس طول متناظر با گرادینان چرخش^۱، گرادینان اتساع^۲ و گرادینان کشیدگی^۳ میکروساختار بوده که با صرف‌نظر کردن از دو پارامتر مقیاس طول متناظر با گرادینان اتساع و گرادینان کشیدگی، به تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، ارائه شده توسط یانگ و همکاران [۲۱] تقلیل می‌یابد. با استفاده از این تئوری، کانگ و گروهش [۲۲] رفتار دینامیکی و استاتیکی وابسته به اندازه یک میکروتیر را مورد بررسی قرار دادند. به تازگی نیز، نارندر و همکاران [۲۳] ارتعاشات پیچشی میکرومیله‌ها را با استفاده از تئوری گرادینان کرنش مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، با بهره‌گیری از روابط حاکم بر تئوری الاستیسیته گرادینان کرنش، رفتار ارتعاشاتی وابسته به اندازه یک نمونه میکروتیر مونتاز شده ACP که توسط دای و همکاران [۲۴] معرفی شده است، مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- مروری بر تئوری گرادینان کرنش

در این بخش مروری بر روابط ساختاری تئوری الاستیسیته گرادینان کرنش اصلاح شده، که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، ارائه خواهد شد. در این تئوری، علاوه بر دو ثابت کلاسیک ماده، سه پارامتر مقیاس طول مستقل نیز در معادلات ساختاری وجود دارند که بیانگر رفتارهای وابسته به اندازه ماده می‌باشند. به این ترتیب، انرژی کرنش U در یک ماده الاستیک همگن بر روی دامنه Ω به صورت رابطه (۱) بدست می‌آید [۲۲، ۲۰]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dv \quad (1)$$

درایه‌های کرنش‌های داده شده در رابطه (۱)، با استفاده از روابط (۲) تا (۵) حاصل می‌گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \partial_i \varepsilon_{mm} \quad (3)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_j \varepsilon_{kl} + \partial_k \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{15} \delta_{ji}(\partial_k \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \varepsilon_{mk}) - \frac{1}{15} [\delta_{jk}(\partial_i \varepsilon_{mm} + 2\partial_m \varepsilon_{mi})$$

1. Rotation Gradient
2. Dilatation Gradient
3. Stretch Gradient

$$\begin{aligned}\eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5}Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}, \eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \eta_{113}^{(1)} &= \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \eta_{122}^{(1)} &= \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \frac{1}{5}Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ \eta_{221}^{(1)} &= \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{5}Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ \eta_{223}^{(1)} &= \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (14)$$

$$\chi_{xy}^s = \chi_{yx}^s = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (15)$$

به این ترتیب، با توجه به روابط (۱۱) تا (۱۵)، در تانسورهای تنش کلاسیک و غیرکلاسیک معرفی شده در روابط (۶) تا (۹)، درایه‌های غیرصفر این تنش‌ها را می‌توان بدست آورد:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -EZ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}p_x &= -2Gl_0^2 Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ p_z &= -2Gl_0^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5}Gl_1^2 Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ \tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5}Gl_1^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \tau_{113}^{(1)} &= \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15}Gl_1^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \tau_{122}^{(1)} &= \tau_{133}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \frac{2}{5}Gl_1^2 Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ \tau_{221}^{(1)} &= \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5}Gl_1^2 Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ \tau_{223}^{(1)} &= \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15}Gl_1^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (18)$$

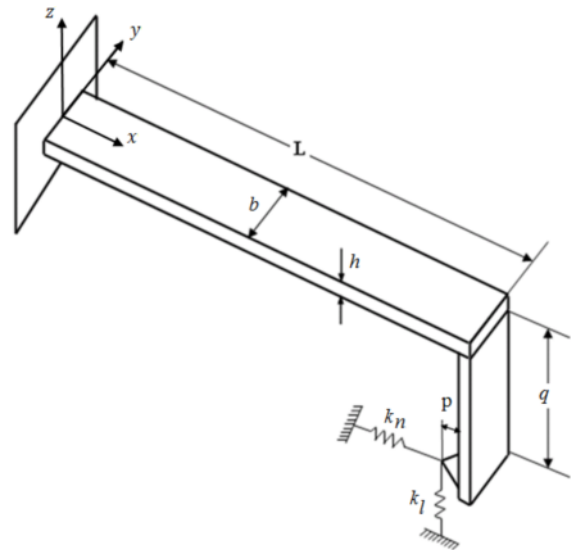
$$m_{xy}^s = m_{yx}^s = -Gl_2^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (19)$$

در آخر، با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۳) تا (۱۹) در معادله (۱)، و سپس انتگرال‌گیری بر روی حجم تیر و اضافه کردن انرژی الاستیک مربوط به فنرهای قائم و جانبی، کل انرژی کرنش، U برای میکروتیر مورد نظر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[R \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} k_n \left(q \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_l (w(L,t) - p \frac{\partial w(L,t)}{\partial x})^2\end{aligned}\quad (20)$$

