

شبیه‌سازی عددی متلاشی‌شدن قطره در اثر اصابت موج ضربه‌ای

محمدرضا انصاری^{۱*}، عبدالحسین دارمی‌زاده^۲

۱- دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، mra_1330@modares.ac.ir

چکیده- در این پژوهش، برای نخستین مرتبه روش حل عددی گودونوف و حلگر ریمان HLLC برای مدل دوسیالی پنج معادله‌ای هیپربولیک توسعه داده شد و بدین منظور کدنویسی به صورت دوبعدی انجام شد. تا کنون در تحقیقات به عمل آمده دو مشکل عمده شامل رفتار غیر یکنوای سرعت صوت مخلوط دوفازی در فصل مشترک و دوم عدم توانایی گذر موج ضربه‌ای از فصل مشترک برای این مدل ذکر شده است. در این پژوهش، با انتخاب سرعت صوت مناسب برای مخلوط دوفازی و گسسته‌سازی مناسب جمله ناپایستار، این دو مشکل مرتفع شد. سپس اثرات متقابل برخورد موج ضربه‌ای با یک قطره و همچنین با دو قطره با قطرهای مختلف شبیه‌سازی و مطالعه شد. در اثر اصابت موج ضربه‌ای با مایه‌های ۱/۴۷ و ۶ به قطره فصل مشترک پیچیده‌ای ایجاد شده و نواحی پرفشار و همچنین کم‌فشار کاویتاسیون پدیدار می‌شوند. نتایج حاصله با نتایج تجربی در دسترس و کارهای مشابه دیگران که با روش‌ها و مدل‌های دیگر عددی انجام شده‌اند همخوانی خوبی دارد. نتایج به‌دست آمده بیانگر دقت بالای کد عددی در تسخیر ناپایداری‌ها و فصل مشترک دو فاز و گذر موج ضربه‌ای از آن است.

کلیدواژگان: جریانهای دوفازی، تراکم‌پذیر، موج شاک، قطره، روش عددی گودونوف، فصل مشترک

Numerical simulation of droplet breakup by shock wave collision

M. R. Ansari^{1*}, A. Daramizadeh²

1- Assoc. Prof. of Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ. Tehran, Iran
2- PhD Student of Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
* P. O. B. 14115-143, Tehran, Iran, mra_1330@modares.ac.ir

Abstract- In this article, for the first time the numerical solution of Godunov method with HLLC Riemann solver is extended for a hyperbolic five equations two-fluid model. The flow field is considered for two-space dimensional case. So far, two main difficulties include non-monotonic behavior of mixture sound relation and inability of shock transition from interface was mentioned during working with this model. In this research these difficulties were overcome by selecting an appropriate mixture sound relation and appropriate discretization of non-conservative term. The mutual effect of shock wave impact with a droplet and two droplets with different diameters were simulated and studied. During the shock wave impact with 1.47 and 6 Mach with the droplet, a complicated shape of interface was formed with high pressure zone and low pressure zone of cavitations. The results obtained from the present attempt were compared with the experimental and related similar results of that obtained by the other numerical methods and models. The comparison of the results was good. It was also concluded that the numerical method used in the present work has enough accuracy with high capability in capturing two-phase flow interfacial instability and shock wave impact transmission from the droplet.

Keywords: Two Phase Flows, Compressible, Shock Wave, Droplet, Godunov Method, Interface

۱- مقدمه

متلاشی‌شدن قطره در اثر اصابت موج ضربه‌ای یا جریان القایی توسط گاز پرسرعت در زمره مسائل مهم و کاربردی جریان‌های دوفازی تراکم‌پذیر به حساب می‌آید. کاربردهای علمی و مهندسی فراوانی می‌توان برای این مسئله تصور نمود که از آن جمله می‌توان به اثرات متقابل سوخت هسته‌ای و مایع خنک‌کننده در راکتورهای آب سبک، آسیب وارده توسط قطرات باران به بدنه هواپیماها، احتراق و دتونی‌شدن در مخلوط‌های دوفازی، اثرات موج ضربه‌ای و قطرات سوخت در رم‌جت‌ها و برخورد قطرات به پره‌های توربین‌ها و از بین بردن سلول‌های سرطانی [۱] توسط موج ضربه‌ای می‌توان اسم برد. از جمله کارهای اولیه در خصوص شبیه‌سازی موج ضربه‌ای و قطره می‌توان به مراجع [۲] و [۳] اشاره کرد. در هر دو کار از روش عددی CIP^1 استفاده شد. در کار آن‌ها نسبت چگالی بین مایع و گاز ۱۰ فرض شد که از نظر مرتبه بزرگی دو مرتبه از حالت واقعی کمتر است. در روش CIP شکل فصل مشترک بین گاز و مایع به وسیله یک تابع رنگ یا چگالی ردگیری می‌شود. در کارهای انجام‌شده با این روش، دیفیوژن اضافی گزارش شده است. مشکل دیگر این روش پیدایش مقدار کمی چگالی منفی در فصل مشترک است. برای اختلاف نسبت چگالی کم این مشکل تا حدی مرتفع می‌شود، ولی در شبیه‌سازی مسائل واقعی آب‌وهوا مشکل حاد می‌شود. ایگرا و تاکایاما [۴-۵] متلاشی‌شدن آئرودینامیکی قطره در اثر اصابت موج ضربه‌ای را به صورت تجربی و عددی مدل‌سازی نمودند. عدد ماخ موج ضربه‌ای $1/47$ بود. روش عددی آن‌ها بر اساس اصلاح موضعی شبکه محاسباتی است که از پیچیدگی بالایی از نظر کدنویسی برخوردار است. چانگ و لیو [۶] روش عددی جدیدی بر اساس مدل دوسیالی جریان لایه‌ای و روش حل $AUSM^2$ پیشنهاد نمودند. در این کار برخورد موج ضربه‌ای با ماخ‌های ۳ و ۶ با قطره شبیه‌سازی شد که نتایج رضایت‌بخشی هم حاصل شد. لیکن روش عددی پیشنهادی آن‌ها از نظر کدنویسی مشکل و پیچیده است و بر اساس مدل دوسیالی ۶ معادله‌ای تک فشار بد رفتار^۳ استوار است. تاراشیما و تریگوسن [۷-۸] روش عددی ترکیبی ردگیری

