

Discrete Adaptive Sliding Mode Control of an Omnidirectional Mobile Robot Using Time Delay Control Method

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Mohammadpour O.^{*1} PhD,
Ahmadi R.¹ PhD

How to cite this article

Mohammadpour O, Ahmadi R. Discrete Adaptive Sliding Mode Control of an Omnidirectional Mobile Robot Using Time Delay Control Method. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(2):491-504.

ABSTRACT

In this paper, a robust discrete control law is presented, using time delay control method for an omnidirectional mobile robot in the presence of system uncertainties. Although time delay control method has attracted the great attention of researchers due to its structure simplicity, the major part of these research have been performed by the assumption of continuous time delay control and infinitesimal time delay that is in contradict of physical nature of digital devices, as implementation tools of time delay controllers, which have finite and specific sample time. Also, the discretization of continuous-time systems has been usually done by Euler estimation method, which has sufficient accuracy for infinitesimal sample times. So, in this paper, after modeling the robot, considering the dynamics of robot motors, a new method for more accurate discretization of continuous nonlinear systems is presented and, then, a robust discrete control law is designed, using the backstepping technique at the voltage level of the robot motors. In the design of control law, a new adaptive sliding mode method is used to overcome the system uncertainties and stability of the closed-loop system is proved by error convergence to a small neighborhood of zero. The proposed controller is designed in the discrete domain without the necessity of being known the bound of system uncertainties and simulation results represent the desired performance of the controller in trajectory tracking.

Keywords Adaptive Sliding Mode Discrete Control; Time Delay Control; Omnidirectional Mobile Robot

¹Mechanical Engineering Department, Payame Noor University, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Nakhil Street, Lashkarak Highway, Tehran, Iran.
Phone: +98 (21) 23320000
Fax: +98 (21) 22441511
mohammadpour@pnu.ac.ir

Article History

Received: April 19, 2018
Accepted: October 27, 2018
ePublished: February 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Robust nonlinear speed control of PM ... [2] Adaptive second-order sliding mode ... [3] Continuous sliding mode ... [4] Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear ... [5] Design and implementation of a fuzzy sliding mode ... [6] Neural network-based sliding mode adaptive control ... [7] A new adaptive sliding-mode control scheme for application ... [8] A new technique for robust control of ... [9] Input/output linearization using ... [10] A time delay controller for systems with ... [11] Robust independent joint controller design for industrial ... [12] Discrete-time second order sliding mode with time delay ... [13] A straight-line motion tracking control of hydraulic ... [14] A reduced order time-delay control for highly simplified ... [15] A simple and robust digital current control technique of a PM ... [16] Robust time-delay control for the DC-DC ... [17] Discretisation method and stability criteria for non-linear ... [18] Analysis of linear time invariant systems ... [19] Corrections for discretisation method and stability criteria ... [20] Feedback control of an omnidirectional autonomous ... [21] Dynamic modeling and optimal adaptive robust ... [22] Smooth switching robust adaptive control for omnidirectional ... [23] Advanced discrete-time control ... [24] Control of discrete-event systems: Automata ... [25] Model-based PI-fuzzy control of four-wheeled omni-directional ... [26] A discrete-time stable controller for an omni-directional ... [27] Discrete-time control of an omnidirectional mobile ... [28] Software based modeling, simulation and fuzzy control ... [29] Design and implementation of model-predictive control with friction ... [30] Discretization and continualization ... [31] Analytical ... [32] Dynamics of double pendulum with parametric ... [33] On the stability of discrete-time sliding ... [34] Synthesized sliding mode and time-delay control ...

کنترل مود لغزش تطبیقی گسسته یک ربات سیار همه‌جته با استفاده از روش کنترل تاخیر زمانی

امید محمدپور* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

رضا احمدی PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، قانون کنترل گسسته مقاومی با روش کنترل تاخیر زمانی برای یک ربات سیار همه‌جته در حضور نامعینی‌های سیستم ارایه می‌شود. اگرچه روش کنترل تاخیر زمانی به دلیل سادگی ساختار مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است اما عمده این تحقیقات با فرض کنترل تاخیر زمانی پیوسته و زمان تاخیر بی‌نهایت کوچک انجام شده که با ماهیت فیزیکی دستگاه‌های دیجیتال به عنوان ابزار پیاده‌سازی کنترل‌های تاخیر زمانی که زمان نمونه‌برداری مشخص و محدودی دارند در تناقض است. همچنین گسسته‌سازی سیستم‌های پیوسته عمدتاً با روش تخمین اویلر انجام شده که برای مقادیر بسیار کوچک زمان نمونه‌برداری دارای دقت کافی است. لذا در این مقاله پس از مدل‌سازی ربات با در نظر گرفتن دینامیک موتورهای ربات روش جدیدی برای گسسته‌سازی دقیق‌تر سیستم‌های پیوسته غیرخطی ارایه شده و سپس یک قانون کنترل گسسته مقاوم با استفاده از روش بازگشت به عقب در سطح ولتاژ موتورهای ربات طراحی می‌شود. در طراحی قانون کنترل از یک روش جدید مود لغزش تطبیقی برای غلبه بر نامعینی‌های سیستم استفاده شده و پایداری سیستم حلقه بسته در همگرایی خطا به یک همسایگی دلخواه صفر اثبات می‌شود. کنترلر پیشنهادی در حوزه گسسته بدون نیاز به معلوم‌بودن کران نامعینی‌های سیستم طراحی شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده عملکرد مطلوب کنترلر در ردیابی مسیر مرجع هستند.

