



Study of Heat Transfer of Periodic Electroosmotic/Pressure Driven Nanofluid Flow in a Microchannel Using the Poisson-Boltzmann Method

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Sheikhizad M.¹ MSc,
Kalteh M.^{*1} PhD

How to cite this article

Sheikhizad M, Kalteh M. Study of Heat Transfer of Periodic Electroosmotic/Pressure Driven Nanofluid Flow in a Microchannel Using the Poisson-Boltzmann Method. Modares Mechanical Engineering. 2019; 19(3):765-776.

ABSTRACT

In the present study, the electroosmotic and pressure driven flow of nanofluid in a microchannel with homogeneous surface potential is investigated by using the Poisson-Boltzmann equation and the flow field is assumed to be two-dimensional, laminar, incompressible, and steady. Distribution of nanoparticles in the base fluid is assumed to be homogeneous; therefore the nanofluid flow is modeled as a single phase. The thermal conductivity of the nanofluid is modeled by using the Patel model to account for temperature dependency. In order to validate the numerical solution, the results are compared with available analytical solutions and the comparison shows a good match with the results. Then, the effects of different parameters such as ion molar percentage, volume fraction, and nanoparticles' diameter on the flow field and heat transfer are examined. The results show that by fixing the electric field and increasing the pressure gradient, the local Nusselt number will decrease, and by fixing the pressure gradient and enhancing the electric field, the Nusselt number increases. The average Nusselt number increases about 45, 35 and 25% while nanoparticles' diameters are 100, 110 and 120nm, respectively. For $\Gamma=0.05$, the average Nusselt number increases 10% while ion concentration changes from 10^{-4} to 10^{-2} . Furthermore, the direction and magnitude of velocity and concavity of the velocity profile can be controlled by choosing a suitable phase angle between electrical and pressure driven flow parameters.

Keywords Electroosmotic Flow; Microchannel; Boltzmann Method; Nanofluid; Periodic Electroosmotic and Pressure Driven

CITATION LINKS

[1] Numerical study of slip flow heat transfer of ... [2] High-performance heat sinking ... [3] Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through ... [4] A numerical study on the forced convection of laminar ... [5] Fully developed electro-osmotic ... [6] Joule heating effects in electroosmotically ... [7] Comparison of the Nernst-Planck model and the Poisson-Boltzmann model for ... [8] Simulation of electro-osmotic flow in microchannel with ... [9] Numerical study of active control of mixing in electro-osmotic flows by temperature ... [10] Numerical simulation of electroosmotic flow in flat microchannels with ... [11] Analysis of electroosmotic flow with periodic electric and pressure fields via the lattice ... [12] Thermally developing electroosmotic transport of ... [13] Fully developed thermal transport in combined pressure and electroosmotically driven flow of nanofluid in a microchannel under the effect ... [14] Thermally developing combined electroosmotic and pressure-driven flow of nanofluids in a microchannel ... [15] Electro-osmotic flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid in a ... [16] Effects of slip velocity on rotating electro-osmotic flow in a slowly varying ... [17] Electro-osmotic flow of Eyring fluids in a circular microtube with Navier's slip boundary condition [18] Electroosmotic flow of a non-Newtonian fluid in a microchannel ... [19] Numerical simulation of electroosmotic flow in rough microchannels using the lattice ... [20] Effects of magnetic field on nanofluid forced convection in ... [21] The viscosity of concentrated ... [22] A micro-convection model for thermal conductivity ... [23] Effective cluster model of dielectric enhancement ... [24] Lattice Poisson-Boltzmann simulations of electro-osmotic flows ... [25] Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann ... [26] On pressure and velocity boundary conditions for ... [27] Lattice Boltzmann method: Fundamentals and engineering ... [28] Numerical simulation of electrokinetic ...

¹Energy Conversion Department, Mechanical Engineering Faculty, University of Guilan, Rasht, Iran

*Correspondence

Address: Energy Conversion Department, Mechanical Engineering Faculty, University of Guilan, Rasht, Iran
Phone: +98 (13) 33690274
Fax: +98 (13) 33690274
mkalteh@guilan.ac.ir

Article History

Received: March 15, 2018
Accepted: November 16, 2018
ePublished: March 01, 2019

بررسی انتقال حرارت نانوسیال در جریان الکترواسموزی و فشاری متناوب در یک میکروکانال با استفاده از روش شبکه پواسون-بولتزمن

مهدی شیخی‌زاد MSc

گروه تبدیل انرژی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

محمد کلتة PhD

گروه تبدیل انرژی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

چکیده

در مطالعه حاضر، میدان جریان الکترواسموزی و فشاری نانوسیال در پتانسیل سطح همگن در میکروکانال با اعمال معادله پواسون-بولتزمن و فرض جریان دوئیدی، آرام، تراکم‌ناپذیر و پایا بررسی شده است. توزیع نانوذرات در سیال پایه به شکل همگن در نظر گرفته شده و در نتیجه جریان نانوسیال به شکل تک‌فاز است. در این مدل‌سازی نانوسیال از مدل پاتل استفاده شده که در آن وابستگی ضریب هدایت حرارتی به دما لحاظ شده است. به منظور تایید صحت حل عددی، نتایج حاصل با حل تحلیلی موجود برای هر بخش مقایسه شده و مطابقت خوبی به دست آمده است. سپس در ادامه، تاثیر پارامترهایی از قبیل درصد مولار یون، کسر حجمی و قطر نانوذرات روی جریان سیال و انتقال حرارت بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با ثابت‌نگه‌داشتن میدان الکتریکی و افزایش گرادیان فشار، عدد ناسلت موضعی کاهش و با ثابت‌نگه‌داشتن گرادیان فشار و افزایش میدان الکتریکی، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. عدد ناسلت متوسط برای قطر نانوذرات ۱۰۰، ۱۱۰ و ۱۲۰ نانومتر به ترتیب ۴۵، ۳۵ و ۲۵٪ افزایش پیدا می‌کند. زمانی که $\Gamma = 0/05$ باشد، با افزایش غلظت یون از 10^{-3} تا 10^{-2} عدد ناسلت متوسط به اندازه ۱۰٪ افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان با انتخاب زاویه فاز مناسب برای محرک‌های متناوب الکتریکی و فشاری، میزان و جهت سرعت و شکل تقعر پروفیل سرعت را کنترل نمود.

کلیدواژه‌ها: جریان الکترواسموزی، میکروکانال، روش شبکه بولتزمن، نانوسیال، محرک الکتریکی و فشاری متناوب

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵

*نویسنده مسئول: mkalteh@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

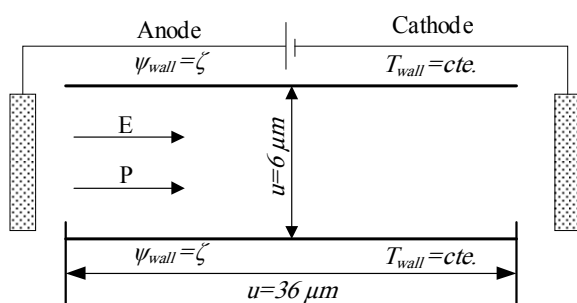
افزودن ذرات جامد به صورت معلق در سیال پایه، یکی از روش‌های بهبود انتقال حرارت است. افزایش ضریب هدایت حرارتی، ایده اصلی در بهبود مشخصه‌های انتقال حرارت سیالات است. از آنجایی که ضریب هدایت حرارتی ذرات جامد معمولاً خیلی بالاتر از سیالات است، بنابراین انتظار می‌رود که افزودن این ذرات جامد موجب افزایش ضریب هدایت حرارتی سیال پایه شود. افزایش ضریب هدایت حرارتی مایعات در نتیجه افزودن ذرات با اندازه میلی‌متر و میکرومتر بیش از ۱۰۰ سال است که شناخته شده است. اما استفاده از این ذرات به دلیل مشکلات عملی نظیر ته‌نشین شدن سریع ذرات، ایجاد ساییش شدید، افزایش افت فشار و عدم امکان استفاده از آنها در مجاری بسیار ریز میسر نیست. با پخش کردن نانوذرات در سیال، نوع جدیدی از سیال به وجود می‌آید که نانوسیال نامیده می‌شود^[۱]. تاکرمن و پیر^[۲] برای اولین بار استفاده از میکروکانال برای دفع شار حرارتی بالا را پیشنهاد کردند و آن را به عنوان وسیله‌ای برای دفع حرارت از مدارهای سیلیکونی ارایه دادند. آزمایش آنها شامل طراحی و آزمودن چاه حرارتی شناخته شده روی سیلیکون بود. این ایده نو منجر به طراحی‌های جدید و تحقیقات گسترده پژوهشگران در زمینه خنک‌سازی با میکروکانال شد. سانترا و همکاران^[۳] به مطالعه تاثیر نانوسیال

مس-آب با سیال عامل نیوتنی و غیرنیوتنی بر انتقال حرارت در میکروکانال‌ها به صورت عددی پرداختند. نتایج آنان نشان داد که استفاده از نانوسیال سبب افزایش انتقال حرارت در هر دو مورد سیال نیوتنی و غیرنیوتنی می‌شود. ریسی و همکاران^[۴] به بررسی عددی عملکرد حرارتی یک میکروکانال، یک بار با سیال عامل آب و بار دیگر با نانوسیال مس-آب پرداختند. در این مطالعه تاثیر شرط مرزی لغزشی، عدد رینولدز و کسر حجمی به روی توزیع دما بررسی شده است.