جبهه^۴ و GFM^5 را برای شبیه‌سازی جریان دوفازی تراکم‌پذیر پیشنهاد کردند. این روش نیز که زیرمجموعه روش‌های لاگرانژین به حساب می‌آید به طور ذاتی از پیچیدگی بالایی از نظر کدنویسی برخوردار است. از مزایای این روش‌ها این است که فصل مشترک را به صورت تیز و بدون دیفیوژن عددی تسخیر می‌کنند. در این روش‌ها، مش با فصل مشترک سیال‌ها حرکت می‌کند و تغییر شکل می‌دهد. در جریان‌های واقعی، فصل مشترک ممکن است دچار تغییر شکل فراوان شده و منجر به بهم ریختگی مش‌ها شود. این تغییر شکل مداوم مش‌ها گاهی منجر به تغییر الگوی جریان و بی‌دقتی در حل می‌شود. برای حل این مشکل بایستی مکرراً به اصلاح مش پرداخت. این مسائل سبب شده است تا روش‌های لاگرانژی از نظر محاسباتی پیچیده و سنگین و از نظر زمان محاسباتی هم طولانی مدت باشند. یکی از مدل‌های مناسب جهت شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی که مد نظر این مقاله است مدل پنج معادله‌ای کاهش‌یافته یا مدل کاپیلا است [۹]. این مدل مشتمل بر دو معادله بقای جرم، یک معادله بقای ممنتوم و یک معادله بقای انرژی به صورت پایستار و یک معادله انتقال کسر حجمی به صورت ناپایستار است. به تازگی گرایش به ارائه روش عددی مناسب برای مدل پنج‌معادله‌ای افزایش یافته است [۱۰-۱۵]. مارون و گیلارد [۱۲] مدل پنج‌معادله‌ای کاهش‌یافته را جهت شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی استفاده نمودند. مسائل تست دوبعدی شبیه‌سازی شده در کار آن‌ها شامل مسائل با سرعت پایین بود و اثرات موج ضربه‌ای بر فصول مشترک جریان‌های دوفازی بررسی نشد. کریفت و کورن [۱۳] فرمولاسیون جدید برای مدل پنج‌معادله‌ای کاپیلا ارائه نمودند. مدل آن‌ها از عملکرد خوبی در مدل‌سازی دوبعدی جریان‌های تراکم‌پذیر گاز-گاز مانند حباب هلیوم در هوا برخوردار است، ولی عملکرد این مدل برای فصول مشترک گاز-مایع به صورت دوبعدی تست نشده است. انگیزه اصلی از کار حاضر شبیه‌سازی دقیق و در عین حال با هزینه کم محاسباتی مسئله برخورد موج ضربه‌ای و قطره در جریان تراکم‌پذیر دوفازی است. علت انتخاب مدل پنج‌معادله‌ای نیز ساختار مناسب این مدل از نظر کدنویسی و هیبرولیک‌بودن آن و عدم وجود ترم‌های ناپایستار در معادلات ممنتوم و انرژی است. از دیدگاه عددی در این مقاله

1. Cubic Interpolation
2. Advection Upstream Method
3. Ill posed

4. Front tracking
5. Ghost Fluid Method

حالت انرژی داخلی فازها $e_k = e_k(\rho_k, P)$ براساس روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall k, \rho_k e_k = \frac{P_k + \gamma_k P_{\infty, k}}{\gamma_k - 1} \quad (2)$$

در شرایط تعادل فشاری رابطه مورد نیاز برای بستن مدل به صورت زیر است:

$$P(\rho, e, \alpha_k) = \frac{\rho e - \sum_k \frac{\alpha_k \gamma_k P_{\infty, k}}{\gamma_k - 1}}{\sum_k \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}} \quad (3)$$