که R و K بصورت رابطه (۲۱) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}R &= EI + 2GAl_0^2 + \frac{8}{15}GAl_1^2 + GAl_2^2 \\ K &= GI \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right)\end{aligned}\quad (21)$$



شکل ۱ شکل کلی تیر مونتاژ شده میکروسکوپ نیرو اتمی در تماس با سطح نمونه

مطابق شکل ۱، برای مدل‌سازی نیروهای برهم‌کنش عمودی و جانبی نوک تیر ACP و سطح نمونه، به ترتیب از دو فنر با ثابت‌های k_l و k_n استفاده شده است. محور x در امتداد طول تیر افقی بوده و $w(x,t)$ نیز معرف خیز تیر یک‌سر درگیر افقی می‌باشد.

مولفه‌های جابجایی تیر مذکور با توجه به تئوری تیر اولر-برنولی تحت خمش به صورت رابطه (۱۰) می‌باشند:

$$u_x = -Z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad u_y = 0 \quad u_z = w(x,t) \quad (10)$$

که u_x ، u_y و u_z به ترتیب جابجایی در راستای محوره‌های x ، y و z می‌باشند. با جایگذاری معادله (۱۰) در معادله (۲)، مؤلفه غیرصفر کرنش بصورت رابطه (۱۱) حاصل می‌گردد.

$$\varepsilon_{xx} = -Z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (11)$$

با توجه به معادله (۱۱)، مؤلفه‌های غیر صفر کرنش ε'_{ij} نیز بدست می‌آیند:

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{2}{3}\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{zz} = -\frac{1}{3}\varepsilon_{xx} \quad (12)$$

همچنین، با جایگذاری رابطه (۱۱) در روابط (۳) تا (۵)، درایه‌های غیرصفر بردار γ_i و تانسورهای $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^s بدست می‌آیند:

$$\gamma_x = -Z \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \quad \gamma_z = -\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$V(0) = \frac{dV(0)}{dX} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{d^2V(0)}{dX^2} = 0 \quad \frac{d^3V(1)}{dX^3} = 0 \quad (32)$$

$$\tilde{K} \frac{d^5V(1)}{dX^5} - \tilde{R} \frac{d^3V(1)}{dX^3} + (\beta_l - \tilde{\rho}Q\omega^2)V(1) = 0 \quad (33)$$

$$\tilde{K} \frac{d^4V(1)}{dX^4} - \tilde{R} \frac{d^2V(1)}{dX^2} + \left(\frac{1}{3}\tilde{\rho}Q^3\omega^2 - \beta_n Q^2\right) \times \frac{dV(1)}{dX} + \beta_l PV(1) = 0 \quad (34)$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد و پارامترهای $\tilde{K}$ و $\tilde{R}$ در روابط (۳۵) و (۳۶) معرفی شده اند:

$$\tilde{K} = \tilde{G} \left[2 \left(\frac{l_0}{L} \right)^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{l_1}{L} \right)^2 \right] \quad (35)$$

$$\tilde{R} = 1 + 12\tilde{G} \left[2 \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 + \frac{8}{15} \left(\frac{l_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{l_2}{h} \right)^2 \right] \quad (36)$$

لازم به ذکر است که با قرار دادن $l_0 = l_1 = 0$ ، معادلات (۳۰) تا (۳۴)، متناظر با معادله حرکت و شرایط مرزی بدست آمده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده خواهد بود. همچنین با صرف نظر کردن از هر سه پارامتر مقیاس طول، یعنی با فرض $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ ، معادله حرکت و شرایط مرزی مربوط به تئوری تیر کلاسیک بدست می‌آیند.

برای معادله (۳۰) می‌توان حلی به صورت رابطه (۳۷) در نظر گرفت:

$$V(X) = \sum_{i=1}^6 C_i e^{\lambda_i X} \quad (37)$$

که در رابطه (۳۷)، $C_i (1, 2, \dots, 6)$ ثوابتی هستند که باید با استفاده از شرایط مرزی تعیین شوند. $\lambda_i (1, 2, \dots, 6)$ نیز که می‌توانند مقادیر مختلط باشند، ریشه‌های معادله جبری می‌باشند:

$$\tilde{K}\lambda^6 - \tilde{R}\lambda^4 + \omega^2 = 0 \quad (38)$$

ریشه‌های معادله (۳۸)، $\lambda_i (1, 2, \dots, 6)$ تابعی از فرکانس سیستم، ω می‌باشند. با جایگذاری معادله (۳۸) در شرایط مرزی (۳۱) تا (۳۴)، مجموعه‌ای از معادلات همگن به فرم ماتریسی بدست می‌آید که نسبت به ثابت‌های C خطی بوده اما نسبت به λ غیرخطی‌اند.

$$[A(\omega)][C] = \{0\} \quad (39)$$

بطوری که درایه‌های ماتریس A بصورت رابطه (۴۰) داده می‌شوند.