در زمینه جریان الکترواسموز، ماینر و وب^[۵] به بررسی تحلیلی جریان کاملاً توسعه‌یافته حرارتی و هیدرودینامیک بین دو صفحه تخت و داخل یک میکرولوله پرداختند و به این نتیجه رسیدند که در شرایط دمای ثابت دیواره، عدد ناسلت تابعی از نسبت شعاع کانال به طول مشخصه لایه دوگانه الکتریکی است و همچنین افزایش منبع گرمایی بی‌بعد در معادله انرژی که موسوم به گرمایش ژول است، در تمامی ابعاد نسبی کانال کاهش می‌یابد. هوری وچی و دوتتا^[۶] به ارایه حل تحلیلی برای توزیع دما، ضریب انتقال حرارت و عدد ناسلت برای جریان پایای الکترواسموز در حالت دوئیدی در میکروکانال پرداخته‌اند. در این مطالعه از هر دو نوع شرط مرزی دما و شار ثابت استفاده شده است. محدوده عدد رینولدز استفاده شده در این مطالعه بسیار پایین بود تا میدان‌های غالب، میدان الکتریکی و ویسکوز باشند. همچنین این مطالعه به بررسی نتایج در حضور و عدم حضور گرمایش ژول پرداخته است. پارک و همکاران^[۷] به توضیح در مورد تفاوت بین روش نرنست پلانک و پواسون بولتزمن پرداخته‌اند. در ادامه به مواردی اشاره نموده‌اند که نمی‌توان از فرض‌های ساده‌سازی برای رسیدن از معادله نرنست به پواسون بولتزمن استفاده نمود. نتایج آنان نشان داد، در مواردی که ضخامت لایه دوگانه الکتریکی به اندازه کافی کوچک باشد و به تعبیری نزدیک دیواره باشد، نتایج پواسون و نرنست تفاوتی نخواهند داشت. چای و شی^[۸] به بررسی جریان تراکم‌ناپذیر الکترواسموتیک در میکروکانال پرداخته‌اند. در کار آنها تاثیر پتانسیل سطح، ارتفاع کانال و غلظت یونی بر پروفیل سرعت در جریان متغیر با زمان بررسی شده است. علیزاده و همکاران^[۹]، تاثیر تفاوت دمای ورودی و دیوار روی جریان الکترواسموتیک در یک میکروکانال دوئیدی را بررسی کرده‌اند. هدف اصلی این مطالعه، بررسی تاثیر تفاوت دمایی روی توزیع یونی، میدان پتانسیل داخلی، نیروی حجمی الکتریکی و میدان سرعت جریان الکترواسموتیک بوده است. روش عددی استفاده شده در این مطالعه شبکه بولتزمن است. محمدی‌پور و همکاران^[۱۰] با ارایه مدل جدید و مناسب از معادلات پواسون و نرنست پلانک در روش شبکه بولتزمن، جریان الکترواسموتیک در بین دو صفحه تخت با توزیع غیریکنواخت پتانسیل سطحی دیوار را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که پروفیل سرعت و نرخ جریان حجمی تحت تاثیر نسبت ضخامت لایه دوگانه الکتریکی به ارتفاع کانال است. لاین و چن^[۱۱] به بررسی جریان الکترواسموتیک با پتانسیل سطح ناهمگن در یک میکروکانال با روش پواسون بولتزمن پرداخته‌اند. آنها تاثیر پتانسیل سطح، غلظت یون، ارتفاع کانال و میدان محرک متناوب بر پروفیل سرعت را بررسی کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که با پتانسیل ناهمگن و محرک‌هایی با زاویه فاز متفاوت می‌توان در یک میکروکانال، گردابه‌هایی در مرکز و نزدیک دیواره ایجاد کرد. در زمینه جریان الکترواسموتیک به همراه نانوسیال، چاکرابورتی و روی^[۱۲] به بررسی تئوری تاثیر نانوسیال بر جریان الکترواسموتیک پرداخته‌اند. آنها نتایج عددی به دست آمده برای

۲-۱- هندسه مساله

هندسه مطالعه حاضر از یک میکروکانال افقی به طول L و ارتفاع H تشکیل شده است (شکل ۱). عرض کانال نیز بی‌نهایت فرض شده است، در نتیجه می‌توان میکروکانال را به صورت دو صفحه موازی در نظر گرفت. نسبت طول به ارتفاع کانال در این مطالعه ۶ در نظر گرفته شده است. عامل‌های حرکت سیال یک میدان الکتریکی خارجی با قدرت E همراه با گرادیان فشار ثابت ∇P در راستای جریان است. در این مطالعه این محرک‌ها با توجه به زاویه فازهای مشخص، مقدارشان تغییر پیدا خواهد نمود. سیال مورد بحث نیز ترکیبی از یک سیال الکترولیت (آب به عنوان سیال پایه و یون‌های K^+ و Cl^-) و نانوذرات آلومینیوم اکسید با قطر تقریبی ۱۰۰ نانومتر است. در این مطالعه الکترولیت، متقارن و دارای نسبت یونی ۱:۱ است.



شکل (۱) نمایی از فیزیک مساله

جریان دو بُعدی، آرام، تراکم‌ناپذیر و پایا بوده و جریان در میکروکانال توسعه یافته یونی و هیدرودینامیک و در حال توسعه یافته حرارتی فرض شده است. نانوسیال به صورت تک فاز در نظر گرفته شده و شرط مرزی عدم لغزش سرعت و شرط دمای ثابت در این مساله اعمال شده است.

۲-۲- خواص نانوسیال

در مطالعه حاضر به دلیل کوچک بودن قطر نانوذرات، فرض شده که ذرات به صورت یکسان در تمام سیال توزیع شده است و می‌توان نانوسیال را به عنوان سیال تک فاز در نظر گرفت و با این فرض به محاسبه خواص نانوسیال پرداخت. برای محاسبه ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی نانوسیال از روابط زیر استفاده می‌شود [20]:

$$\rho_{nf} = \rho_f(1-\phi) + \rho_s \phi \quad (۱)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (\rho C_p)_f(1-\phi) + (\rho C_p)_s \phi \quad (۲)$$

که در آن ρ_f چگالی سیال پایه، ρ_s چگالی نانوذرات آلومینا، $(\rho C_p)_f$ ظرفیت گرمایی سیال پایه، $(\rho C_p)_s$ ظرفیت گرمایی نانوذرات آلومینا و $(\rho C_p)_{nf}$ ظرفیت گرمایی نانوسیال است.

ویسکوزیته دینامیک نانوسیال با استفاده از مدل برینکمن [21] محاسبه می‌شود که در آن حرکت براونی نانوذرات نیز لحاظ شده است.

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\phi)^{2.5}} \quad (۳)$$

برای ضریب هدایت حرارتی نانوسیال از مدلی استفاده می‌شود که توسط پاتل و همکاران [22] ارائه شده است و در آن کسر حجمی نانوذرات، دمای نانوسیال، حرکت براونی و قطر نانوذرات برای

پروفیل دما در فواصل مختلف را نسبت به ورودی و مقادیر موضعی عدد ناسلت با حل‌های تحلیلی مقایسه کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که استفاده از نانوسیال سبب بهبود انتقال حرارت و همچنین تغییر جزئی پروفیل دما می‌شود. سرکار و گانگولی [13] به بررسی تأثیر نانوسیال بر جریان با محرک مغناطیسی در حالت توسعه یافته دمایی پرداخته‌اند. در این مساله از محرک‌های فشاری، الکترواسموتیک و مغناطیسی استفاده شده است. در ادامه نتایج عددی با حل‌های تحلیلی برای عدد ناسلت و توزیع دمایی مقایسه شده است. همچنین آنها به بررسی تأثیر خواص ترموفیزیک نانوسیال بر جریان پرداختند که نتایج بهبود عملکرد انتقال حرارت با افزایش غلظت نانوذرات را نشان می‌دهد.

گانگولی و همکاران [14] به بررسی نیمه تحلیلی جریان با محرک‌های مغناطیسی، الکتریکی و فشاری پرداخته‌اند. آنها تأثیر میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، گرمایش ژول، اتلاف لزجت و نانوسیال را بر توزیع بی‌بعد دما بررسی کرده‌اند. نتایج آنان نشان می‌دهد که تولید آنتروپی در ناحیه در حال توسعه یافتگی نسبت به توسعه یافته اهمیت بیشتری دارد. میسر و سینها [15] به بررسی جریان سیال غیرنیوتنی با محرک الکتریکی در یک میکروکانال با شرط مرزی لغزشی و پرش دمایی به کمک حل تحلیلی و بررسی جریان خون به عنوان مساله کاربردی پرداخته‌اند. نتایج آنان نشان داد با تغییر پارامتر گرمایش ژول می‌توان دمای خون را کنترل کرد. شیت و همکاران [16] به بررسی جریان با محرک‌های فشاری و الکترواسموتیک پرداخته‌اند. در این مطالعه از فرض دیبای-هوکل به جای حل معادله پواسون استفاده شده است. در ادامه به بررسی تأثیر شرط مرزی لغزشی، گرمایش ژول و اختلاف پتانسیل روی پروفیل سرعت و انتقال حرارت پرداخته شده است. تان و لیو [17] به بررسی عددی و تحلیلی جریان سیال غیرنیوتنی با محرک الکتریکی در یک میکرولوله با شرط مرزی لغزشی پرداخته‌اند. آنها تأثیر طول لغزش، پارامتر الکتریکی و پارامترهای رئولوژیک سیال غیرنیوتنی روی جریان را مطالعه کرده‌اند. باگ و بهاتچاریا [18] به بررسی جریان الکترواسموتیک با سیال غیرنیوتنی به روش نرنست پلانک پرداختند. آنها به کمک روش حجم محدود، جریان با شرط مرزی پتانسیل سطح ناهمگن را مدل سازی نمودند. آنها تأثیر غیرخطی تنش برشی سیال را معرفی کردند و نشان دادند که این تأثیرات با کاهش طول لایه دوگانه الکتریکی کاهش می‌یابد. کمالی و همکاران [19] مدل دینامیک را برای جریان الکترواسموتیک در جایی که دو لایه الکتریکی به هم رسیده‌اند، ارائه نمودند. آنها تأثیرات ارتفاع زبری و محل قرارگیری آنها روی جریان را بررسی نمودند. نتایج آنها نشان داد که افزایش پتانسیل زبری سطح سبب افزایش محرک الکتریکی و در نتیجه افزایش سرعت می‌شود. در مطالعات گذشته، نانوسیال با خواص وابسته به دما در جریان الکترواسموتیک بررسی نشده است. در مطالعه حاضر به بررسی جریان الکترواسموتیک با محرک متناوب الکتریکی و فشاری به همراه نانوسیال به صورت تک فاز، دایم، آرام، تراکم‌ناپذیر و پایا پرداخته شده است. جریان در میکروکانال توسعه یافته یونی و هیدرودینامیک و همچنین در حال توسعه یافته حرارتی در نظر گرفته شده است.