برای این مدل سرعت صوت مخلوط بر اساس رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(P + P_{\infty})}{\rho}}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\gamma_i - 1}$$

$$\frac{\gamma P_{\infty}}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i \gamma_i P_{i \infty}}{\gamma_i - 1} \quad (4)$$

پارامترهای مورد نیاز برای بستن معادلات (۲)، (۳) و (۴) برای هوا و آب در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱ پارامترهای معادله حالت برای آب و هوا		
$P_{\infty, k}$	γ_k	
۰	۱/۴	هوا
6×10^8	۴/۴	آب

معادلات این مدل دارای ۵ ریشه مقدار مشخصه حقیقی است که سه ریشه از آن‌ها به صورت مجزایند که عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = u$$

$$\lambda_4 = u + c$$

$$\lambda_5 = u - c$$

که c سرعت صوت در مخلوط دوفازی است. با توجه به آنکه تمام ریشه‌ها حقیقی‌اند، لذا این مدل به صورت هیپربولیک بوده و خوش‌رفتار می‌باشد.

تا کنون دو مشکل عمده برای استفاده از این مدل در مسائل جریان دوفازی تراکم‌پذیر ذکر شده است که شامل رفتار غیریکنواخت معادله سرعت صوت مخلوط در فصل

برای نخستین مرتبه از حلگر ریمان HLLC برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر دوفازی با مدل پنج معادله‌ای کاپیلا استفاده شد. نوآوری‌های کار حاضر عبارت‌اند از:

- شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی تراکم‌پذیر و گذر شک‌های قوی از فصل مشترک مایع-گاز با مدل دوسیالی کاپیلا
 - توسعه روش عددی گودونوف و حلگر ریمان HLLC برای مدل دوسیالی کاپیلا
 - انتخاب استراتژی مناسب برای گسسته‌سازی معادله انتقال کسر حجمی به منظور جلوگیری از منفی‌شدن کسر حجمی در هنگام گذر موج ضربه‌ای از فصل مشترک
 - انتخاب سرعت صوت مناسب و یکنوا برای مخلوط دوفازی
- در ادامه این مقاله، ابتدا در بخش ۲ ویژگی‌های ریاضی مدل پنج معادله‌ای بیان می‌شود. در بخش ۳ روش عددی به تفصیل توضیح داده خواهد شد. در بخش ۴ نتایج شبیه‌سازی دوبعدی به همراه اعتبارسنجی ارائه خواهد شد و در نهایت در بخش ۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲- ویژگی‌های ریاضی مدل پنج معادله‌ای

مدل تک‌سرعه پنج معادله‌ای با فشارهای متعادل تحت عنوان مدل کاپیلا یا مدل پنج معادله‌ای کاهش‌یافته معروف است. معادلات این مدل در حالت چندبعدی بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت و انتقال جرم و با فرض جریان غیرلزج و فشار و سرعت یکسان فازها به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (1-الف)$$

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \alpha_1 \vec{u}) = 0 \quad (1-ب)$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \alpha_2 \vec{u}) = 0 \quad (1-ج)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} P = 0 \quad (1-د)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P) \vec{u}) = 0 \quad (1-ه)$$

که e, E, P, u, ρ, α به ترتیب عبارت‌اند از کسر حجمی، چگالی، سرعت، فشار، انرژی کل و انرژی داخلی است. چگالی از طریق رابطه $\rho = (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)$ به دست می‌آید. در کار حاضر، از معادله حالت استیفند گاز استفاده شد. در این معادله

$$U_k^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \\ \alpha_2 \rho_2 \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \\ \rho \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} S^* \\ \rho \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \left[\frac{E_k + (S^* - u_k) \times}{\left[S^* + \frac{P_k}{\rho_k (S_k - u_k)} \right]} \right] \end{bmatrix} \quad (11)$$

سرعت موج میانی با استفاده از روش HLL تخمین زده می‌شود:

$$S^* = \frac{(\rho u^\gamma + P)_L - (\rho u^\gamma + P)_R - S_L(\rho u)_L + S_R(\rho u)_R}{(\rho u)_L - (\rho u)_R - S_L \rho_L + S_R \rho_R} \quad (12)$$

با توجه به اینکه در این مدل از آسایش فشار استفاده نشده است کسر حجمی در طول گذر فصل مشترک ثابت می‌ماند:

$$\alpha_{kR}^* = \alpha_{kR}, \alpha_{KL}^* = \alpha_{KL} \quad (13)$$

ترم ناپایستار ظاهر شده در سمت چپ معادله انتقال فاز $u \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ است. ابتدا ترم ناپایستار به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha = \text{div}(\alpha \vec{u}) - \alpha \text{div}(\vec{u}) \quad (14)$$

با جایگذاری این ترم در معادله (۷)، ترم $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha$ حذف می‌شود. به این ترتیب با جایگذاری (۱۴) در (۷) رابطه انتقال کسر حجمی در حالت یک‌بعدی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 u)}{\partial x} = (\alpha_1) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