$$A_{1i} = 1, A_{2i} = \lambda_i, A_{3i} = \lambda_i^2, A_{4i} = \lambda_i^3 e^{\lambda_i} \\ A_{5i} = \left(\tilde{K}\lambda_i^5 - \tilde{R}\lambda_i^3 + (\beta_l - \tilde{\rho}Q\omega^2) \right) e^{\lambda_i}$$

با در نظر گرفتن $J_e = \frac{1}{3} M_e q^2$ و $M_e = \rho_e A q$ ترتیب به عنوان جرم و ممان اینرسی جرمی رابط عمودی و ρ_e به عنوان دانسیته تیر افقی و رابط عمودی، انرژی جنبشی سیستم را می‌توان بدست آورد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} M_e \left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_e \left(\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t \partial x} \right)^2 \quad (22)$$

با توجه به روابط بدست آمده برای انرژی پتانسیل و جنبشی، می‌توان با استفاده از اصل هامیلتون، معادله حرکت و شرایط مرزی را برای میکروتیر ACP مورد نظر بدست آورد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{nc}) dt = 0 \quad (23)$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) و (۲۲) در معادله (۲۳)، معادله حرکت و شرایط مرزی سیستم بدست می‌آید:

$$K \frac{\partial^6 w(x,t)}{\partial x^6} - R \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

$$w(0,t) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (26)$$

$$K \frac{\partial^5 w(L,t)}{\partial x^5} - R \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} + M_e \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} + k_l w(L,t) = 0 \quad (27)$$

$$K \frac{\partial^4 w(L,t)}{\partial x^4} - R \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} - J_e \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial t^2 \partial x} - k_n q^2 \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} - k_l p w(L,t) = 0 \quad (28)$$

معادلات (۲۴) تا (۲۸)، معادله حرکت و شرایط مرزی بدست آمده با استفاده از تئوری گرادین کرنش اصلاح شده می‌باشند. لازم به ذکر است که معادله (۲۶) یک انتخاب ممکن برای شرایط مرزی غیرکلاسیک است. با معرفی پارامترهای بی‌بعد بصورت رابطه (۲۹)، می‌توان برای تحلیل جامع‌تر، معادله حرکت و شرایط مرزی بدست آمده در معادلات (۲۴) تا (۲۸) را بی‌بعد نمود.

$$X = \frac{x}{L} \quad W(X, \tau) = \frac{w(x,t)}{L} \quad \tau = \frac{t}{L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}} \\ \tilde{\rho} = \frac{\rho_e}{\rho} \quad \tilde{G} = \frac{G}{E} \quad Q = \frac{q}{L} \quad P = \frac{P}{L} \\ \beta_l = \frac{k_l L^3}{EI} \quad \beta_n = \frac{k_n L^3}{EI} \quad (29)$$

با جایگذاری معادله (۲۹) در معادلات (۲۴) تا (۲۸) و با فرض حل به صورت $W(X, \tau) = V(X) e^{i\omega\tau}$ ، معادله حرکت و شرایط مرزی را می‌توان به صورت روابط (۳۰) تا (۳۴) نوشت.

$$\tilde{K} \frac{d^6 V(X)}{dX^6} - \tilde{R} \frac{d^4 V(X)}{dX^4} + \omega^2 V(X) = 0 \quad (30)$$

(روش BIE)، فرکانس تشدید و حساسیت سه مد ارتعاشات با استفاده از روش حل دقیق نیز بدست آمده و نتایج با نتایج حل عددی مقایسه شده است. برای معادله (۴۳) می‌توان حل عمومی به صورت رابطه (۴۸) در نظر گرفت:

$$V(X) = a_1 \sin \mu X + a_2 \sinh \mu X + a_3 \cos \mu X + a_4 \cosh \mu X \quad (48)$$

که در این رابطه ثابت‌های $a_i (i=1-4)$ ، با توجه به شرایط مرزی بدست می‌آیند. با جایگذاری معادله (۴۸) در شرایط مرزی (۴۴) تا (۴۶)، معادله مشخصه سیستم بدست می‌آید.

$$C(\omega, \beta_l) = F_1 G_2 - F_2 G_1 \quad (49)$$

که پارامترهای داده شده در معادله (۴۹) بوسیله معادلات داده شده در رابطه (۵۰) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} F_1 &= \tilde{R}_1 \mu^3 (\cos \mu + \cosh \mu) + (\beta_l - \tilde{\rho} Q \omega^2) \times (\sin \mu - \sinh \mu) \\ F_2 &= \tilde{R}_1 \mu^3 (\sinh \mu + \sin \mu) + (\beta_l - \tilde{\rho} Q \omega^2) \times (\cos \mu - \cosh \mu) \\ G_1 &= \tilde{R}_1 \mu^2 (\sin \mu + \sinh \mu) + \beta_l P (\sin \mu - \sinh \mu) + \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_n Q^2 \right) \mu (\cos \mu - \cosh \mu) \\ G_2 &= \tilde{R}_1 \mu^2 (\cos \mu + \cosh \mu) + \beta_l P (\cos \mu - \cosh \mu) - \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_n Q^2 \right) \mu (\sin \mu + \sinh \mu) \end{aligned} \quad (50)$$

مشابه معادله (۴۲)، حساسیت ارتعاشات نوک تیر میکروسکوپ، S به صورت مشتق فرکانس نسبت به سختی جانبی بدست خواهد آمد.