کلیدواژه‌ها: کنترل گسسته مود لغزش تطبیقی، کنترل تاخیر زمانی، ربات سیار همه‌جته

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۱/۳۰

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۰۵

*نویسنده مسئول: mohammadpour@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر کنترل مود لغزشی به دلیل ماهیت مقاوم خود نسبت به نامعینی‌های سیستم و اغتشاشات خارجی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [1, 2]. برای حصول عملکرد مقاوم کنترل مود لغزشی، ضرایب بهره آن باید بزرگ‌تر از کران بالای نامعینی‌های سیستم در نظر گرفته شود. لیکن مقدار این کران بالا در کاربردهای واقعی معلوم نیست. بنابراین ضرایب بهره کنترل مود لغزشی را به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنند تا محدوده بزرگی از نامعینی‌های سیستم را پوشش دهد. این امر موجب بروز پدیده لرزش می‌شود که مشکل اصلی کنترل مود لغزشی است [3]. برای حذف اثر لرزش، روش‌های مختلفی مانند استفاده از توابع پیوسته مانند تابع اشباع یا تانژانت هائپربولیک به جای تابع علامت [1]، مود لغزشی بر مبنای رویتگر [4] و ترکیب کنترل مود لغزشی با کنترل‌های هوشمند [5, 6] توسعه پیدا کردند. اما در این روش‌ها نیاز به معلوم‌بودن کران بالای نامعینی‌های سیستم است. بنابراین کنترل‌های مود لغزشی تطبیقی توسعه پیدا کردند که در آنها نیازی به معلوم‌بودن کران بالای نامعینی‌های سیستم نیست [2]. لیکن در این تحقیقات نیز عمدتاً یک مصالحه بین کاهش لرزش و کیفیت ردیابی مسیر مرجع وجود دارد و با کاهش لرزش، کیفیت ردیابی مسیر نیز کاهش می‌یابد [2]. اگرچه یک کنترلر مود لغزشی تطبیقی برای سیستم‌های پیوسته توسعه پیدا کرده است که در آن با کاهش لرزش، خطای ردیابی افزایش نمی‌یابد [7]، لیکن این پژوهش که از روش کنترل تاخیر زمانی (TDC) استفاده نموده، دارای اشکالاتی

بوده که در اغلب روش‌های مبتنی بر TDC وجود داشته است و در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

در این تحقیق یک کنترلر مود لغزشی تطبیقی گسسته براساس روش TDC ارایه می‌شود که در آن بدون نیاز به معلوم‌بودن کران بالای نامعینی‌های سیستم، ردیابی مطلوب مسیر با لرزش پایین انجام می‌شود. TDC، یک روش کنترلی است که در آن از سیگنال‌های زمان‌های گذشته برخی از متغیرهای سیستم برای تخمین و جبران نامعینی‌های سیستم مانند دینامیک‌های مدل‌نشده، تغییرات پارامترها و اغتشاشات خارجی استفاده می‌شود. با توجه به کارایی روش تخمین زمان گذشته، کنترل‌های تاخیر زمانی بر خلاف ساختار ساده آنها، عملکرد مقاوم خوبی از خود نشان می‌دهند [8-10].

کنترلر TDC از زمان معرفی تاکنون در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی به صورت موفقیت‌آمیز پیاده‌سازی شده است. از جمله می‌توان به کنترل موقعیت ربات‌ها [7, 11, 12]، کنترل بیل مکانیکی [13]، کنترل موتورهای DC و موتورهای مغناطیس دائم [14, 15] و کنترل ولتاژ خروجی خازن‌های مبدل [16] اشاره نمود. اگرچه تحقیقات زیادی در حوزه TDC صورت گرفته است، ولی عمدتاً این تحقیقات دارای سه اشکال مهم زیر هستند:

۱- استفاده از روش TDC پیوسته با زمان: کنترلر TDC به دلیل استفاده از سیگنال‌های زمان گذشته، امکان پیاده‌سازی روی سیستم‌های آنالوگ را ندارد [17] و حتی اگر در حوزه پیوسته با زمان طراحی شده باشد، روی سیستم‌های واقعی به شکل گسسته با زمان پیاده‌سازی شده است، لذا باید در طراحی نیز سیستم را گسسته‌سازی نمود.