که سمت چپ این معادله به صورت پایستار است. فرم جداسازی شده این معادله با استفاده از روش گودونوف برای ترم‌های جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(u \alpha_1)_{j+\frac{1}{2}}^* - (u \alpha_1)_{j-\frac{1}{2}}^* - \alpha_j (u_{j+\frac{1}{2}}^* - u_{j-\frac{1}{2}}^*)] \quad (16)$$

این نحوه جداسازی تا حد زیادی مثبت ماندن کسر حجمی را تضمین می‌کند و بر دقت محاسبه کسر حجمی می‌افزاید [۱۰]. برای ارتقای دقت مدلسازی از مرتبه ۱ به مرتبه ۲ از تکنیک ماسکل-هانکوک [۱۶] استفاده شد.

مشترک [۱۰-۱۱] و دیگری وجود ترم ناپایستار در معادله انتقال کسر حجمی است که گسسته‌سازی آن جز چالش‌های فعلی به حساب می‌آید. هدف اصلی در این مقاله غلبه بر این دو مشکل عمده مدل پنج معادله‌ای کاپیلاست که باعث شده تا کنون استفاده از آن را با محدودیت عمده مواجه سازد.

۳- روش حل عددی

در این مقاله از روش عددی گودونوف و حلگر ریمان HLLC [۱۶] استفاده شد. در حالت یک‌بعدی قسمت پایستار مدل پنج معادله‌ای را می‌توان به صورت ماتریسی به شکل زیر نوشت:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho u \\ \alpha_1 \rho u^2 \\ \rho u^\gamma + P \\ u(\rho E + P) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

بر اساس روش عددی گودونوف جداسازی به ترتیب زیر انجام می‌شود:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(u^*(u_j^n, u_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(u^*(u_{j-1}^n, u_j^n))] \quad (8)$$

شار درون سلول حلگر ریمان HLLC توسط تورو [۱۶] طبق رابطه ۹ ارائه شده است:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} f(u_L) & 0 \leq S_L \\ f(u_L^*) = f(u_L) + S_L(u_L^* - u_L) & S_L \leq 0 \leq S^* \\ f(u_R^*) = f(u_R) + S_R(u_R^* - u_R) & S^* \leq 0 \leq S_R \\ f(u_R) & 0 \geq S_R \end{cases} \quad (9)$$

که L و R بیانگر مرزهای چپ و راست سلول است. موج‌های راست‌رو و چپ‌رو با تبعیت از روش [۱۷] تخمین زده می‌شود:

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R), \\ S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R) \quad (10)$$

بردار پایستار در ناحیه میانی یعنی در ناحیه بین موج‌های راست‌رو و چپ‌رو به صورت زیر نوشته می‌شود:

موج ضربه‌ای به قطره ارائه می‌شود. این دو مسئله شامل الف- شبیه‌سازی اصابت موج ضربه‌ای با ماخ $1/47$ با یک قطره و ب- شبیه‌سازی اصابت موج ضربه‌ای با دو قطره با قطرهای متفاوت و در فاصله نزدیک به هم است.

۱-۴-۱- شاک تیوب هوا-آب

این مسئله شامل یک شاک تیوب که سمت چپ آن با مایع فشار بالا و سمت راست آن با هوا پر شده است می‌باشد. حل دقیق این مسئله توسط ساورل و همکاران [۹] ارائه شده است. هر سیال توسط معادله حالت استیفند-گاز مشخص می‌شود. شرایط اولیه این مسئله طبق جدول ۲ قابل بیان است.

جدول ۲ شرایط اولیه مسئله شاک-تیوب

$X < 0.7$		$0.7 < X < 1$		
هوا	آب	هوا	آب	
۱	1000	۱	1000	چگالی
۰	۰	۰	۰	سرعت
10^{-9}	10^{-9}	10^{-5}	10^{-5}	فشار
10^{-6}	$1-10^{-6}$	$1-10^{-6}$	10^{-6}	کسر حجمی

نتایج عددی در شکل ۲ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج عددی تطابق عالی با حل دقیق مسئله [۹] دارد و روش عددی قادر بوده که موج‌های ضربه‌ای و انبساطی را به صورت دقیق و بدون دیفیوژن تسخیر نماید.

۲-۴-۲- اصابت موج ضربه‌ای با ماخ $1/47$ با یک قطره

با توجه به آنکه نتایج تجربی این مسئله در دسترس است [۴-۵]، در کار حاضر از این مسئله برای صحت‌سنجی کد در حالت دوبعدی استفاده می‌شود. بعضی از محققان نیز این مسئله را برای بررسی کارایی و دقت روش‌های عددی دیگر به کار برده‌اند [۷ و ۱۸]. در این مسئله یک موج ضربه‌ای با ماخ $1/47$ با یک قطره با قطر $4/8$ میلی‌متر برخورد می‌کند. قبل از برخورد موج ضربه‌ای سرعت هوا و قطره صفر در نظر گرفته شده است.