۲- معادلات ریاضی و هندسه مساله

در این بخش هندسه مساله، معادلات ماکروسکوپی حاکم، شرایط مرزی متناسب با معادلات پواسون، مومنوم و انرژی و همچنین معادلات بولتزمن مربوطه و شرایط مرزی مرتبط با این

۲-۳- معادله پواسون - بولتزمن

بر پایه تئوری الکترواستاتیک، معادله حاکم بر توزیع پتانسیل الکتریکی، ψ می‌تواند به وسیله یک معادله پواسون و به صورت زیر تعریف شود [24]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = -\frac{\rho_e(x,y)}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (12)$$

که در آن $\rho_e(x,y)$ چگالی خالص بار الکتریکی محلی، $\psi = \psi(x,y)$ پتانسیل الکتریکی در فضای دو بُعدی، ϵ_r نسبت گزردی الکتریکی الکترولیت به نظیرش در خلا است. چگالی خالص بار الکتریکی $\rho_e(x,y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_e = Ze(n^+ - n^-) \quad (13)$$

که در آن n^+ و n^- غلظت‌های یون‌های مثبت و منفی با واحد $Z, \frac{ion}{m^3}$ عدد والانس یون‌ها و e مقدار بار الکتریکی یک یون با واحد کولن است.

طبق تئوری الکترواستاتیک، غلظت عددی یون‌ها نیز خود وابسته به توزیع پتانسیل الکتریکی ψ است و به عبارت ساده‌تر از توازن دو نیروی ناشی از پخش یون‌ها و گرادیان پتانسیل الکتریکی به دست می‌آید. برای مثال در حالت یک بُعدی می‌توان نوشت:

$$K_B T_0 \left(\frac{dn^\pm}{dy} \right) = \mp Ze n^\pm \left(\frac{d\psi}{dy} \right) \quad (14)$$

که در این معادله، سمت چپ، معرف نیروی ناشی از پخش یونی و سمت راست، ناشی از گرادیان پتانسیل الکتریکی است. $n^\pm$ معرف غلظت عددی یون‌های مثبت و منفی است. با انتگرال‌گیری از رابطه چگالی خالص بار الکتریکی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n^\pm = n_0 e^{\mp \frac{Ze\psi(x,y)}{K_B T_0(x)}} \quad (15)$$

که در آن n_0 غلظت عددی یون‌ها در حالت $\psi = 0$ است. رابطه به دست آمده به توزیع نمایی بولتزمن مشهور است. در این رابطه علامت (-) در سمت راست برای تعیین توزیع غلظت یون‌های مثبت و علامت (+) برای تعیین توزیع غلظت یون‌های منفی به کار می‌رود. در این رابطه T دمای مطلق و بر حسب کلوین و K_B ثابت بولتزمن و بر حسب $\frac{J}{K}$ است.

در نهایت، با جای‌گذاری معادله ۱۵ در معادله ۱۳، معادله توزیع چگالی بار الکتریکی به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho_e(x,y) = -2Ze n_0 \sinh \left(\frac{Ze\psi(x,y)}{K_B T_0(x)} \right) \quad (16)$$

که با جای‌گذاری در معادله پواسون می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = -2Ze n_0 \sinh \left(\frac{Ze\psi(x,y)}{K_B T_0(x)} \right) \quad (17)$$

برای بی‌بعدسازی رابطه فوق، مقادیر مرجع مورد نیاز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\frac{K_B T_0}{Ze}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_e}{Zen_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{y} = \frac{y}{H} \quad (18)$$

پس از جای‌گذاری شکل بی‌بعد، معادله پواسون به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{K}{2} \bar{\rho} e \quad (19)$$

در این رابطه K پارامتر دیبای-هوکل است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$k_{nf} = k_f \left[1 + \frac{k_s A_s}{k_f A_f} + C k_s Pe \frac{A_s}{k_f A_f} \right] \quad (4)$$

که:

$$\frac{A_s}{A_f} = \frac{d_s}{d_f} \frac{\varphi}{1 - \varphi} \quad (5)$$

$$Pe = \frac{u_B d_s}{\alpha_f} \quad (6)$$

همچنین در تعریف عدد پکلت از سرعت حرکت براونی نانوذرات استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_B = \frac{2K_B T}{\pi \mu_{nf} d_s^2} \quad (7)$$

در معادلات بالا d_s نشان‌دهنده قطر نانوذرات و d_f بیانگر قطر مولکول‌های سیال پایه است. C یک عدد ثابت بوده که از داده‌های تجربی در حدود ۲۵۰۰۰ مقدار آن برآورد شده است. K_B ثابت بولتزمن بوده و مقدار آن برابر $\frac{1}{K} \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ است.

در مطالعه حاضر، قطر نانوذرات حدود ۱۰۰ نانومتر و قطر مولکول آب نیز ۲۲ آنگستروم در نظر گرفته شده است. سایر خواص نیز از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\nu_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \quad (8)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (9)$$

$$Pr_{nf} = \frac{\nu_{nf}}{\alpha_{nf}} \quad (10)$$

همچنین برای مدل‌سازی ضریب گزردی الکتریکی نانوسیال نیز از مدل دوپل و جیکوبز [23] استفاده شده است.

$$\left(\frac{\epsilon_{nf}}{\epsilon_f} \right)^{-1} = \varphi \left[1 + \left(\frac{\varphi}{\varphi_c} \right) \left(\frac{1}{\varphi_c} - 1 \right) \right] \quad (11)$$

در این معادله φ_c یک ثابت تجربی به نمایندگی از کسر حجمی بحرانی برای اختلال بی‌نظم نانوذرات در سیال پایه بوده که برای نانوذرات آلومینا با توجه به یک پژوهش [23]، ۰/۶۳ در نظر گرفته شده است.

خواص نانوسیال با استفاده از خواص آب و نانوذرات آلومینیوم اکسید ارایه شده در جدول ۱ و کسر حجمی نانوذرات محاسبه شده است.

جدول ۱) مشخصات ترموفیزیک آب و آلومینیوم اکسید

مشخصات	نماد	آب	آلومینیوم اکسید
ظرفیت گرمایی	$C_p \left(\frac{J}{kg \cdot K} \right)$	۴۱۷۹	۷۶۵
چگالی	$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	۹۹۷	۳۹۷۰
رسانندگی گرمایی	$k \left(\frac{W}{m \cdot K} \right)$	۰/۶۱۳	۴۰
ضریب لزجت دینامیکی	$\mu \left(\frac{kg}{m \cdot s} \right)$	۸۹×۱۰-۵	--
گزردی الکتریکی	$\epsilon \left(\frac{C}{V \cdot m} \right)$	-۶ ۷/۰۸۳۲×۱۰	--

$$(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{\rho}_e B \left(A E_x + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \quad (27)$$

$$(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (28)$$

در روابط فوق، همان سرعت ناشی از میدان الکتریکی است که می‌توان برای محاسبه آن از رابطه هلمهولتز-اسموچولوفسکی بهره برد.

$$u_{ref} = \frac{\varepsilon_{nf} E_x \zeta}{\mu_{nf}} \quad (29)$$

همچنین سرعت ناشی از میدان فشار به صورت زیر محاسبه می‌شود[9]:

$$u_p = -\frac{H^2}{12\mu_{nf}} \frac{\Delta p}{L} \quad (30)$$

در مطالعه حاضر به بررسی هر دو میدان الکتریکی و فشاری پرداخته خواهد شد. در نتیجه سرعت نهایی، مجموع دو سرعت فوق خواهد بود:

$$u_{all} = u_{ref} + u_p \quad (31)$$

همچنین نسبت سرعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \frac{u_p}{u_{ref}} \quad (32)$$

شرایط مرزی حاکم نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$y=0 \rightarrow u=0, v=0 \quad (33)$$

$$x=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, p=p_{inlet} \quad (34)$$

$$x=L \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = v=0, p=p_{outlet} \quad (35)$$

در صورتی که تقریب دیبای-هوکل برقرار باشد، برای پروفیل سرعت ناشی از میدان الکتریکی و فشاری می‌توان حل تحلیلی زیر را ارائه نمود[9]:

$$u = u_{ref} \left[1 - \frac{\cosh(ky - \frac{\kappa H}{2})}{\cosh(\frac{\kappa H}{2})} \right] + \frac{1}{2\mu_{nf}} \frac{dp}{dx} (y^2 - Hy) \quad (36)$$

۵-۲- معادله انرژی

چنانچه از حرارت ناشی از اتلاف ویسکوز و گرمایش ژول صرف نظر شود، معادله انرژی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$(\rho C_p)_{nf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{nf} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{nf} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (37)$$

دمای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{T - T_{wall}}{T_{in} - T_{wall}} \quad (38)$$

شکل بی‌بعد معادله انرژی به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{1}{Pr_{nf}} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{1}{Pr_{nf}} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right) \right] \quad (39)$$

شرایط مرزی برای معادله انرژی به صورت زیر است[9]:

$$y=0 \rightarrow T=T_{wall}, y=H \rightarrow T=T_{wall} \quad (40)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2n_0 Z^2 e^2}{\varepsilon K_B T_0}} \quad (20)$$

شرایط مرزی این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y=0 \rightarrow \psi = \zeta \quad (21)$$

$$y=H \rightarrow \psi = \zeta$$

$$x=L \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$x=0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

چنانچه جریان الکترواسموتیک در یک میکروکانال به صورت توسعه یافته هیدرودینامیک و شرط $\frac{Ze\zeta}{K_B T} \leq 1$ نیز برقرار باشد، می‌توان از تقریب دیبای-هوکل استفاده نمود. با به کارگیری این تقریب، حل تحلیلی ارائه شده به شکل زیر خواهد بود[9]:

$$\psi = \frac{\zeta \cosh(ky - \frac{\kappa H}{2})}{\cosh(\frac{\kappa H}{2})} \quad (23)$$

۴-۲- معادلات اصلاح شده ناویر-استوکس

در این قسمت معادلات اصلاح شده ناویر-استوکس براساس درج نیروی حجمی ناشی از اعمال میدان الکتریکی خارجی روی چگالی بار خالص موجود در لایه دوگانه الکتریکی کنار دیواره‌ها نوشته می‌شود. بنابراین معادلات ناویر-استوکس اصلاح شده شامل معادلات پیوستگی و مومنتوم است. برای جریان تراکم ناپذیر الکترولیتی در حالت آرام و پایا به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (24)$$