۲- استفاده از فرض "به اندازه کافی کوچک بودن زمان تاخیر": عمده مطالعات انجام‌شده در حوزه روش TDC با فرض این که زمان تاخیر به اندازه کافی کوچک باشد، اقدام به طراحی کنترلر و اثبات پایداری نموده‌اند. لیکن کوچک‌ترین مقدار زمان تاخیر در تجهیزات دیجیتال برابر با زمان نمونه‌برداری بوده که مقدار ثابتی است و نمی‌تواند بی‌نهایت کوچک باشد.

۳- اثبات پایداری: اگرچه در روش TDC، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان براساس معیار پایداری نایکوئیست ارایه شده است [18]، برای سیستم‌های غیرخطی، اثبات پایداری سیستم عمدتاً مبتنی بر این شرط کافی بوده که $\|I - B(x)\bar{B}\| < 1$ است و در آن $B(x)$ ماتریس ورودی سیستم و $\bar{B}$ ماتریس ثابت کنترلر TDC است. این شرط توسط جانگ و همکاران با ارایه مثال نقض رد شد [17]. تنها تحقیقی که بدون سه اشکال فوق در حوزه TDC توسط نویسندگان این مطالعه مشاهده شده [17, 19]، نیز دارای سه محدودیت زیر است:

۱- یافتن $\bar{g}$ که همان ماتریس ثابت کنترلر TDC، به خصوص در سیستم‌های چندمتغیره سخت است و اساساً هیچ گونه اثباتی برای وجود $\bar{g}$ با فرض برقراری شرط کافی ارایه‌شده برای پایداری سیستم ارایه نشده است.

۲- با توجه به این که در این تحقیق، ماتریس $C(k-1)$ در حالت کلی تابعی از ورودی سیستم نیز هست، شرط کافی ارایه‌شده در حالت کلی قابل حل نیست. در واقع روش فوق عملاً زمانی قابل استفاده است که $C(k-1)$ تابعی از ورودی نباشد و این نیز وقتی امکان دارد که همانند مثال ارایه‌شده در آن تحقیق، ماتریس ورودی ثابت باشد.

۳- هیچ گونه نامعینی و اغتشاشی برای سیستم در نظر گرفته

۲- مدل‌سازی ربات

در این بخش مدل سینماتیک و دینامیک ربات سیار همه‌جهته ارائه می‌شود. به همین منظور فرض می‌شود که مرکز ثقل ربات بر مرکز هندسی آن در نقطه P منطبق است. همچنین دینامیک موتورهای الکتریکی جریان مستقیم (DC) به‌عنوان عملگرهای ربات در معادلات سیستم لحاظ می‌شوند.

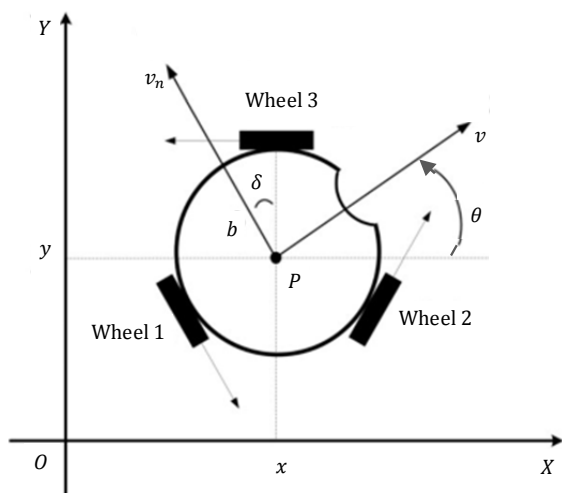
۲-۱- مدل‌سازی سینماتیک

معادلات سینماتیک ربات براساس هندسه آن که در شکل ۱ نشان داده شده، به‌صورت رابطه ۱ است. براساس شکل ۱، در ربات از چرخ‌های استاندارد که زاویه بین بدنه ربات و چرخ حین حرکت ثابت بوده، استفاده شده است و در واقع نوع پیکره‌بندی چرخ‌های ربات امکان حرکت آن را در تمام جهات فراهم می‌کند.

$$\dot{q}(t) = R_\theta(q(t))\xi(t) \quad (1)$$

که در آن $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ بردار مختصات مرکز ثقل ربات در دستگاه ثابت XY است و $\xi(t) = [v(t) \ v_n(t) \ \omega(t)]^T$ بیانگر بردار سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات در دستگاه متصل به بدنه ربات است. همچنین $R_\theta(q(t))$ ماتریس دوران متعامد بوده که دستگاه مختصات ثابت و دستگاه مختصات متصل به بدنه ربات را به یکدیگر منتقل کرده است و به‌صورت رابطه ۲ تعریف می‌شود.

$$R_\theta(q(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$



شکل ۱) ربات سیار همه‌جهته [29]

۲-۲- مدل‌سازی دینامیک

در این بخش مدل دینامیک یک ربات سیار همه‌جهته سه‌چرخ ارائه می‌شود. به همین منظور نیروی اصطکاک به‌صورت ترکیبی از اصطکاک کولمب و لزج مدل شده است. بنابراین با توجه دستگاه مختصات ارائه‌شده در شکل ۱ و معادلات حرکت نیوتن-اویلر، معادلات دینامیک سیستم به‌صورت رابطه ۳ خواهند بود [29].

$$M\ddot{\xi}(t) = N_1\dot{\xi}(t) + N_2\text{sign}(\dot{\xi}(t)) + N_3\tau(t) \quad (3)$$

نشده و لذا مقاوم‌بودن کنترلر در حضور نامعینی‌های سیستم اثبات نشده است.