در پشت موج ضربه‌ای فشار $P = 2/35 \times 10^5$ و سرعت هوا $u = 246/24$ m/s و $\rho = 1/81$ kg/m³ در نظر گرفته شد.

در شکل ۳ مقایسه نتایج عددی به صورت تصاویر شلرین با نتایج تجربی [۴] و [۵] نمایش داده شده است. نتایج ارائه‌شده

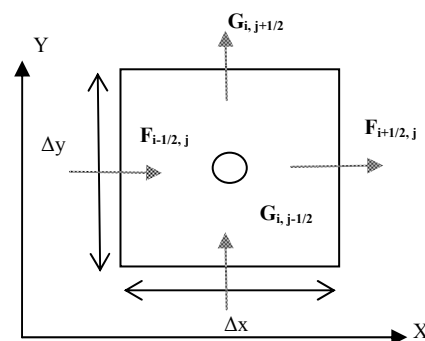
۳-۱- توسعه از یک‌بعدی به دوبعدی

در حالت دوبعدی $U = ((\alpha\rho)_1, (\alpha\rho)_2, \rho u, \rho v, \rho E)$ بردارهای متغیرهای بقایی‌اند. $H = (F, G)$ تنسور شارهاست و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \begin{pmatrix} (\alpha\rho)_1 u, (\alpha\rho)_2 u, \rho u^2 + P, \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha\rho)_1 v, (\alpha\rho)_2 v, \rho uv, \rho v^2 + P, \\ (\rho E + P)v \end{pmatrix} \quad (17)$$

در شکل ۱ نحوه گسسته‌سازی در میدان کارترین نشان داده شده است.



شکل ۱ گسسته‌سازی حجم محدود در میدان کارترین

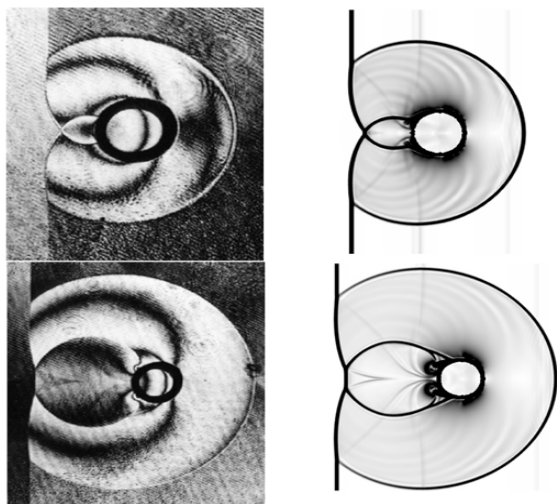
به هر مرز سلول یک شار عددی مربوط می‌شود. شکل گسسته‌سازی شده معادله کلی انتقال در روش حجم محدود در حالت دوبعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i-\frac{1}{2},j} - F_{i+\frac{1}{2},j} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{i,j-\frac{1}{2}} - G_{i,j+\frac{1}{2}} \right] \quad (18)$$

مقدار میانگین U_{ij}^{n+1} در سلول محاسباتی I_{ij} از طریق فرمول (۱۸) محاسبه می‌شود. مقادیر شار عددی از طریق رابطه (۹) قابل محاسبه است [۱۶].

۴- نتایج و بحث و بررسی

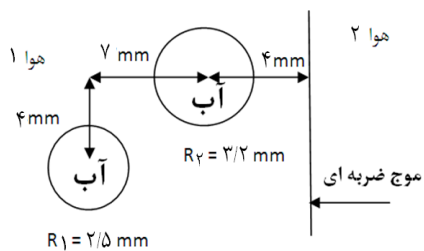
در این بخش، به منظور صحت‌سنجی کد، ابتدا یک مسئله استاندارد دوفازی شاک تیوب با دو سیال مجزای خالص گاز-مایع شبیه‌سازی شد. در ادامه دو مسئله مختلف اصابت



شکل ۳ نتایج مسئله برخورد شاک با ماخ ۱/۴۷ و قطره، سمت چپ: نتایج تجربی [۴ و ۳]، سمت راست: نتایج عددی