معادلات مومنتوم پایدار:

$$\rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho_e \left(\vec{E} + \nabla \bar{\psi} \right) \quad (25)$$

که در آن $\vec{u}$ بردار سرعت بر حسب $\frac{m}{s}$ ، μ لزجت دینامیکی الکترولیت، $\vec{E}$ بردار قدرت میدان الکتریکی خارجی، ρ چگالی جرمی الکترولیت و $\vec{P}$ فشار هیدرودینامیک سیال است. جمله آخر معادله بالا بیانگر نیروی حجمی الکتریکی بوده که به سیال وارد شده و عامل حرکت آن است. از این پس، نیروی حجمی در جهت x در این مطالعه به صورت $BF = \rho_e (E_x + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x})$ نشان داده می‌شود. جمله مربوط به نیروی حجمی در جهت y به دو دلیل $E_y = 0$ و غلظت پایین یون‌های محلول در سیال، حذف شده است. به عبارت دیگر، نیروی الکتریکی ناشی از گرادیان ψ در جهت y با نیروی ناشی از پخش یون‌ها پیش از این موازنه شده‌اند و نهایتاً توزیع یون بولتزمن را نتیجه داده‌اند. موازنه این دو نیرو فقط در مورد یون‌ها صادق است و به دلیل کمبود غلظت یون‌ها در الکترولیت تعداد مولکول‌های سیال کمتری تحت تاثیر حرکت یون‌ها قرار خواهند گرفت. در مورد مشابه برای رابطه فوق، منشأ بیرونی داشته و لذا با E_x جمع زده شده است. شکل بی‌بعد معادلات مومنتوم نیز براساس تعریف مقادیر مرجع مناسب به صورت زیر است[9]:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{ref}}, \bar{v} = \frac{v}{u_{ref}}, \bar{p} = \frac{p}{\rho u_{ref}^2}, A = \frac{E.H}{\frac{K_B T_0}{Ze}}, B = \frac{n_0 K_B T_0}{\rho u_{ref}^2} \quad (26)$$

که در آن E_x مقدار پتانسیل الکتریکی خارجی است. با استفاده از تعاریف رابطه فوق، شکل بی‌بعد معادله مومنتوم به شکل زیر در خواهد آمد:

میکروسکوپی یک مدل حرکت سیال دیده می‌شود که شامل برخورد و حرکت است.

معادلات شبکه بولتزمن از معادلات بولتزمن نتیجه شده‌اند که نسبت به زمان، فضا و سرعت جداسازی می‌شوند. معادله بولتزمن به همراه اعمال نیروی حجمی به شکل زیر نوشته می‌شود [25]:

$$\partial_t f + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} f = \Omega \quad (48)$$

که $f = f(\vec{r}, \vec{\xi}, t)$ تابع توزیع تک ذرات در فضای $(\vec{r}, \vec{\xi})$ بردار مکان، $\vec{\xi}$ بردار سرعت میکروسکوپی، $\vec{F}$ نیروی حجمی خارجی و Ω عملگر برخورد است. به دلیل انعطاف‌پذیری، محاسبه برخورد بسیار پیچیده بوده، بنابراین تقریب بهاتنگار، گراس و کروک معمولاً برای شبیه‌سازی شبکه بولتزمن مناسب است. معادله ۴۸ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\partial_t f + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} f = -\frac{1}{\tau_v} (f - f^{eq}) \quad (49)$$

که τ_v زمان آسایش بوده و f^{eq} تابع توزیع تعادل بولتزمن مکسول است که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f^{eq} = \frac{\rho_0}{(2\pi RT)^2} e^{-\frac{(\vec{\xi} - \vec{u})^2}{2RT}} \quad (50)$$

که ρ_0 ، $\vec{u}$ و T به ترتیب چگالی، سرعت و دما هستند. R ثابت گازها و D بعد مکانی است. ترم نیروی خارجی را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} f = \frac{\vec{G} \cdot (\vec{\xi} - \vec{u})}{RT} f^{eq} \quad (51)$$

که $\vec{G}$ نیروی حجمی خارجی به ازای واحد جرم سیال است. در روش شبکه بولتزمن، معادله بولتزمن به شکل خاص شبکه جداسازی می‌شود:

$$\partial_t f_i + (\vec{\xi}_i \cdot \vec{\nabla}) f_i + \vec{F}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}_i} f_i = -\frac{1}{\tau_v} (f_i - f_i^{eq}) \quad (52)$$

در این مطالعه اجزای سرعت شبکه به شکل زیر هستند:

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0, 0) \rightarrow i = 0 \\ \left(\cos \frac{(i-1)\pi}{2}, \sin \frac{(i-1)\pi}{2} \right) c \rightarrow i = 1-4 \\ \left(\cos \frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \sin \frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) c \rightarrow i = 5-8 \end{cases} \quad (53)$$

که c سرعت جریان ذرات است. تابع توزیع تعادل بولتزمن ماکسول به شکل زیر است:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + 3 \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c^2} + 9 \frac{(\vec{e}_i \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right]$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} \rightarrow i = 0 \\ \frac{1}{9} \rightarrow i = 1-4 \\ \frac{1}{36} \rightarrow i = 5-8 \end{cases} \quad (54)$$

برای مساله دو بُعدی، معادله چگالی جرم با به کار بردن نیروی خارجی به صورت زیر است:

$$f_i(\vec{r} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\vec{r}, t) - \frac{1}{\tau_v^*} [f_i(\vec{r}, t) - f_i^{eq}(\vec{r}, t)] + \delta t \frac{\vec{G} \cdot (\vec{e}_i - \vec{u})}{RT} f^{eq}(\vec{r}, t) \quad (55)$$

$$x=0 \rightarrow T=T_{in}, \quad x=L \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

در مطالعه حاضر، عدد ناسلت به صورت عددی از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$Nu = \frac{h(2H)}{k_f} \quad (42)$$

که در آن H ارتفاع کانال و h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h = \frac{q_w}{T_{wall} - T_{bulk}} = \frac{-k_{nf} \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0}}{T_{wall} - T_{bulk}} \quad (43)$$

با تلفیق دو معادله فوق، عدد ناسلت موضعی برای دیواره پایین میکروکانال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Nu_{nf} = -\frac{k_{nf}(2H)}{k_f(T_{wall} - T_{bulk})} \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} \quad (44)$$

در معادله بالا، دمای میانگین سیال (T_{bulk}) در هر مقطع از میکروکانال به صورت زیر تعریف می‌شود:

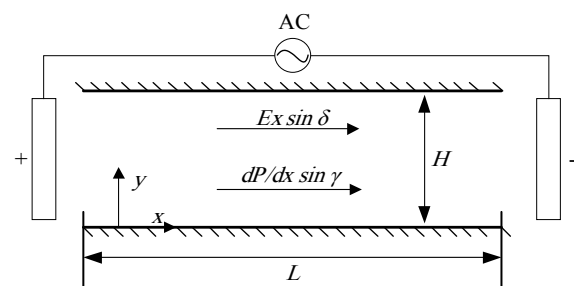
$$T_{bulk} = \frac{\int_A \rho_{nf} u T dA}{\int_A \rho_{nf} u dA} \quad (45)$$

۶-۲- میدان الکتریکی و فشاری سینوسی

برای کنترل میزان سرعت در میکروکانال از محرک‌های سینوسی بهره می‌برند، به صورتی که میزان سرعت با مشخص کردن زاویه فاز دو محرک فشاری و الکتریکی مشخص خواهد شد (شکل ۲). میدان الکتریکی و گرادیان فشار سینوسی به صورت زیر بیان می‌شود [11]:

$$E_{xperiodic} = \sin(\delta) \cdot E_x \quad (46)$$

$$\frac{dp}{dx}_{periodic} = \sin(\gamma) \cdot \frac{dp}{dx} \quad (47)$$



شکل ۲) شکل شماتیک مدل فیزیکی با محرک تناوبی [11]

۷-۲- فرمولاسیون معادلات و شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن

در مطالعه حاضر، معادلات حاکم بر مساله به صورت عددی روش شبکه بولتزمن D2Q9 حل خواهد شد. در ادامه به معرفی بخش‌های سه‌گانه شبکه بولتزمن برای حل معادلات اصلی پرداخته خواهد شد (برخورد، پخش و شرایط مرزی).

۱-۷-۲- معادله شبکه بولتزمن برای جرم و مومنتوم

روش شبکه بولتزمن (LBM) برگرفته از شبکه سلول گازی خودکار (LGCA) بوده که یک طرح عددی استفاده شده در دینامیک سیالات محاسباتی است. روش شبکه بولتزمن در دیدگاه

۲-۷-۲- معادله شبکه بولتزمن برای توزیع پتانسیل الکتریکی

چگالی ماکروسکوپی سیال و سرعت را می‌توان با حل همزمان معادلات ۵۳ تا ۵۷ به همراه ۵۸ محاسبه نمود. اما چگالی بار محلول الکترولیت باید در ابتدا محاسبه شود. نظریه جریان الکترواسموتیک (EOF) مربوط به پتانسیل الکتریکی و توزیع یون در حجم، الکترولیت می‌شود که قبلاً به حرکت در آمده است و باید از معادله پواسون تبعیت کند [11]:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_e}{\epsilon \epsilon_0} \quad (65)$$

که ϵ_0 ضریب گزدهی در فضای آزاد و ϵ_r ضریب بی‌بعد دی‌الکتریک برای الکترولیت است. براساس نظریه کلاسیک لایه دوگانه الکتریکی، مقدار تمرکز یون‌ها به وسیله توزیع تعادل بولتزمن تعریف می‌شود. نسبت بین چگالی بار و مقدار تمرکز یون‌ها به وسیله رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\rho_e = \sum_j Z e n_j \exp\left(\frac{-Z e \psi}{K_B T}\right) \quad (66)$$

که Z جاذبه زامین یون، n_j تمرکز یون زامین گونه، e میزان بار الکترون و K_B ثابت بولتزمن است. با جای‌گذاری معادله ۶۶ در معادله ۶۵ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_j Z e n_j \exp\left(\frac{-Z e \psi}{K_B T}\right) \quad (67)$$