در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای در حوزه کاربرد روش‌های کنترل پیشرفته برای ربات‌های سیار صورت گرفته است. میان انواع گوناگون ربات‌های سیار، ربات‌های سیار همه‌جهته به‌دلیل قابلیت حرکت در تمام جهات از اهمیت بالایی برخوردار هستند. این نوع از ربات‌ها بدون نیاز به دوران حول خودشان می‌توانند در هر جهتی حرکت کنند و لذا مانورپذیری بالاتری نسبت به ربات‌های غیرهولونومیک دارند [20].

در حوزه کنترل ربات‌های سیار همه‌جهته تحقیقات زیادی صورت گرفته است. طراحی یک کنترلر مود لغزشی تطبیقی برای ربات سیار همه‌جهته با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی هارمونی در حضور نامعینی‌های سیستم و اغتشاشات خارجی [21] و طراحی یک کنترلر چندبخشی در حضور نامعینی‌های ساختاری و غیرساختاری برای این ربات ارائه شده است [22]. در این تحقیقات قانون کنترل برای سیستم پیوسته با زمان (آنالوگ) طراحی شده است. این در حالی است که سنسورها عمدتاً به‌صورت دیجیتال با زمان نمونه‌برداری محدود کار می‌کنند و لذا طراحی کنترلرهای گسسته مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت [23, 24].

براساس مشاهدات نویسندگان این تحقیق، در حوزه کنترل گسسته ربات‌های سیار همه‌جهته تحقیقات محدودی صورت گرفته است. معرفی یک کنترلر طراحی مسیر PI-فازی روی مدل دینامیک خطی گسسته ربات سیار همه‌جهته به‌منظور یافتن ورودی‌های بهینه براساس روش همپلتون توسط هاشمی و همکاران پیاده‌سازی شده است [25]. در این تحقیق گشتاور موتورهای ربات به‌عنوان ورودی سیستم بوده و دینامیک سیستم خطی‌سازی شده است. طراحی یک کنترلر فازی تطبیقی روی مدل سینماتیک گسسته ربات سیار همه‌جهته با استفاده از بسط تیلور مرتبه دوم سیستم به‌منظور ردیابی مسیر مرجع انجام شده است [26]. طراحی کنترلر گسسته با زمان ربات سیار همه‌جهته با وجود تاخیر زمانی در ورودی سیستم با استفاده از خطی‌سازی فیدبک انجام شده است [27]. این مطالعه در سطح سینماتیک با ورودی سرعت‌های ربات انجام شده و نامعینی‌های سیستم لحاظ نشده است. طراحی یک کنترلر فازی غیرمبتنی بر مدل برای ربات سیار همه‌جهته مکنام که ساختار چرخ‌های آن پیچیده بوده، توسط جمالی و همکاران به‌منظور ردیابی مسیر هندسی انجام شده است [28]. در این تحقیق ورودی ربات گشتاور چرخ‌های آن بوده و اثبات پایداری انجام نشده است. بنابراین براساس مشاهدات نویسندگان تاکنون هیچ تحقیقی در خصوص کنترل ولتاژ مقاوم گسسته ربات سیار همه‌جهته انجام نشده است. از این رو نوآوری‌های این مقاله عبارت از موارد زیر هستند:

۱- طراحی کنترلر ولتاژ مقاوم گسسته ربات سیار همه‌جهته در حضور نامعینی‌های سیستم بدون نیاز به معلوم‌بودن کران نامعینی‌ها با کاهش لرزش

ب) عدم استفاده از فرض "به اندازه کافی کوچک بودن زمان تاخیر" در طراحی قانون کنترل و اثبات پایداری سیستم

ج) ارائه یک شرط کافی برای کران‌داربودن سیگنال تاخیر زمانی ساختار این تحقیق بدین ترتیب است که در بخش ۲ مدل‌سازی ربات با در نظر گرفتن دینامیک موتورهای ربات ارائه می‌شود. در بخش ۳ روشی برای گسسته‌سازی سیستم‌های پیوسته غیرخطی ارائه و طراحی قانون کنترل با روش بازگشت به عقب در بخش ۴ انجام می‌شود. ارائه نتایج شبیه‌سازی سیستم نیز در بخش ۵

$$\begin{aligned}
 A_1 &= M^{-1}N_1 = -diag(B_v/m, B_{v_n}/m, B_\omega/I) \\
 A_2 &= M^{-1}N_2 = -diag(C_v/m, C_{v_n}/m, C_\omega/I) \\
 B &= M^{-1}N_3 \\
 G &= lK_t L^{-1} = diag(l_1 K_{t_1}/L_1, l_2 K_{t_2}/L_2, l_3 K_{t_3}/L_3) \\
 D_1 &= L^{-1}R = -diag(R_1/L_1, R_2/L_2, R_3/L_3) \\
 D_2 &= -GK_v P^{-1}
 \end{aligned} \quad (۸)$$