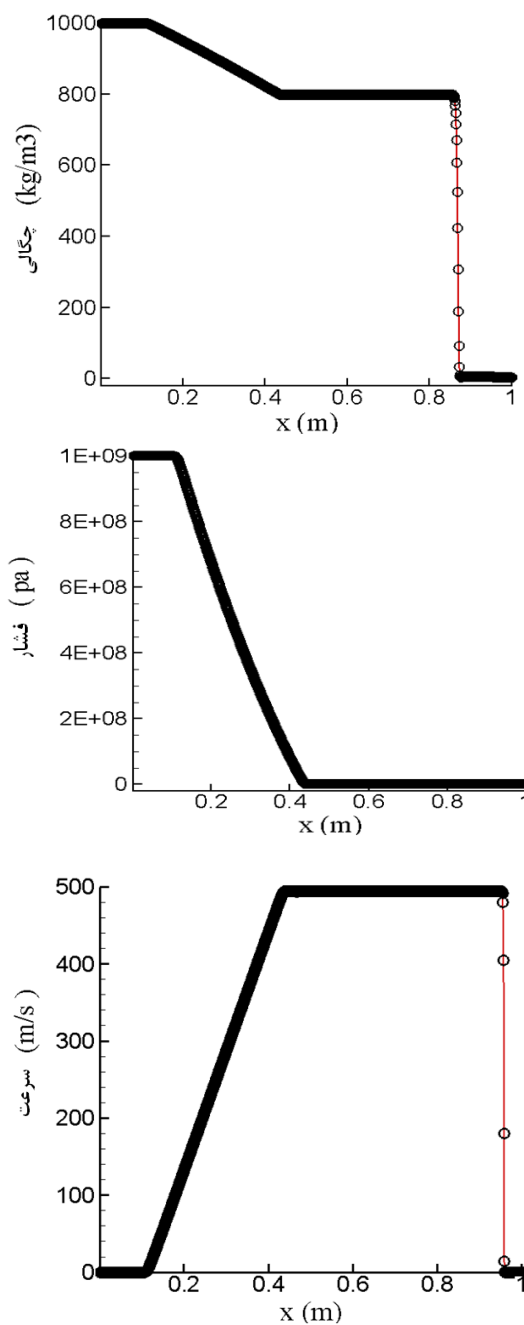
۴-۳- اصابت موج ضربه‌ای با ماخ ۶ با دو قطره

در این قسمت یک مسئله پیچیده‌تر شامل برخورد موج ضربه‌ای با دو قطره در نظر گرفته می‌شود. هندسه شرایط اولیه این مسئله در شکل ۴ نمایش داده شده است. این مسئله شامل اصابت موج ضربه‌ای با دو قطره با قطرهای متفاوت و در فاصله نزدیک به هم است. سرعت قطره‌ها و هوای اطراف آن قبل از اصابت صفر لحاظ شد. در پشت موج ضربه‌ای فشار $10^6 \times 4/18$ و $P=$ سرعت $u=1818 \text{ m/s}$ در نظر گرفته شد. در شکل ۵ نتایج عددی مربوط به زمان‌های مختلف به صورت تصویر شلرین و کانتور توزیع فشار نشان داده شده است. نتایج به‌دست آمده همخوانی خوبی با نتایج عددی [۶] و [۱۹] که روش‌های عددی پیچیده‌تر و از نظر کدنویسی پرهزینه‌ترند دارد. در لحظات اولیه اصابت موج ضربه‌ای سرعت آن در درون قطره کمتر از سرعتش در بیرون قطره است. این اختلاف سرعت به دلیل اختلاف سرعت صوت در دو محیط است. سرعت صوت در درون آب ۴/۴ برابر سرعت صوت در هوا می‌باشد.



شکل ۴ نمایی از ابعاد هندسی و شرایط اولیه

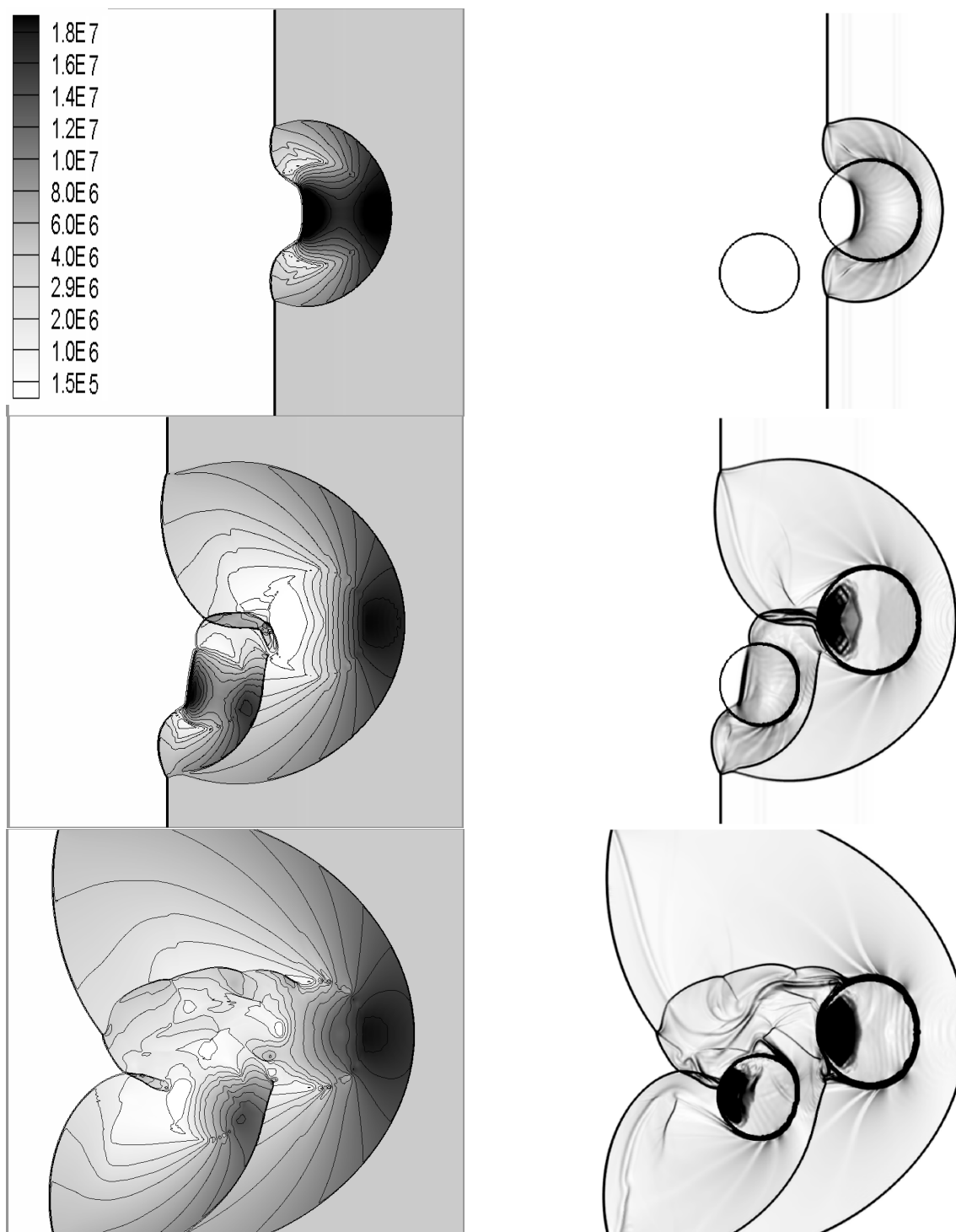
بر اساس تعداد شبکه 500×500 به‌دست آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به‌دست آمده همخوانی و تطابق خوبی با نتایج عکس‌های تجربی دارد. شکل پیچیده جریان مانند موج ضربه‌ای منعکس شده، موج ضربه‌ای عبور کرده از قطره و موج‌های انکساری و تداخل امواج با دقت بالایی تسخیر شده است.