معادله ۶۷ حالت پایدار معادله پواسون است. قسمتی از معادله ۶۷ به صورت $\frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_j Z e n_j \exp\left(\frac{-Z_j e \psi}{K_B T}\right)$ نشان داده می‌شود. چهارچوبی مشابه معادله LBGK برای تابع توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$h_i(\vec{r} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) = h_i(\vec{r}, t) - \frac{1}{\tau_h} [(h_i(\vec{r}, t) - h_i^{eq}(\vec{r}, t)) + (1 - \frac{1}{2\tau_h}) \delta t h_i w_i h_{rhs}] \quad (68)$$

که h_i تابع توزیع پتانسیل الکتریکی بوده و τ_h زمان آسایش برای تابع توزیع پتانسیل الکتریکی است. تابع توزیع تعادل پتانسیلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$h_i^{eq} = w_i \psi, \quad w_i = \begin{cases} 0 \rightarrow i = 0 \\ \frac{1}{6} \rightarrow i = 1 - 4 \\ \frac{1}{12} \rightarrow i = 5 - 8 \end{cases} \quad (69)$$

که ترم $\delta t h_i$ بدین صورت بیان می‌شود:

$$\delta t = \frac{\delta x}{c} \quad (70)$$

و می‌توان آن را با تغییر دادن بازه زمانی کنترل نمود. با این وجود حالت بی‌بعد زمان آسایش در معادله محاسبه پتانسیل الکتریکی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_h = \frac{3\chi \delta t h}{2\delta x^2} + 0.5 \quad (71)$$

که χ ضریب پخش پتانسیل الکتریکی بوده که برای محاسبه در این مطالعه برابر با واحد در نظر گرفته شده است. پتانسیل الکتریکی حالت ماکروسکوپی با استفاده از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\psi = \sum_i (h_i + 0.5 h_{rhs} \delta t h_i w_i) \quad (72)$$

چگالی شار هم با ترکیب معادلات ۶۶ و ۷۲ محاسبه می‌شود. برای شرط مرزی شبکه بولتزمن پتانسیل الکتریکی از روش ارایه شده در

که $\delta t = \frac{\delta x}{c}$ گام زمانی و δx گام مکانی شبکه است. حالت بی‌بعد زمان آسایش $\tau_h^* = \frac{\tau_h}{\delta t} = 3 \frac{\delta t}{\delta x^2} + 0.5$ به صورت $\tau_h^* = \frac{\tau_h}{\delta t} = 3 \frac{\delta t}{\delta x^2} + 0.5$ تعریف می‌شود که τ_h هم ویسکوزیته سینماتیک است.

چگالی و سرعت ماکروسکوپی سیال به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho = \sum_i f_i \quad (56)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_i e_i f_i \quad (57)$$

با اعمال کردن بسط چاپمن- انسکوگ [26]، معادله شبکه بولتزمن می‌تواند معادله ناویر- استوکس را به صورت زیر پوشش دهد:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}_E \quad (58)$$

که p فشار و μ ویسکوزیته دینامیک سیال است. $\vec{f}_E$ بردار نیروی حجمی الکتریکی است که به سیال، وارد و به صورت زیر بیان می‌شود [25]:

$$\vec{F}_E = \vec{F}_{ext} + \rho_e (\vec{E}_{ext} + \vec{\xi} \times \vec{B}_{ext}) + \vec{F}_v \quad (59)$$

که $\vec{F}_{ext}$ نیروی فعال خارجی روی سیال به وسیله میدان نیروی خارجی بوده که شامل نیروی لورنتز ناشی از الکتریسیته و میدان مغناطیسی است. $\vec{F}_v$ نیروی تعادل چگالی است که به سبب جذب درون مولکولی ایجاد می‌شود. اگر تنها میدان الکتریسیته اعمال شود، $\vec{F}_{ext}$ در معادله ۵۹ به شکل $\vec{F}_{ext} = \rho_e \vec{E}_{ext}$ کاهش می‌یابد که $\vec{E}_{ext}$ قدرت میدان الکتریکی خارجی است. بنابراین، نیروی الکتریکی خارجی برای جریان الکتروکینتیک در یک محلول الکترولیت رقیق به شکل زیر است:

$$\vec{F}_E = \rho_e \vec{E}_{ext} - \rho_e \nabla \psi \quad (60)$$

که ψ پتانسیل الکتریکی جریان است که به وسیله حرکت یون‌ها در محلول الکترولیت ایجاد می‌شود و توسط نظریه نرنست- پلانک بیان می‌شود. در ورودی و خروجی با توجه به فرض توسعه یافتگی هیدرودینامیک می‌توان از شرط مرزی متناوب استفاده نمود. در نتیجه شرط مرزی ورودی و خروجی به شکل زیر خواهد بود [27]:

$$\begin{aligned} (f_1)_{x=0} &= (f_1)_{x=L} \\ (f_5)_{x=0} &= (f_5)_{x=L} \\ (f_8)_{x=0} &= (f_8)_{x=L} \end{aligned} \quad (61)$$

خروجی:

$$\begin{aligned} (f_3)_{x=L} &= (f_3)_{x=0} \\ (f_6)_{x=L} &= (f_6)_{x=0} \\ (f_7)_{x=L} &= (f_7)_{x=0} \end{aligned} \quad (62)$$

دیوار پایین:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_4 \\ f_5 &= f_7 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1) \\ f_6 &= f_8 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1) \end{aligned} \quad (63)$$

دیوار بالا:

$$\begin{aligned} f_4 &= f_2 \\ f_7 &= f_5 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1) \\ f_8 &= f_6 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1) \end{aligned} \quad (64)$$

شرط مرزی دیوار بالا:

$$\begin{aligned} g_{top} &= g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_5 + g_6 \\ g_4 &= \frac{w_4}{6} \times (\eta_{wall} - g_{top}) \\ g_7 &= \frac{w_7}{6} \times (\eta_{wall} - g_{top}) \\ g_8 &= \frac{w_8}{6} \times (\eta_{wall} - g_{top}) \end{aligned} \quad (۸۲)$$

شرط مرزی در ورودی:

$$\begin{aligned} g_{in} &= g_0 + g_2 + g_3 + g_4 + g_6 + g_7 \\ g_1 &= \frac{w_1}{6} \times (\eta_{inlet} - g_{in}) \\ g_5 &= \frac{w_5}{6} \times (\eta_{inlet} - g_{in}) \\ g_8 &= \frac{w_8}{6} \times (\eta_{inlet} - g_{in}) \end{aligned} \quad (۸۳)$$

شرط مرزی در خروجی:

$$\begin{aligned} g_3(N, t) &= 2g_3(N-1, t) - g_3(N-2, t) \\ g_6(N, t) &= 2g_6(N-1, t) - g_6(N-2, t) \\ g_7(N, t) &= 2g_7(N-1, t) - g_7(N-2, t) \end{aligned} \quad (۸۴)$$

در خروجی میکروکانال به سبب این که دما مشخص نیست، اما از آن جایی که شرط توسعه یافتگی حرارتی صادق بوده، از شرط برون‌یابی برای این مقطع استفاده شده است.

۳- نتایج

۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش برای اطمینان از صحت نتایج حل عددی تحقیق حاضر، نتایج حل عددی برای پتانسیل سطح و پروفیل دما با نتایج حل تحلیلی وانگ و همکاران [24] شامل پتانسیل سطح و پروفایل دما مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. با توجه به مقایسه نتایج می‌توان مشاهده کرد که نتایج دارای خطای کمی است. در صورتی که جریان توسعه یافته و رابطه $\frac{Ze\zeta}{K_B T} \leq 1$ برقرار باشد، می‌توان از فرض دیبای- هوکل استفاده کرد و برای توزیع پتانسیل الکتریکی حل تحلیلی ارایه نمود. در نمودار ۱، توزیع پتانسیل الکتریکی محاسبه شده از کد و معادله تحلیلی ذکر شده (معادله ۲۳) در دمای ۲۹۸K و غلظت مولار $C_\infty = 10^{-3} \frac{mol}{m^3}$ برای مقادیر مختلف زتای پتانسیل سطح نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، نتایج عددی به دست آمده تطابق خوبی با فرض دیبای- هوکل دارد که نشان دهنده دقت کد نوشته شده است. برای اعتبارسنجی بخش مومنتوم از حل تحلیلی (معادله ۳۶) استفاده شده و همان طور که از نمودار ۲ بر می‌آید، میزان حداکثر خطای این بخش حدود ۳٪ است.

برای اعتبارسنجی بخش دما از پژوهش چاکر/بورتی و روی [12] استفاده شده است که به بررسی جریان الکترواسموتیک در میکروکانال پرداخته‌اند. آنها برای بخش پواسون از فرض دیبای- هوکل و برای بخش مومنتوم از حل تحلیلی استفاده کرده‌اند. آنها در ادامه به اعتبارسنجی حل عددی با حل‌های تحلیلی توزیع دمای بی‌بعد و عدد ناسلت پرداخته‌اند. همان طور که از نمودار ۳ و جدول ۲ مشاهده می‌شود، نتایج عددی به دست آمده برای توزیع دما و ناسلت موضعی تطابق بسیار خوبی با نتایج چاکر/بورتی و روی [12] دارد.

برای بررسی استقلال از شبکه حل عددی مطالعه حاضر، تعداد شبکه‌های ۷۵×۴۵۰، ۱۰۰×۶۰۰، ۱۵۰×۹۰۰ و ۲۰۰×۱۲۰۰ مورد بررسی قرار گرفتند. همان طور که در جدول ۳ می‌توان مشاهده نمود، از شبکه

شرط مرزی دیوار پایین:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_3 + h_4 + h_7 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{6} \\ h_5 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_3 + h_4 + h_7 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \\ h_6 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_3 + h_4 + h_7 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \end{aligned} \quad (۷۳)$$

شرط مرزی دیوار بالا:

$$\begin{aligned} h_4 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_5 + h_6) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{6} \\ h_7 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_5 + h_6) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \\ h_8 &= \frac{3\zeta - 3[(h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_5 + h_6) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \end{aligned} \quad (۷۴)$$

در ورودی و خروجی میکروکانال به سبب این که فرض توسعه یافتگی حاکم بوده، شرط ورودی و خروجی به شکل زیر است.