۴- بررسی و تحلیل نتایج

در این بخش با استفاده از روابط استخراج شده در بخش پیش، رفتار ارتعاشاتی وابسته به اندازه یک نوع مشخص از تیر مونتاز شده که برای روبش جداره نانومواد مورد استفاده قرار می‌گیرد با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور، ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی مواد به صورت $E = 170 \text{ GPa}$ ، $G = 64.1 \text{ GPa}$ ، $\rho = 2330 \text{ kg/m}^3$ ، $\rho_e = 3440 \text{ kg/m}^3$ ، $Q = 0.5$ و $P = 0.1$ در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده که $\beta_n = 0.9 \beta_l$ و $L = 20h$ باشد [۱۳]. برای تحلیل رفتار وابسته به اندازه میکروتیر مورد نظر، مقدار هر سه پارامتر طول مقیاس ماده، یکسان و برابر یک مقدار ثابت در نظر

$$A_{6i} = \left(\tilde{R} \lambda_i^4 - \tilde{R} \lambda_i^2 + \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_n Q^2 \right) \times \lambda_i + \beta_l P \right) e^{\lambda_i} \quad (40)$$

رابطه (۴۱)، شرط لازم و کافی برای وجود یک حل غیربدیهی برای معادله (۳۹) می‌باشد:

$$D(\omega, \beta_l) = \det[A(\omega, \beta_l)] = 0 \quad (41)$$

فرکانس طبیعی سیستم را می‌توان به صورت ریشه‌های دترمینان فوق محاسبه کرد. به این منظور، از یک روش عددی با عنوان روش BIE^۱ استفاده شده است [۲۴]. مطابق این روش، به علت این که درایه‌های ماتریس A در حالت کلی مقادیر مختلط‌اند و پیدا کردن ریشه‌های معادله ۴۱، یعنی نقاط صفر در صفحه مختلط دشوار است، مقادیری از فرکانس که بتوانند مقدار دترمینان به صورت $\log(|\omega, \beta_l|)$ را حداقل نمایند، متناظر با فرکانس طبیعی سیستم خواهند بود. برای جزئیات بیشتر در مورد این روش، می‌توان به مطالعات صورت گرفته توسط کیتاهارا و همکاران [۲۴-۲۶] مراجعه کرد.

با تعیین مقادیر فرکانس طبیعی، می‌توان حساسیت بی‌بعد سیستم، S را به صورت مشتق فرکانس نسبت به سختی جانبی سطح بدست آورد.

$$S = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_l} = - \frac{\frac{\partial D}{\partial \beta_l}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} \quad (42)$$

همان طور که پیش‌تر ذکر شد، با قرار دادن $l_0 = l_1 = 0$ معادله حرکت و شرایط مرزی بدست آمده با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش (معادلات (۳۰) تا (۳۴))، به معادلات متناظر با تئوری تنش-کوپل اصلاح شده تقلیل می‌یابند. در این صورت روابط (۴۳) تا (۴۶) حاصل می‌شوند [۲۷، ۱۲]:

$$\frac{d^4 V(X)}{dX^4} - \mu^4 V(X) = 0 \quad (43)$$

$$V(0) = \frac{dV(0)}{dX} = 0 \quad (44)$$

$$-\tilde{R}_1 \frac{d^3 V(1)}{dX^3} + (\beta_l - \tilde{\rho} Q \omega^2) V(1) = 0 \quad (45)$$

$$-\tilde{R}_1 \frac{d^2 V(1)}{dX^2} + \left(\frac{1}{3} \tilde{\rho} Q^3 \omega^2 - \beta_n Q^2 \right) \frac{dV(1)}{dX} + \beta_l P V(1) = 0 \quad (46)$$

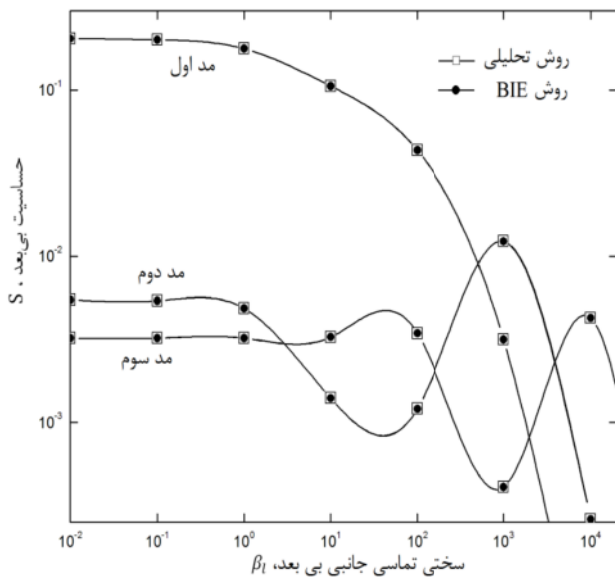
پارامترهای $\tilde{R}_1$ و μ^4 در رابطه (۴۷) داده شده‌اند.