شکل ۵ نتایج شاک تیوب گاز-مایع. مقایسه نتایج عددی (دایره - O) با نتایج حل دقیق (خط پر) [۱۰] و تعداد مش ۱۰۰۰

در لحظات اولیه شکل کلی موج‌های انعکاسی شبیه موج‌های انعکاسی برخورد نموده به یک جسم جامد است. پس از حرکت موج ضربه‌ای در درون قطره و برخورد به سمت دیگر آن یک

سری امواج در درون قطره به سمت عقب منعکس می‌شوند و یک ناحیه کم‌فشار در حد فشار صفر ایجاد می‌کنند. این پدیده در شکل ۵ به صورت واضح قابل مشاهده است.



شکل ۵ نتایج عددی شبیه‌سازی برخورد موج ضربه‌ای با ماخ ۶ به دو قطره. سمت چپ: توزیع فشار، سمت راست: تصویر شلرین از نتایج عددی. به ترتیب از بالا به پایین: ۳ میکروثانیه، ۶ میکروثانیه و ۹ میکروثانیه.

۶- مراجع

- [1] Dellius M., Adams G., "Shock Wave Permeabilization with Ribosome Inactivating Proteins: A New Approach to Tumor Therapy", *Cancer Research*, Vol. 59, 1999, pp. 5227-5232.
- [2] Yabe T., Xiao F., "Description of Complex and Sharp Interface during Shock Wave Interaction with Liquid Drop", *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 62, 1993, pp. 2537-2540.
- [3] Yabe T., Xiao F., "Description of Complex and Sharp Interface with Fixed Grids in Incompressible and Compressible Fluid", *Comp Math Applica.*, Vol. 29, 1995, pp. 1-25.
- [4] Igra D., Takayama K., "Investigation of Aerodynamic Breakup of a Cylindrical Water Droplet", Reports of the Institute of Fluid Science, Tohoku University, 1999, pp. 123-134.
- [5] Igra D., Takayama K., "Numerical Simulation of Shock Wave Interaction with a Water Column", *Shock Waves*, Vol. 11, 2001, pp. 219-228.
- [6] Chang C. H., Liou M. S., "A Robust and Accurate Approach to Computing Compressible Multiphase Flow: Stratified Flow Model and AUSM⁺-up Scheme", *J. Comput. Phys.*, Vol. 225, 2007, pp. 840-873.
- [7] Terashima H., Tryggvason G., "A Front-Tracking/Ghost-Fluid Method for Fluid Interfaces in Compressible Flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 228, 2009, pp. 4012-4037.
- [8] Terashima H., Tryggvason G., "A Front-Tracking Method with Projected Interface Conditions for Compressible Multi-Fluid Flows", *Computers & Fluids*, Vol. 39, pp. 1804-1814, 2010.
- [9] Kapila R., Menikoff J., Bdzil S., Stewart D., "Two-Phase Modeling of DDT in Granular Materials: Reduced Equations", *Phys. Fluid*, Vol. 13, 2001, pp. 3002-3024.
- [10] Saurel R., Petitpas F., Berry R. A., "Simple and Efficient Relaxation Methods for Interfaces Separating Compressible Fluids, Cavitating Flows and Shocks in Multiphase Mixtures", *J. Comput. Phys.*, Vol. 228, No. 5, 2009, pp. 1678-1712.
- [11] Allaire G., Clerc S., Kokh S., "A Five-Equation Model for the Simulation of Interfaces between Compressible Fluids", *J. Comput. Phys.*, Vol. 181, 2002, pp. 577-616.
- [12] Murrone A., Guillard H., "A Five-Equation Reduced Model for Compressible Two-Phase Flow Problems", *J. Comput. Phys.*, Vol. 202, No. 2, 2005, pp. 664-698.
- [13] Kreeft J. J., Koren B., "A New Formulation of Kapila's Five-Equation Model for Compressible Two-Fluid Flow, and Its Numerical Treatment", *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, 2010, pp. 6220-6242.