شرط مرزی ورودی:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{3[(h_3 + h_6 + h_7) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{6} \\ h_5 &= \frac{3[(h_3 + h_6 + h_7) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \\ h_8 &= \frac{3[(h_3 + h_6 + h_7) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \end{aligned} \quad (۷۵)$$

شرط مرزی خروجی:

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{3[(h_1 + h_5 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{6} \\ h_6 &= \frac{3[(h_1 + h_5 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \\ h_7 &= \frac{3[(h_1 + h_5 + h_8) + \sum_{i=0}^8 (0.5h_{rhs}\delta t h w_i)]}{12} \end{aligned} \quad (۷۶)$$

۳-۷-۲- معادله شبکه بولتزمن برای انرژی [25]

معادله انتقال برای حل معادله انرژی به صورت زیر خواهد بود:

$$g_i(\vec{r} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) = g_i(\vec{r}, t) - \frac{1}{\tau_g} [g_i(\vec{r}, t) - g_i^{eq}(\vec{r}, t)] \quad (۷۷)$$

در معادله فوق، g_i تابع توزیع انرژی و τ_g مقدار بی‌بعد زمان آسایش است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_g = \frac{3\alpha}{2\delta t c_s^2} + 0.5 \quad (۷۸)$$

همچنین برای معادله انرژی تابع تعادلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g_{i=0-8}^{eq} = \vec{w}_i \rho [1 + \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2}] \quad (۷۹)$$

در نهایت نحوه محاسبه مقدار ماکروسکوپی دما به صورت زیر است:

$$T = \sum_{i=0}^8 g_i \quad (۸۰)$$

برای شرط مرزی شبکه معادله انرژی از یک مرجع [28] استفاده شده و در دیوار بالا، پایین و ورودی مقدار دما ثابت است.

شرط مرزی دیوار پایین:

$$\begin{aligned} g_{bottom} &= g_0 + g_1 + g_3 + g_4 + g_7 + g_8 \\ g_2 &= \frac{w_2}{6} \times (\eta_{wall} - g_{bottom}) \\ g_5 &= \frac{w_5}{6} \times (\eta_{wall} - g_{bottom}) \\ g_6 &= \frac{w_6}{6} \times (\eta_{wall} - g_{bottom}) \end{aligned} \quad (۸۱)$$

$X = \frac{2x}{H}$	حل عددی	حل تحلیلی [12]	درصد اختلاف نسبی
۰/۲	۱۹/۰۳۱۱۸	۱۹/۰۲۴۰۹	۰/۰۳۷۲۵۶
۰/۴	۱۳/۰۸۸۵۲	۱۲/۸۸۵۵۱	۱/۵۷۵۴۶۶
۰/۸	۱۰/۳۲۲۵۸	۱۰/۲۸۷۷۸	۰/۳۳۸۲۰۱
۱/۲	۹/۷۵۰۱۱۲	۹/۷۴۱۳۹۳	۰/۰۸۹۵
۱/۶	۹/۵۹۹۶۰۳	۹/۵۹۷۲۰۷	۰/۰۲۴۹۵۷

جدول (۳) بررسی استقلال از شبکه برای معادله انرژی (درصد اختلاف عدد ناسلت متوسط)

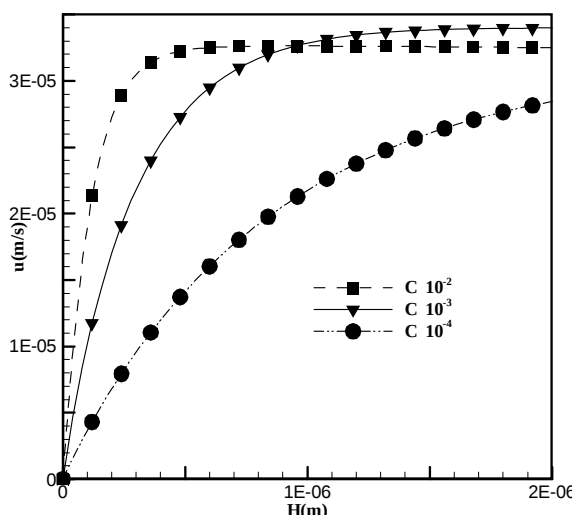
تعداد شبکه	تعداد کل شبکه	مقدار ناسلت متوسط	درصد اختلاف
۷۵	۳۳۷۵۰	۹/۹۹۹	-
۱۰۰	۶۰۰۰	۱۰/۴۱۰۳	۴/۱
۱۵۰	۱۳۵۰۰۰	۱۰/۶۱۴۰۴	۱/۹
۲۰۰	۲۴۰۰۰۰	۱۰/۷۰۸۷	۰/۸

۲-۳- بحث و بررسی نتایج

۲-۲-۳- بررسی اثر غلظت یون‌ها

در این بخش با در نظر گرفتن $E = 1 \frac{KV}{m}$ ، $\zeta = 50mV$ ، $\Gamma = 0/05$ و $\varphi = 3\%$ ، اثر تغییر غلظت یون‌ها روی پروفیل سرعت در جریان الکترواسموتیک بررسی شده است. در نمودار ۴، توزیع سرعت نسبت به ارتفاع بی‌بعد برای غلظت‌های یون مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تغییر غلظت یون‌ها هم سبب دوشاخه‌مانند شدن پروفیل سرعت و هم سهمی شدن آن شده است.

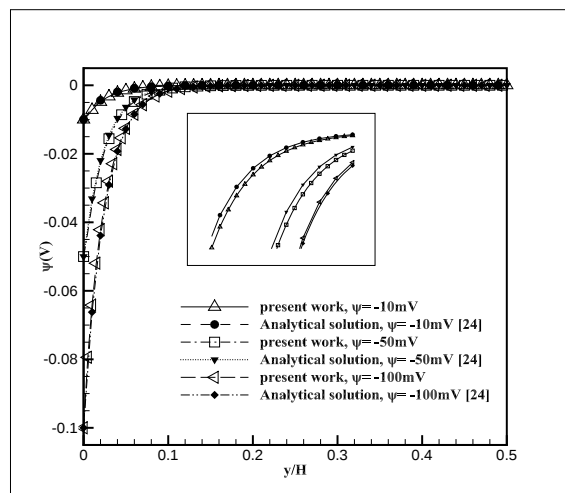
با کاهش میزان غلظت یون‌ها، مقدار چگالی بار الکتریکی کاهش می‌یابد، در نتیجه از میزان نیروی حجمی به سبب میدان الکتریکی کاسته می‌شود. از طرفی کاهش غلظت یون‌ها، ضخامت لایه دوگانه الکتریکی را افزایش می‌دهد که این خود سبب تاثیر بیشتر پتانسیل سطح می‌شود و تقابل این دو اثر سبب رسیدن به بیشینه سرعت میانگین می‌شود. در نتیجه برای مقادیر میدان الکتریکی خارجی و پتانسیل دیواره ثابت، همواره یک مقدار غلظت بهینه برای رسیدن به بیشینه سرعت میانگین وجود دارد.



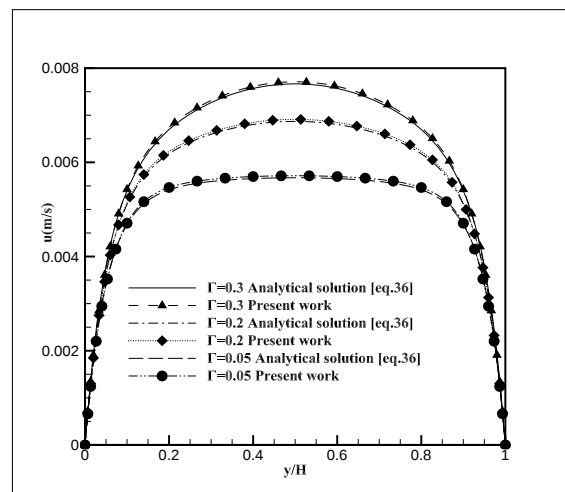
نمودار (۴) تغییرات سرعت بر حسب ارتفاع میکروکانال در غلظت‌های یون مختلف

۲-۲-۳- بررسی جریان با محرک الکتریکی و فشاری متناوب
در این قسمت به بررسی پروفیل سرعت سیال با محرک الکتریکی و

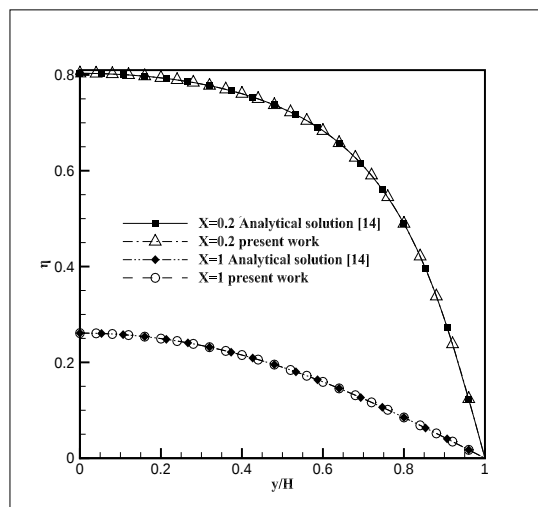
۱۰۰×۶۰۰ به بعد میزان تغییرات درصد اختلاف عدد ناسلت متوسط ناچیز است. در نتیجه در این حل عددی از تعداد شبکه ۱۰۰×۶۰۰ با معیار همگرایی ۱۰^{-۶} استفاده شده است.