$$\tilde{R}_1 = 1 + 12 \tilde{G} \left(\frac{l_2}{h} \right)^2 \quad \mu^4 = \frac{\omega^2}{\tilde{R}_1} \quad (47)$$

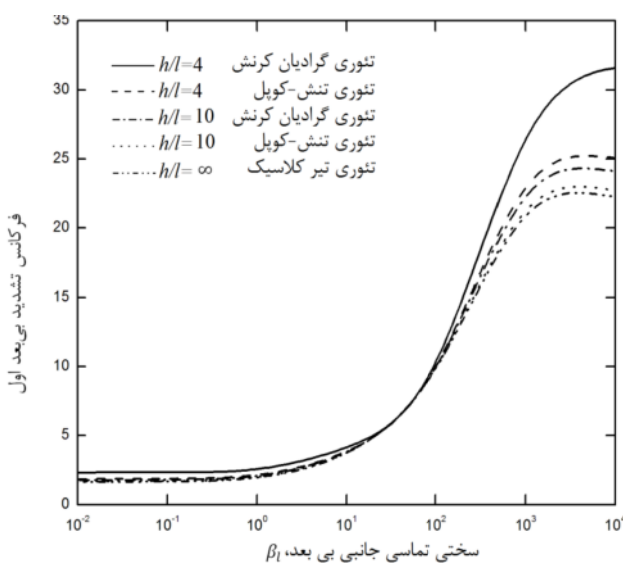
برای صحت‌گذاری روش عددی مورد استفاده در این مقاله

1. Boundary Integral Equation

آغاز شده و با افزایش سختی تماسی جانبی ابتدا روندی ثابت داشته و سپس به صورت ناگهانی افزایش می یابد، بطوری که به ازای مقادیر بسیار بالای سختی تماسی جانبی، به یک مقدار ثابت میل می نماید. همان طور که از این دو شکل پیداست، تقریباً برای تمامی مقادیر سختی تماسی، ماکزیمم مقدار فرکانس توسط تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش ارزیابی شده است.