تذکر ۱: با توجه به این که ماتریس‌های M ، P و L معکوس‌پذیرند، کلیه ماتریس‌های رابطه ۸ قابل تعریف است و معکوس‌پذیرند.

۳- گسسته‌سازی سیستم‌های پیوسته

روش مرسوم برای گسسته‌سازی سیستم‌های پیوسته، استفاده از تخمین اوایلر است که در آن مشتق یک سیگنال به صورت یکی از روابط ۹ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(kT) &\cong (x(kT+T) - x(kT))/T \quad \text{یا} \\
 \dot{x}(kT) &\cong (x(kT) - x(kT-T))/T \quad \text{تخمین رو به عقب اوایلر}
 \end{aligned} \quad (۹)$$

در این تخمین در واقع دینامیک سیستم بین دو زمان نمونه‌برداری متوالی با کمک بسط تیلور مرتبه صفر سیستم خطی‌سازی شده است و لذا دقت این تخمین به‌ویژه در سیستم‌های با دینامیک سریع، کافی نیست. در این بخش روش جدیدی برای گسسته‌سازی دقیق‌تر سیستم‌های پیوسته غیرخطی ارائه خواهد شد. لم ۱: زیرسیستم غیرخطی ۱۰ را در نظر بگیرید که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ است.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), z(t), u(t)) \quad (۱۰)$$

که در آن $u(t)$ بیانگر ورودی زیرسیستم و $z(t)$ برداری شامل سایر متغیرهای حالت سیستم اصلی است. در صورتی که مشتق f نسبت به x موجود باشد، آن گاه می‌توان زیرسیستم ۱۰ را به صورت زیر به شکل گسسته بیان نمود.

$$x(k+1) = x(k) + E(k)f(x(k), z(k), u(k)) \quad (۱۱)$$

که در آن موارد به صورت زیر هستند:

$$E(k) = \int_0^T \exp[F'(x(k), z(k), u(k))t] dt \quad (۱۲)$$

$$[F'(\cdot)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot); \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

که منظور از $[F'(\cdot)]_{ij}$ ، درایه سطر i ، ستون j ماتریس F' است.

اثبات: به پیوست مراجعه شود.

تذکر ۲: اگر تابع ماتریسی $(F'(x(k), z(k), u(k)))$ که به اختصار به شکل $F'(k)$ نوشته شده است، معکوس‌پذیر باشد، آن گاه:

$$E(k) = [\exp[F'(k)T] - I_n](F'(k))^{-1} \quad (۱۳)$$

تذکر ۳: $E(k)$ در حالت کلی به شکل رابطه ۱۴ قابل بازنویسی است.

$$E(k) = T \left[I_n + \frac{T}{2!} F'(k) + \frac{T^2}{3!} (F'(k))^2 + \frac{T^3}{4!} (F'(k))^3 + \dots \right] \quad (۱۴)$$

که در آن $M = diag(m, m, I)$ ماتریس اینرسی ربات شامل جرم ربات و ممان اینرسی آن حول مرکز ثقل، $N_1 = -diag(B_v, B_{v_n}, B_\omega)$ و $N_2 = -diag(C_v, C_{v_n}, C_\omega)$ به ترتیب ضریب اصطکاک لزج و اندازه نیروی اصطکاک کولمب در جهت‌های v ، v_n و ω بوده و $\tau = [sign(\xi_1(t)) \ sign(\xi_2(t)) \ sign(\xi_3(t))]^T$ بردار گشتاور وارد بر چرخ‌ها است. نیروی اصطکاک کولمب برای مدل‌سازی نیروی اصطکاک بین چرخ‌های ربات، سطح زمین و اصطکاک لزج برای مدل‌سازی نیروی اصطکاک ناشی از لزجت روان‌سازهای موجود در محورها مورد استفاده قرار گرفته و نهایتاً ترکیب این نیروها در دستگاه مختصات (محلی) متصل به بدنه ربات بیان شده و ضرایب آن تخمین زده شده است [29]. همچنین ماتریس ورودی سیستم به صورت رابطه ۴ است.

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos(\delta)}{r_2} & -\frac{\cos(\delta)}{r_3} \\ -\frac{1}{r_1} & \frac{\sin(\delta)}{r_2} & \frac{\sin(\delta)}{r_3} \\ \frac{b}{r_1} & \frac{b}{r_2} & \frac{b}{r_3} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که در آن b فاصله بین مرکز ثقل ربات و چرخ‌ها و r_i شعاع چرخ i ام است.