نمودار (۱) مقایسه حل تحلیلی (معادله ۲۳) [24] و کار حاضر در پتانسیل سطح‌های مختلف

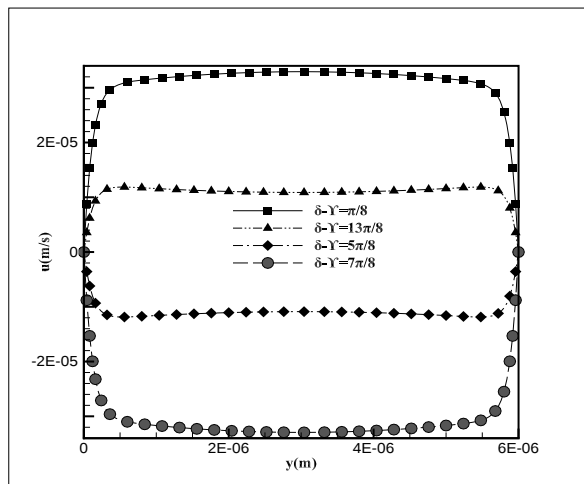


نمودار (۲) مقایسه حل تحلیلی (معادله ۳۶) و کار حاضر در نسبت سرعت‌های مختلف



نمودار (۳) مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی (معادله ۳۹) [12] پروفیل دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال

نتیجه گرفت که با انتخاب زاویه فاز مناسب برای محرک‌های الکتریکی و فشاری می‌توان جهت و اندازه سرعت را کنترل کرد. به نحوی که در زاویه فاز بین صفر تا π ، جهت جریان تغییری نمی‌کند، اما مقدار سرعت جریان کاهش می‌یابد، در صورتی که زاویه فاز بین π تا 2π باشد، علاوه بر تغییر مقدار سرعت، جهت جریان نیز معکوس می‌شود. همچنین اگر برای محرک‌های الکتریکی و فشاری، اختلاف فاز در نظر گرفته شود، علاوه بر تغییر مقدار و جهت جریان، تقعر پروفیل سرعت در وسط میکروکانال نیز دستخوش تغییر می‌شود.



نمودار ۴) جریان با محرک الکترواسمزی و فشاری متناوب- $E = 1 \frac{KV}{m}$, $\varphi = 3\%$ و $C_{\infty} = 10^{-2} \frac{mol}{m^3}$, $\Gamma = 0.1$, $\zeta = 50mV$

۳-۲-۳- بررسی تاثیر غلظت یونی روی عدد ناسلت متوسط

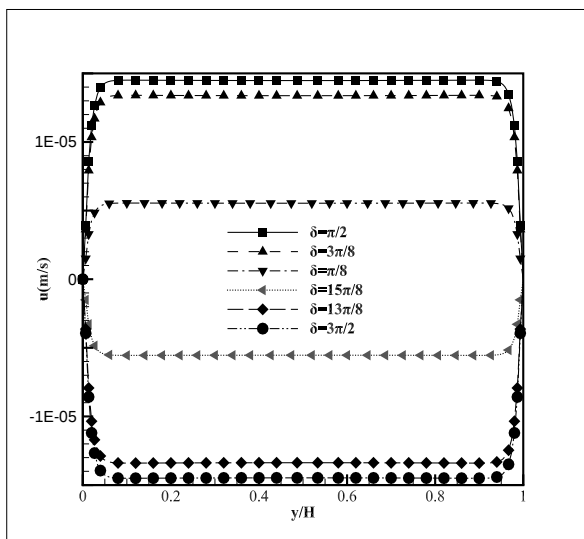
در این قسمت با در نظر گرفتن $E = 1 \frac{KV}{m}$, $\varphi = 3\%$ و $\zeta = 50mV$ ، به بررسی تاثیر غلظت یونی روی پروفیل دمای بی‌بعد پرداخته شده است. در نمودار ۵، تغییرات عدد ناسلت متوسط در غلظت یونی‌های مختلف و نسبت سرعت متفاوت رسم شده است. همان طور که از نمودار بر می‌آید، در نسبت سرعت‌های پایین، قدرت جریان الکترواسموزی بیشتر است، در نتیجه تغییر غلظت تاثیر بیشتری خواهد داشت. اما در نسبت‌های سرعتی بالاتر، پروفیل سرعت به سمت جریان با پروفیل سهموی می‌رود و تاثیر جریان الکترواسموزی کمتر است و در نتیجه غلظت تاثیر کمتری خواهد داشت. به طور مثال زمانی که $\Gamma = 0.05$ باشد، با افزایش غلظت یون از 10^{-4} تا 10^{-2} ، عدد ناسلت متوسط به اندازه ۱۰٪ افزایش می‌یابد، در حالی که اگر $\Gamma = 0/5$ باشد، با همین میزان تغییر غلظت یون، عدد ناسلت متوسط به اندازه ۳٪ افزایش می‌یابد.

۳-۲-۴- بررسی تاثیر کسر حجمی نانوسیال روی عدد ناسلت متوسط

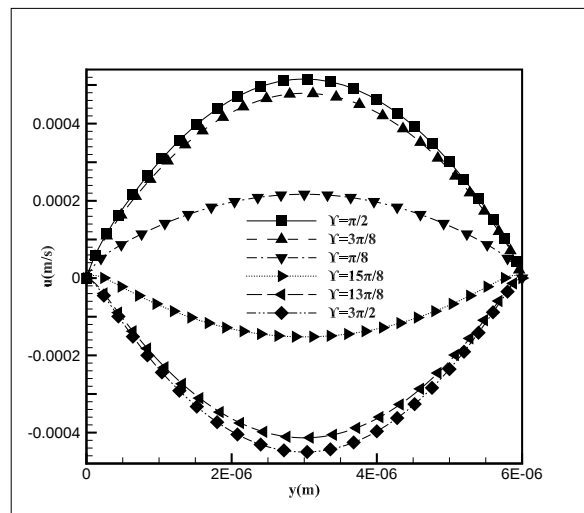
در این قسمت با در نظر گرفتن $E = 1 \frac{KV}{m}$, $\zeta = 50mV$, $\Gamma = 0/05$ و $C_{\infty} = 10^{-2} \frac{mol}{m^3}$ ، به بررسی تاثیر کسر حجمی نانوسیال روی عدد ناسلت متوسط پرداخته شده است. در نمودار ۶، تغییرات عدد ناسلت متوسط در کسر حجمی‌های متفاوت رسم شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود، افزایش کسر حجمی نانوسیال سبب افزایش مقدار عدد ناسلت متوسط می‌شود. دلیل این پدیده این است که با افزایش کسر حجمی، مقدار نانوذرات در واحد حجم سیال پایه بیشتر می‌شود و به دلیل آن که ضریب انتقال حرارت نانوسیال از سیال پایه بیشتر است، موجب افزایش انتقال حرارت می‌شود.

فشاری متناوب پرداخته شده است. در نمودار ۵، تنها محرک الکتریکی اعمال شده است. در این حالت مقدار و جهت این محرک توسط زاویه فاز کنترل می‌شود، به گونه‌ای که می‌توان با زاویه فاز $\gamma = \frac{3\pi}{2}$ ، جهت حرکت جریان را معکوس نمود، اما مقدار سرعت ثابت باقی بماند.

در نمودار ۶، تنها محرک فشاری به صورت متناوب است و محرک الکتریکی به صورت یک مقدار ثابت اعمال می‌شود. با توجه به نمودار، در زاویه فاز $\frac{15\pi}{8}$ که محرک فشاری به سبب زاویه فاز به سمت پایین بوده و محرک الکتریکی به سمت بالا است، در نزدیکی دیواره، نیروی محرک الکتریکی سبب حرکت سیال در خلاف جهت محرک فشاری شده است.

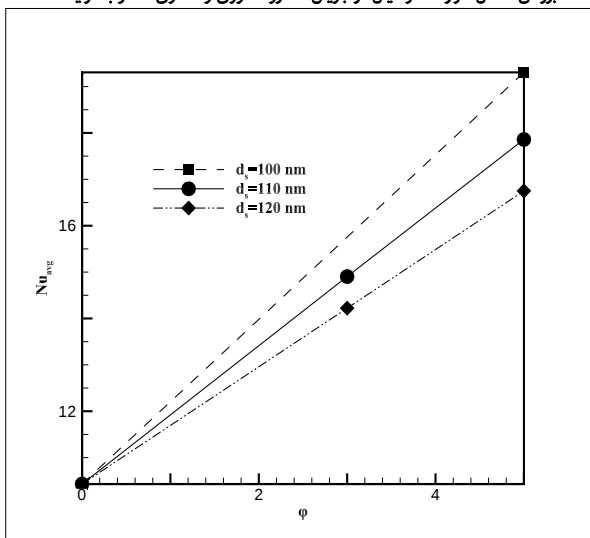


نمودار ۵) تغییرات پروفیل سرعت به ازای محرک‌های الکتریکی متناوب- $E = 1 \frac{KV}{m}$, $\varphi = 3\%$ و $C_{\infty} = 10^{-2} \frac{mol}{m^3}$, $\Gamma = 0.05$, $\zeta = 50mV$

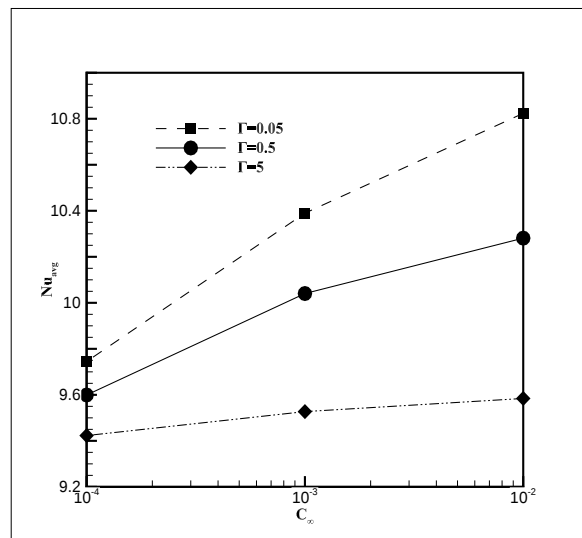


نمودار ۶) تغییرات پروفیل سرعت به ازای محرک‌های فشاری متناوب- $E = 1 \frac{KV}{m}$, $\zeta = 50mV$, $\Gamma = 10$ و $C_{\infty} = 10^{-2} \frac{mol}{m^3}$ و $\varphi = 3\%$

در نمودار ۷، هر دو عامل محرک به صورت متناوب بوده‌اند، اما نسبت به یکدیگر دارای اختلاف فاز هستند. برای مثال در اختلاف فاز صفر، دو محرک یکدیگر را تقویت کرده که سبب ایجاد سرعت بیشینه در این اختلاف فاز شده است. از نمودارهای بالا می‌توان