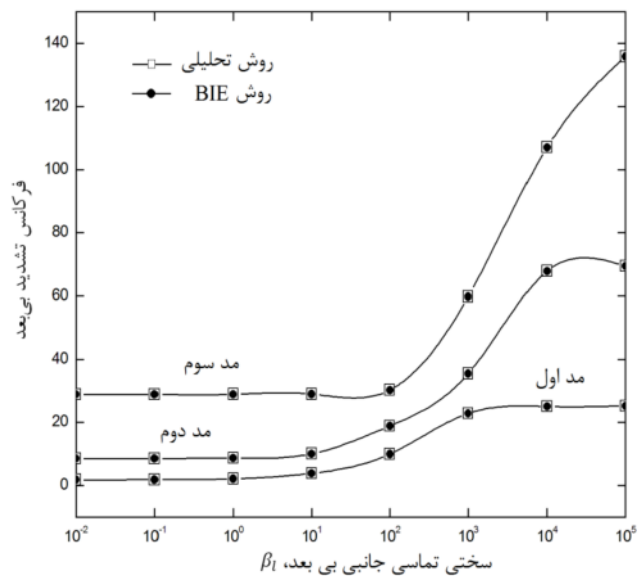


شکل ۳ حساسیت ارتعاشات سه مد اول بر مبنای تئوری تنش-کوپل اصلاح شده



شکل ۴ فرکانس تشدید بی بعد مد اول

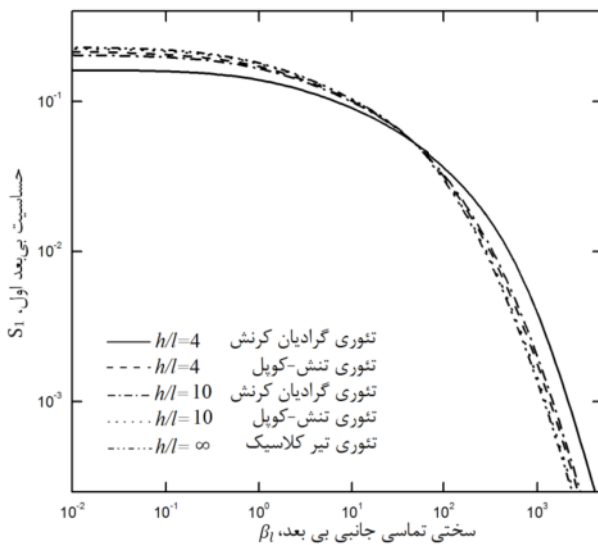
گرفته شده است، $l_0 = l_1 = l_2 = l$ [۲۲]. در تئوری تنش-کوپل اصلاح شده نیز $l_0 = l_1 = 0$ و $l_2 = l$ در نظر گرفته شده است. در تئوری تیر کلاسیک نیز $h/l = \infty$ خواهد بود. همان طور که در بخش قبل گفته شد، برای بدست آوردن فرکانس تشدید و حل معادله (۴۱) از روش عددی BIE استفاده شده است. برای صحت گذاری این روش، با استفاده از روش تحلیلی، فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات خمشی سه مد اول بر مبنای تئوری تنش-کوپل اصلاح شده نیز بدست آمده است. نتایج حاصل از دو روش مذکور در تخمین فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات، به ترتیب در شکل های ۲ و ۳ مقایسه شده اند. با توجه به این دو شکل می توان دریافت که خطای روش عددی BIE در محاسبه مقادیر هر سه مد فرکانس تشدید و حساسیت بسیار ناچیز و در حد صفر می باشد که این نشان دهنده دقت بسیار بالای روش عددی مذکور است. شکل های ۴ و ۵، فرکانس تشدید دو مد اول ارتعاشات خمشی، حاصل از تئوری های گرادیان کرنش، تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک را به صورت تابعی از سختی تماسی جانبی، β_l و به ازای مقادیر مختلف از نسبت ضخامت تیر به پارامتر مقیاس طول، h/l نشان می دهند.



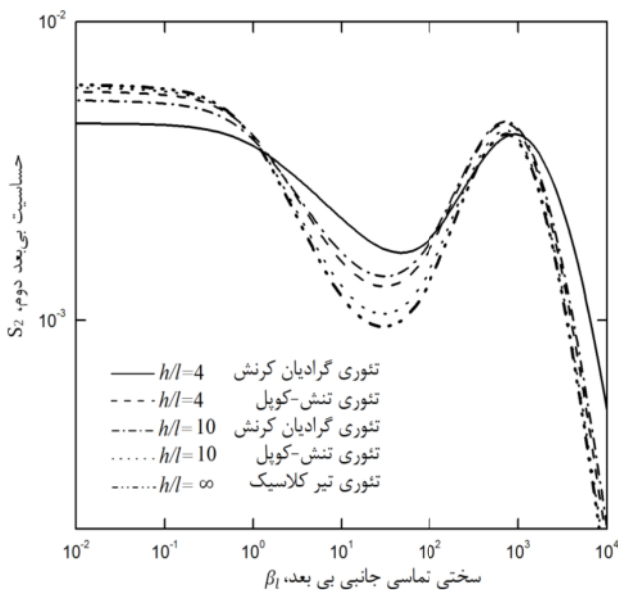
شکل ۲ فرکانس تشدید سه مد اول بر مبنای تئوری تنش-کوپل اصلاح شده

با نگاهی به این دو شکل می توان دریافت که فرکانس تشدید از یک نقطه ثابت در مقادیر بسیار کم سختی تماسی جانبی، β_l

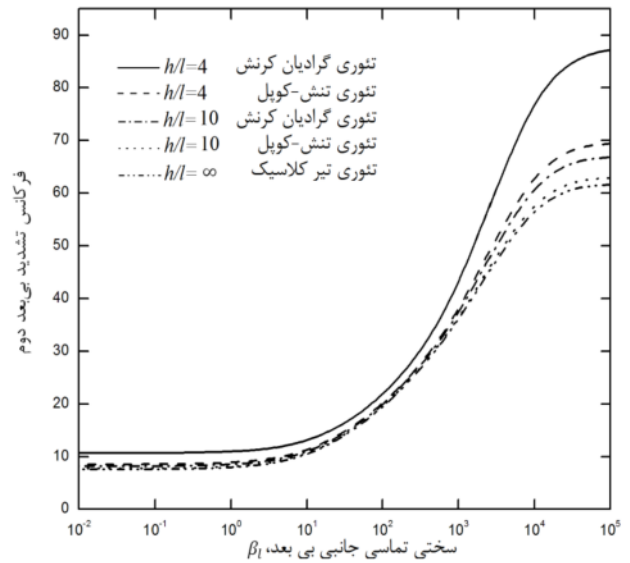
بطوریکه، S_{St} ، S_{Cs} و S_{Cl} به ترتیب حساسیت‌های حاصل از تئوری‌های گرادیان کرنش، تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک می‌باشند. این روند برای مقادیر بالاتر سختی تماسی جانبی، بطور کامل برعکس می‌باشد. ذکر این نکته مفید می‌نماید که وقتی سختی تماسی جانبی بدون بعد حدود ۶۰ - باشد، اختلاف بین سه تئوری در پیش‌بینی مقادیر حساسیت مود اول حدود صفر است.