این فشار پایین منجر به ایجاد یک ناحیه کایتاسیون خلایی می‌شود. با گذر زمان کم‌کم به ضخامت فصل مشترک افزوده شده و ساختار پیچیده در فصل مشترک ایجاد می‌شود. این پیچیدگی موقعی که هوا آب را از درون قطره به بیرون می‌کشد بیشتر می‌شود. این پدیده در زمان ۹ میکروثانیه قابل مشاهده است. به دلیل انعکاس‌های موج ضربه‌ای در درون قطره و تداخل امواج مختلف با همدیگر توزیع پیچیده‌ای از فشار حاصل می‌شود. این توزیع فشار به نحوی است که در مقیاس کوچکی از میدان حل نقاط پرفشار در کنار نواحی کم‌فشار خلا و کایتاسیون پدیدار می‌شود که کد عددی حاضر به نحو خوبی از عهده تسخیر این میدان‌های فشاری برآمده است.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش اثرات متقابل موج ضربه‌ای و قطره در جریان دوفازی تراکم‌پذیر شبیه‌سازی و مطالعه شد. بدین منظور یک کد دوبعدی جدید بر اساس روش عددی گودونوف و حلگر HLLC برای مدل پنج‌معادله‌ای کاپیلا نوشته شد. به منظور بررسی صحت نتایج از یک مسئله یک‌بعدی مشکل شاک تیوب که یک سمت آن آب خالص با فشار بالا و در سمت دیگر هوای اتمسفریک است و نتایج دقیق آن در دسترس است و همچنین از نتایج تجربی برخورد موج ضربه‌ای و قطره استفاده شد که مقایسه نتایج عددی و نتایج تجربی بیانگر دقت بالای نتایج عددی است.

برخورد موج‌های ضربه‌ای با ماخ‌های ۱/۴۷ و ۶ با یک قطره و دو قطره مطالعه شد. سرعت موج ضربه‌ای در درون قطره کمتر از هواست که به دلیل اختلاف سرعت صوت در دو فاز است. در لحظات اولیه برخورد موج ضربه‌ای، قطره متراکم‌تر شده و فصل مشترک ضخیم‌تر می‌شود و به عبارتی گرادیان چگالی در فصل مشترک شدیدتر می‌شود. در زمان‌های بالاتر هوای با سرعت القایی از ناحیه موج ضربه‌ای آب موجود در قطره را به بیرون می‌کشد و فصل مشترک پیچیده‌تر و درهم‌تری را تشکیل می‌دهد. از نظر میدان‌های فشاری نیز در بعضی از نقاط میدان حل درون قطره نواحی کم فشار در حد فشار صفر خلایی و ناحیه کایتاسیون مشاهده شد. نتایج حاصله با نتایج عددی توسط بقیه محققان که از روش‌های عددی پیچیده‌تری استفاده کرده‌اند تطابق و همخوانی خوبی دارد.

- [17] Davis S. F., "Simplified Second-Order Godunov-Type Methods", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 9, 1998, pp. 445-473.
- [18] Nourgaliev R. R., Dinh T. N., Theofanous T. G., "Adaptive Characteristics-Based Matching for Compressible Multifluid Dynamics", *J. Comput. Phys.*, Vol. 213, 2006, pp. 500-529.
- [19] Hu X. Y., Adams N. A., Iaccarino G., "On the HLLC Riemann Solver for Interface Interaction in Compressible Multi-Fluid Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, 2009, pp. 6572-6589.
- [14] Qamar S., Ahmed M., "A High Order Kinetic Flux-Vector Splitting Method for the Reduced Five-Equation Model of Compressible Two-Fluid Flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 228, 2009, pp. 9059-9078.
- [15] Kokh S., Lagoutiere F., "An Anti-Diffusive Numerical Scheme for the Simulation of Interfaces between Compressible Fluids by Means of a Five-Equation Model", Vol. 229, 2010, pp. 2773-2809.
- [16] Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Berlin, Springer, 1999.