دینامیک موتورهای DC نیز به شکل رابطه ۵ خواهند بود [29].

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_v \omega_m(t) \quad (۵)$$

$$\tau(t) = lK_t i(t)$$

که u بیانگر بردار ولتاژ موتورها، i بردار جریان موتورها، L ماتریس اندوکتانس موتورها، l ماتریس نسبت گیربکس موتورها، R ماتریس اندوکتانس موتورها، K_v ماتریس ثابت emf موتورها، K_t ماتریس ثابت‌های گشتاور موتورها و ω_m بردار سرعت زاویه‌ای روتورها هستند. ω_m به شکل رابطه ۶ با سرعت‌های ربات ارتباط دارد [29].

$$\xi(t) = P \omega_m(t),$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & r_2 \sqrt{3} & -r_3 \sqrt{3} \\ 2r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{r_1}{b} & \frac{r_2}{b} & \frac{r_3}{b} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

لازم به ذکر است که τ در رابطه ۵، گشتاور وارد بر روتور است. لیکن با صرف نظر از مقادیر ممان اینرسی روتور و ضریب اصطکاک لزج محور موتور (که معمولاً مقادیر بسیار کوچکی هستند)، می‌توان فرض کرد که گشتاور τ به چرخ‌ها منتقل می‌شود. بنابراین با استفاده از روابط ۶-۳، معادلات حرکت ربات سیار همه‌جهته در شکل فضای حالت به صورت رابطه ۷ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = R_\theta(q(t))\xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = A_1 \xi(t) + A_2 \text{sign}(\xi(t)) + B\tau(t) \\ \dot{\tau}(t) = D_1 \tau(t) + D_2 \xi(t) + Gu(t) \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن موارد به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} E_q(k+2) &= T \left[I_3 + \frac{T}{2} F'_q(k+2) \right] E_\xi(k+1) \\ &= [\exp(F'_\xi(k+1)T) \\ &\quad - I_n] (F'_\xi(k+1))^{-1} E_\tau \\ &= [\exp(D_1 T) - I_n] (D_1)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

که:

$$\begin{aligned} F'_q(\cdot) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\xi_1(\cdot) \sin \theta(\cdot) - \xi_2(\cdot) \cos \theta(\cdot) \\ 0 & 0 & \xi_1(\cdot) \cos \theta(\cdot) - \xi_2(\cdot) \sin \theta(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F'_\xi(\cdot) &= A_1 + A_2 \text{sign}'(\xi(\cdot)) \end{aligned} \quad (20)$$

لازم به ذکر بوده که تابع علامت $\text{sign}(\cdot)$ به صورت رابطه ۲۱ در نظر گرفته شده است تا مشتق پذیر باشد.

$$\text{sign}(x) = \tanh(\mu x); \quad \mu \gg 1 \quad (21)$$

بنابراین تابع ماتریسی $\text{sign}'(x)$ در رابطه ۲۰ به صورت رابطه ۲۲ است.

$$\begin{aligned} \text{sign}'(x) &= \mu \cdot \text{diag}[1 - (\tanh(\mu x_1))^2, \\ &1 - (\tanh(\mu x_2))^2, 1 - (\tanh(\mu x_3))^2] \end{aligned} \quad (22)$$

تذکر ۶: تابع ماتریسی $F'_q(\cdot)$ پوچ توان است. در واقع به ازای هر مقدار $r > 1$ ، رابطه $[F'_q(\cdot)]^r = 0$ برقرار است و لذا در رابطه اول ۱۹ توان‌های بزرگ‌تر از یک $F'_q(\cdot)$ ظاهر نشده‌اند. تذکر ۷: ماتریس‌های E_τ و E_ξ معکوس پذیرند.

۴-۱- کنترل سرعت‌های ربات

در این بخش مقادیر مطلوب ξ به عنوان ورودی زیرسیستم اول معادلات ۱۸ به نحوی طراحی می‌شوند که خطای ردیابی قضیه ۱: برای زیرسیستم اول معادلات ۱۸، اگر ξ به صورت

$$\xi(k+2) = \frac{1}{T} R_\theta^T (q(k+2)) \vartheta(k+2) \quad (23)$$

باشد که در آن موارد به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \vartheta(k+2) &= \left[\frac{\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_2\varepsilon_3}{1 + 0.25\varepsilon_3^2} \quad \frac{\varepsilon_2 - 0.5\varepsilon_1\varepsilon_3}{1 + 0.25\varepsilon_3^2} \quad \varepsilon_3 \right]^T \\ [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T &= q_d(k+3) - q(k+2) \\ &\quad - \gamma(k+2)e_q(k+2) \end{aligned} \quad (24)$$