شکل ۶ حساسیت بی‌بعد مود اول



شکل ۷ حساسیت بی‌بعد مود دوم



شکل ۸ فرکانس تشدید بی‌بعد مود دوم

در حالت کلی، برای نسبت پایین h/l ، مقادیر فرکانسی حاصل از دو تئوری غیرکلاسیک بیشتر از مقادیر متناظر بدست آمده از تئوری تیر کلاسیک می‌باشند. نزدیک شدن ضخامت تیر به پارامتر مقیاس طول (کاهش h/l)، فرکانس حاصل از دو تئوری غیر کلاسیک را مخصوصاً برای مقادیر بالاتر سختی تماسی افزایش می‌دهد. همچنین از این دو شکل می‌توان دریافت که کمترین اختلاف بین منحنی‌های فرکانس تقریباً هنگامی است که سختی تماسی در حدود $\beta_l = 100$ می‌باشد. در این حالت، اختلاف نسبی بین منحنی‌های فرکانس تشدید اول و دوم به ترتیب در حدود ۳ و ۶/۳ درصد می‌باشد.

بر مبنای سه تئوری مذکور، حساسیت ارتعاشات خمشی مود اول و دوم به صورت تابعی از سختی تماسی جانبی، β_l نسبت به مقادیر مختلف h/l به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. با مشاهده این دو شکل می‌توان نتیجه گرفت که حساسیت از یک مقدار ماکزیمم در مقادیر پایین β_l شروع شده و در مقادیر بسیار بالای β_l به حداقل مقدار خود می‌رسد. این روند برای مود اول یکنوا است. بطور کلی می‌توان دریافت که به ازای مقادیر پایین سختی تماسی و با نزدیک شدن ضخامت تیر افقی به پارامتر طول مقیاس (کاهش h/l)، رابطه (۵۱) برای مقادیر حساسیت حاصل از دو تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنش و تنش-کوپل اصلاح شده و تئوری تیر کلاسیک برقرار است:

$$S_{St} < S_{Cs} < S_{Cl} \quad (51)$$

برای تمامی مقادیر h/l بین سه تئوری گرادیان کرنش، تنش-کرنش اصلاح شده، و تیر کلاسیک، در پیش‌بینی حساسیت مود اول اختلافی دیده نمی‌شود. برای حساسیت مود دوم، این نقطه در حدود $\beta_l = 2$ می‌باشد.

۶- مراجع

- [1] Garcia, R., Perez, R., "Dynamic atomic force microscopy methods", *Surface Science Report*, Vol. 47, No. 6, 2002, pp. 197-301.
- [2] Holmberg K., Matthews A., *Coatings Tribology: Properties, Techniques and Applications in Surface Engineering*, Elsevier, New York, 1994.
- [3] Korayem M.H., Kavousi A., Ebrahimi N., "Dynamic analysis of tapping-mode AFM considering capillary force interactions", *Scientia Iranica B*, Vol. 18, No. 1, 2011, pp. 121-129
- [4] Mahdavi M.H., Farshidianfar A., Tahani M., Mahdavi S., Dalir H., "A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever", *Ultramicroscopy*, Vol. 109, No.1, 2008, pp. 54-60.
- [5] Turner J.A., Hirsekorn S., Rabe U., Arnold W., "High-frequency response of atomic-force microscope cantilevers", *Journal of Applied Physics*, Vol. 82, No. 3, 1997, pp. 966-979.
- [6] Wu T.S., Chang W.J., Hsu J.C., "Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers", *Microelectronic Engineering*, Vol. 71, No. 1, 2004, pp. 15-20.
- [7] Chang W.J., Fang T.H., Chou H.M., "Effect of interactive damping on sensitivity of vibration modes of rectangular AFM cantilevers", *Physics Letter A*, Vol. 312, No. 3, 2003, pp. 158-165.
- [8] Mokhtari-Nezhad F., Saidi A.R., Ziaei-Rad S., "Influence of the tip mass and position on the AFM cantilever dynamics: Coupling between bending, torsion and flexural modes", *Ultramicroscopy*, Vol. 109, No.9, 2009, pp. 1193-1202
- [9] Abbasi M., Mohammadi A.K. "A new model for investigating the flexural vibration of an atomic force microscope cantilever", *Ultramicroscopy*, Vol. 110, No. 11, 2010, pp. 1374-1379
- [10] Lee H. L., Chang W. J., "Dynamic response of a cracked atomic force microscope cantilever used for nanomachining", *Nanoscale Research Letters*, Vol. 7, No. 1, 2012, pp. 131.
- [11] Dai G, Wolff H, Pohlenz F., Danzebrink UH, Wilkening G. "Atomic force probe for sidewall scanning of nano- and microstructures", *Applied Physics Letters*, Vol. 88, No. 17, 2006, pp. 171908.
- [12] Chang WJ, Lee HL, Chen TYF. "Study of the sensitivity of the first four flexural modes of an