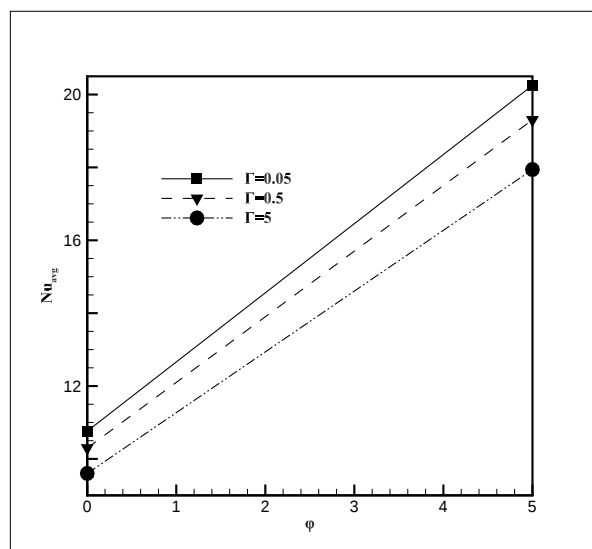
نمودار ۱۰) تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب کسر حجمی در قطره‌های مختلف



نمودار ۸) توزیع عدد ناسلت متوسط بر حسب غلظت یونی در نسبت سرعت‌های مختلف

۴- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، انتقال حرارت جریان نانوسیال با محرک الکترواسمزی و فشاری متناوب در یک میکروکانال افقی با دمای ثابت و پتانسیل سطح مشخص در دیواره‌های بالا و پایین مورد بررسی قرار گرفت. از روش عددی شبکه پواسون- بولتزمن برای به‌دست‌آوردن توزیع پتانسیل، میدان سرعت و دمای سیال استفاده شده است. مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده بدین صورت است که افزایش کسر حجمی نانوذرات سبب کاهش مقدار سرعت در میکروکانال می‌شود. نتایج نشان می‌دهد در $\Gamma = 0.05$ افزایش ۳٪ کسر حجمی نانوذرات منجر به کاهش ۸/۳۳٪ سرعت جریان می‌شود. کاهش غلظت مولاریون‌ها در جریان الکترواسمزی منجر به تغییر پروفیل سرعت به حالت سهموی می‌شود. همچنین برای دستیابی به سرعت بیشینه، یک حالت بهینه برای انتخاب غلظت مولار وجود دارد. در یک میدان الکتریکی، زتای پتانسیل و نسبت سرعت فشاری ثابت، عدد ناسلت متوسط در میکروکانال با افزایش کسر حجمی، قطر نانوذرات و غلظت یونی افزایش می‌یابد، در حالتی که در $\Gamma = 5$ با افزایش غلظت از 10^{-4} تا 10^{-2} ، عدد ناسلت متوسط ۵٪ افزایش می‌یابد.



نمودار ۹) توزیع عدد ناسلت متوسط بر حسب کسر حجمی در نسبت سرعت‌های مختلف

تشکر و قدردانی: نویسندگان از دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه گیلان که امکان انجام این پژوهش را فراهم نمودند کمال قدردانی را می‌نمایند.

تأییدیه اخلاقی: محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج برعهده نویسنده است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با سازمان‌ها و اشخاص ندارد.

سهم نویسندگان: مهدی شیخی‌زاد (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/روشناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ محمد کلتی (نویسنده دوم)، روشناس/پژوهشگر اصلی (۵۰٪)

منابع مالی: منابع مالی خاصی برای انجام این تحقیق استفاده نشده است.

منابع

1- Barkhordari M, Etemad SG. Numerical study of slip

۳-۵- بررسی تاثیر قطر نانوذرات روی عدد ناسلت متوسط

در این قسمت با در نظر گرفتن $\Gamma = 0/5$ ، $\zeta = 50mV$ ، $E = 1 \frac{KV}{m}$ و $C_{\infty} = 10^{-2} \frac{mol}{m^3}$ ، به بررسی تاثیر قطر نانوذرات روی عدد ناسلت متوسط پرداخته شده است. همان گونه که در نمودار ۱۰ مشاهده می‌شود، در قطر نانوذرات ثابت، میزان عدد ناسلت متوسط با افزایش کسر حجمی افزایش می‌یابد. اما در یک کسر حجمی ثابت، کاهش قطر نانوذرات سبب افزایش عدد ناسلت متوسط شده است. دلیل این پدیده آن است که با کم‌تر شدن قطر نانوذرات، پراکندگی این ذرات در سیال پایه، بهتر و در نتیجه نانوسیال به‌دست‌آمده همگن‌تر خواهد بود که خود این موضوع سبب انتقال حرارت بهتر می‌شود. همچنین در صورتی که قطر نانوذرات کمتر باشد، میزان حرکت براونی آنها بیشتر می‌شود که آن هم به انتقال حرارت بیشتر کمک می‌کند. برای مثال در صورتی که کسر حجمی از صفر تا ۵٪ تغییر کند، عدد ناسلت متوسط برای قطر نانوذرات ۱۰۰، ۱۱۰ و ۱۲۰ به ترتیب ۴۵، ۳۵ و ۲۵٪ افزایش پیدا می‌کند.

- effect of magnetic field. *Chemical Engineering Science*. 2015;126:10-21.
- 15- Misra JC, Sinha A. Electro-osmotic flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid in a hydrophobic microchannel with Navier slip. *Journal of Hydrodynamics*. 2015;27(5):647-657.
 - 16- Shit GC, Mondal A, Sinha A, Kundu PK. Effects of slip velocity on rotating electro-osmotic flow in a slowly varying micro-channel. *Colloids and Surfaces A Physicochemical and Engineering Aspects*. 2016;489:249-255.
 - 17- Tan Z, Liu J. Electro-osmotic flow of Eyring fluids in a circular microtube with Navier's slip boundary condition. *Physics Letters A*. 2017;381(32):2573-2577.
 - 18- Bag N, Bhattacharyya S. Electroosmotic flow of a non-Newtonian fluid in a microchannel with heterogeneous surface potential. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2018;259:48-60.
 - 19- Kamali R, Nasiri Soloklou M, Hadidi H. Numerical simulation of electroosmotic flow in rough microchannels using the lattice Poisson-Nernst-Planck methods. *Chemical Physics*. 2018;507:1-9.
 - 20- Aminossadati SM, Raisi A, Ghasemi B. Effects of magnetic field on nanofluid forced convection in a partially heated microchannel. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011;46(10):1373-1382.
 - 21- Brinkman HC. The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*. 1952;20(4):571.
 - 22- Patel HE, Sundararajan T, Pradeep T, Dasgupta A, Dasgupta N, Das SK. A micro-convection model for thermal conductivity of nanofluids. *Pramana*. 2005;65(5):863-869.
 - 23- Doyle WT, Jacobs IS. Effective cluster model of dielectric enhancement in metal-insulator composites. *Physical Review B*. 1990;42(15):9319-9327.
 - 24- Wang J, Wang M, Li Z. Lattice Poisson-Boltzmann simulations of electro-osmotic flows in microchannels. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2006;296(2):729-736.
 - 25- Wolf-Gladrow DA. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: An introduction. 2nd Edition. Berlin: Springer; 2004.
 - 26- Zou Q, He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*. 1997;9(6):1591-1598.
 - 27- Mohamad AA. Lattice Boltzmann method: Fundamentals and engineering applications with computer codes. 1st Edition. Berlin: Springer; 2011.
 - 28- Masliyah JH, Bhattacharjee S. Numerical simulation of electrokinetic phenomena. In: Masliyah JH, Bhattacharjee S. *Electrokinetic and colloid transport phenomena*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2006. pp. 537-611.
 - flow heat transfer of non-Newtonian fluids in circular microchannels. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2007;28(5):1027-1033.
 - 2- Tuckerman DB, Pease RFW. High-performance heat sinking for VLSI. *IEEE Electron Device Letters*. 1981;2(5):126-129.
 - 3- Santra AK, Sen S, Chakraborty N. Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates. *International Journal of Thermal Sciences*. 2009;48(2):391-400.
 - 4- Raisi A, Ghasemi B, Aminossadati SM. A numerical study on the forced convection of laminar nanofluid in a microchannel with both slip and no-slip conditions. *Numerical Heat Transfer Part A Applications*. 2011;59(2):114-129.
 - 5- Maynes D, Webb BW. Fully developed electro-osmotic heat transfer in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003;46(8):1359-1369.
 - 6- Horiuchi K, Dutta P. Joule heating effects in electroosmotically driven microchannel flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004;47(14-16):3085-3095.
 - 7- Park HM, Lee JS, Kim TW. Comparison of the Nernst-Planck model and the Poisson-Boltzmann model for electroosmotic flows in microchannels. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2007;315(2):731-739.
 - 8- Chai Z, Shi B. Simulation of electro-osmotic flow in microchannel with lattice Boltzmann method. *Physics Letters A*. 2007;364(3-4):183-188.
 - 9- Alizadeh A, Wang JK, Pooyan S, Mirbozorgi SA, Wang M. Numerical study of active control of mixing in electro-osmotic flows by temperature difference using lattice Boltzmann methods. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2013;407:546-555.
 - 10- Mohammadipoor OR, Niazmand H, Mirbozorgi SA. Numerical simulation of electroosmotic flow in flat microchannels with lattice Boltzmann method. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014;39(2):1291-1302.
 - 11- Lin TY, Chen CL. Analysis of electroosmotic flow with periodic electric and pressure fields via the lattice Poisson-Boltzmann method. *Applied Mathematical Modelling*. 2013;37(5):2816-2829.
 - 12- Chakraborty S, Roy S. Thermally developing electroosmotic transport of nanofluids in microchannels. *Microfluidics and Nanofluidics*. 2008;4(6):501-511.
 - 13- Sarkar S, Ganguly S. Fully developed thermal transport in combined pressure and electroosmotically driven flow of nanofluid in a microchannel under the effect of a magnetic field. *Microfluidics and Nanofluidics*. 2015;18(4):623-636.
 - 14- Ganguly S, Sarkar S, Hota TK, Mishra M. Thermally developing combined electroosmotic and pressure-driven flow of nanofluids in a microchannel under the