$\gamma^* < I_3$ و $0 < \gamma(k+2) \leq \gamma^*$ و ماتریس ثابت γ^* ، ماتریس‌های قطری هستند، آن گاه زیرسیستم اول معادلات ۱۸ پایدار است و خطای ردیابی $e_q = q_d - q$ به صورت نمایی به شکل رابطه ۲۵ به صفر همگرا می‌شود.

$$e_q(k) = e_q(0) \exp(k \cdot \ln(\gamma^*)) \quad (25)$$

اثبات: با توجه به زیرسیستم اول ۱۸ و روابط ۱۹ و ۲۳، دینامیک خطا به صورت رابطه ۲۶ خواهد بود.

$$\begin{aligned} e_q(k+3) &= q_d(k+3) - q(k+2) \\ &\quad - \left[I_3 + \frac{T}{2} F'_q(k+2) \right] \vartheta(k+2) \end{aligned} \quad (26)$$

با جای‌گذاری F'_q از رابطه ۲۵ و ϑ از رابطه ۲۴ در رابطه ۲۶ و انجام محاسبات ساده، دینامیک خطا به شکل رابطه ۲۷ به دست می‌آید.

همان طور که از رابطه ۱۴ مشخص است، با صرف نظر از جملات دوم به بعد، $E(k) \cong TI_n$ می‌شود که در این حالت، رابطه ۱۱ همان تخمین اولیه خواهد بود. همچنین در حالت خاص سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان، به آسانی می‌توان نشان داد که نتایج گسسته‌سازی سیستم پیوسته در یک پژوهش^[30]، با روش ارایه شده در این تحقیق یکسان است.

تذکر ۴: تابع ماتریسی $E(k)$ در حالت کلی از $u(k)$ مستقل نیست و لذا برای استفاده در کاربردهای کنترل سیستم ممکن است باعث بروز پیچیدگی‌های زیادی شود. لیکن در برخی موارد $E(k)$ از $u(k)$ مستقل می‌شود که در تذکر ۵ به آن پرداخته شده است. تذکر ۵: به عنوان یک حالت خاص از زیرسیستم ۱۰، زیرسیستم ۱۵ را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), z(t)) + B(z(t))u(t) \quad (15)$$

که در آن ماتریس ورودی B تابعی از x نیست. در این حالت زیرسیستم ۱۵ را می‌توان به صورت رابطه ۱۶ به شکل گسسته تبدیل نمود.

$$x(k+1) = x(k) + E(k)[f(x(k), z(k)) + B(z(k))u(k)] \quad (16)$$

که در آن موارد به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^T \exp[(F'(x(k), z(k))t)] dt \\ [F'(\cdot)]_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot); \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (17)$$

۴- طراحی قانون کنترل

در این بخش قانون کنترل مقاوم برای ردیابی مسیر مرجع طراحی خواهد شد. هدف کنترلی عبارت از تعیین ولتاژ موتورهای ربات $u(t)$ است، به نحوی که مختصات مرکز ثقل ربات $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ در حضور نامعینی‌های سیستم به سمت مقدار مطلوب آن یعنی $q_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \theta_d(t)]^T$ میل کند. به همین منظور با استفاده از روش کنترلی بازگشت به عقب و قضایای پایداری لیپانوف، قوانین کنترلی به دست آمده‌اند. در واقع برای اثبات پایداری هر یک از زیرسیستم‌ها، یک تابع مثبت معین لیپانوف (V_i) به نحوی انتخاب شده است که در حضور نامعینی‌های سیستمی، $\Delta V_i \leq 0$ باشد و پایداری سیستم تضمین شود. ایده طراحی کنترلر در این تحقیق در یک پژوهش^[7] مطرح شده که البته همراه با سه محدودیت است که شرح جزئیات آن در مقدمه مقاله ذکر شد. بلوک دیاگرام کنترلر پیشنهادی در شکل ۲ نشان داده شده است. با استفاده از تذکر ۵، معادلات حرکت ربات به شکل رابطه ۱۸ گسسته‌سازی می‌شوند.

$$\begin{aligned} q(k+3) &= q(k+2) \\ &\quad + E_q(k) \\ &\quad + 2)R_\theta(q(k+2))\xi(k) \\ &\quad + 2)\xi(k+2) \\ &= \xi(k+1) \\ &\quad + E_\xi(k+1)[A_1\xi(k+1) \\ &\quad + A_2\text{sign}(\xi(k+1)) \\ &\quad + B\tau(k+1)]\tau(k+1) \\ &= \tau(k) + E_\tau[D_1\tau(k) \\ &\quad + D_2\xi(k) + Gu(k)] \end{aligned} \quad (18)$$

حال تابع لیایانوف به شکل رابطه ۲۸ فرض می شود.