اما در مد دوم، روند تغییرات حساسیت به ازای تغییرات سختی تماسی، نوساناتی دارد، که شدت این نوسانات برای مقادیر حساسیت حاصل از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش قدری ملایم‌تر است. در این مد، برای سختی تماسی بدون بعد حدود $\beta_l = 2$ اختلاف سه تئوری مذکور ناچیز می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار وابسته به اندازه برای یک نمونه تیر مونتاژ شده میکروسکوپ نیرو اتمی (ACP) با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مورد بررسی قرار گرفت. تیر (ACP) مذکور شامل یک تیر افقی، یک رابط عمودی و یک نوک در انتهای آزاد رابط عمودی بوده بطوری که میکروسکوپ را قادر به روبش جداره نانومواد می‌نماید. ابتدا توسط تئوری مذکور، معادله حرکت و شرایط مرزی بدست آمده است. سپس تأثیر پارامترهای مقیاس طول و تغییرات اندازه میکروتیر ACP، بر رفتار ارتعاشاتی آن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش با نتایج حاصل از تئوری‌های تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که وقتی ضخامت تیر ACP کاهش می‌یابد و در محدوده پارامتر مقیاس طول قرار می‌گیرد، اختلاف بین تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش با دو تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک در پیش‌بینی مقادیر فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات تقریباً به ازای تمامی مقادیر سختی تماسی، قابل ملاحظه خواهد بود. این در حالی است که در این شرایط، اختلاف بین دو تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک، تنها به ازای مقادیر معینی از سختی تماسی قابل ملاحظه می‌باشد. در شرایط ذکر شده، یعنی شرایطی که ضخامت تیر به پارامتر طول مقیاس نزدیک می‌شود، مقادیر بدست آمده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش در پیش‌بینی فرکانس تشدید، ماکزیمم می‌باشند. اما در ارزیابی حساسیت ارتعاشات، مقادیر حاصل از تئوری گرادیان کرنش تنها به ازای سختی‌های بالاتر، بیشتر از مقادیر متناظر بدست آمده از دو تئوری دیگر است و برای مقادیر پایین سختی تماسی، قضیه برعکس می‌باشد. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان ادعا کرد که تقریباً در یک مقدار مشخص از سختی تماسی ($\beta_l = 60$)، رفتار حساسیت مود اول بطور کامل مستقل از ابعاد تیر است، زیرا در این نقطه،

- [21] Yang F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, 2002, pp. 2731.
- [22] Kong S.L., Zhou S.J., Nie Z.F., Wang K., "Static and dynamic analysis of microbeams based on strain gradient elasticity theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, 2009, pp. 487-498.
- [23] Narendar, S., S. Ravinder, and S. Gopalakrishnan "Strain gradient torsional vibration analysis of micro/nano rods", *International Journal of Nano Dimension*, Vol. 3, No. 1, 2012, pp. 1-17.
- [24] Kitahara M., *Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, Amsterdam, Elsevier, 1985.
- [25] Niwa Y., Kobayashi S., Kitahara M., "Application of integral equation method to eigen-value problems of elasticity", *Proceeding of the Japon Society of Civil Engineers*, Vol. 285, 1979, pp. 17-28.
- [26] Niwa Y., Kobayashi S., Kitahara M., *Determination of eigenvalues by boundary element methods, Developments in Boundary Element Methods 2*, Ch. 6, Eds. Banerjee, P.K. and Shaw, R.P., London, Applied Science Pub., 1982, pp. 143-176.
- [27] Kahrobaiyan M.H, Ahmadian M.T, Haghighi P., Haghighi A. "Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory", *International Journal of engineering Science*, Vol. 48, No. 12, 2010, pp. 1985-1994
- AFM cantilever with a sidewall probe", *Ultramicroscopy*, Vol. 108, No. 7, 2008, pp. 619-624
- [13] Kahrobaiyan MH, Ahmadian MT, Haghighi P, Haghighi A., "Sensitivity and resonant frequency of an AFM with sidewall and top-surface probes for both flexural and torsional modes", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 52, No. 10, 2010, pp. 1357-1365
- [14] Dai G, Wolff H, Weimann T, Xu M, Pohlenz F, Danzebrink HU, "Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano- and micro-structures", *Measurement Science and technology*, Vol. 18, No. 2, 2007, pp. 334.
- [15] N.A. Fleck, G.M. Muller, M.F. Ashby, J.W. Hutchinson, "Strain gradient plasticity: theory and experiment", *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, 1994, pp. 475-487.
- [16] Stolken J.S., Evans A.G., "Microbend test method for measuring the plasticity length scale", *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, 1998, pp. 5109-5115.
- [17] Mindlin R.D., Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, 1964, pp. 51-78.
- [18] Toupin R.A., "Elastic materials with couple-stresses", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, 1962, pp. 385-414.
- [19] Fleck N.A., Hutchinson J.W. "Strain gradient plasticity", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, No. 1, 1997, pp. 296-358.
- [20] Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, 2003, pp. 1477-1508.