بنابراین:

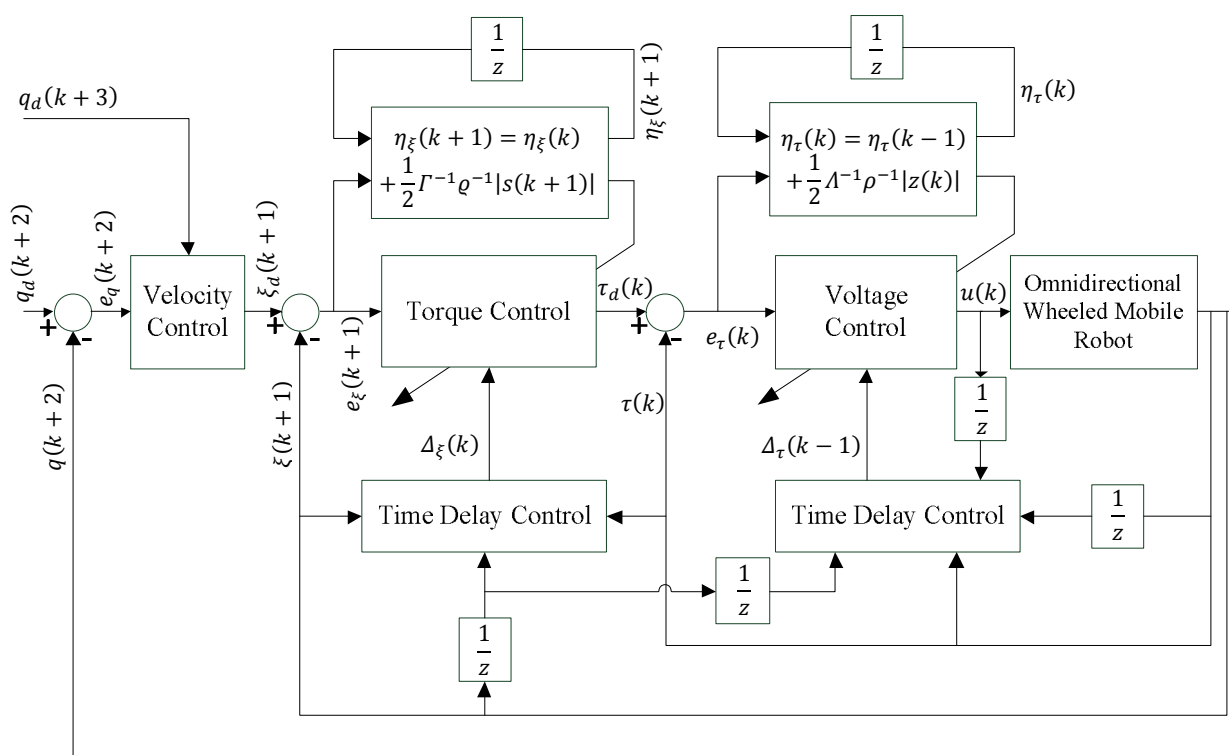
$$\begin{aligned} \Delta V_1(k+3) &= e_q^T(k+3)e_q(k+3) \\ &- e_q^T(k+2)e_q(k+2) \\ &= e_q^T(k+2)[\gamma^2(k+2) - I_3]e_q(k+2) \\ &\leq -e_q^T(k+2)[I_3 - \gamma^{*2}]e_q(k+2) \leq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

لذا پایداری سیستم اثبات می‌شود. حال براساس رابطه ۲۷، خطای ردیابی e_q به صورت رابطه ۳۰ محاسبه می‌شود.

$$e_a(k) = \gamma(k-1)\gamma(k-2) \dots \gamma(1)\gamma(0)e_a(0) \leq \gamma^{*k} e_a(0) \quad (\Psi \bullet)$$

$$\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1), \quad \gamma(0) = I_3 \rightarrow \gamma(k) = \alpha^k \quad (\Psi_1)$$

که در آن $0 < \alpha < I_n$ یک ماتریس قطری ثابت است. در این حالت از روابط ۳۰ و ۳۱، نتیجه به صورت رابطه ۳۲ می شود.



شکل ۲) نمودار بلوکی کنترلر پیشنهادی

با توجه به تذکر ۵ می‌توان رابطه ۳۵ را با توجه به ۳۴ بیان کرد.

در این بخش براساس منطق روش کنترلی بازگشت به عقب فرض می‌شود که سرعت‌های مطلوب ربات به شکل رابطه ۳۳ هستند.

$$\xi_d(k+2) = \frac{1}{T} R_\theta^T(q(k+2)) \vartheta(k+2) \quad (33)$$

که بردار θ مطابق با رابطه ۲۴ تعریف می‌شود. بنابراین گشتاور τ به‌عنوان ورودی زیرسیستم دوم معادلات ۱۸ به‌نحوی طراحی می‌شود که خطای ردیابی $\xi - \xi_d = e_\xi$ به سمت یک همسایگی دلخواه صفر میل کند.

$$s(k+1) = \dot{e}_\xi(k+1) + \lambda e_\xi(k+1) \quad (34)$$

که $\lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ با مقادیر $\lambda_j > 0$ برداری ثابت است.

(੩੫)

$$e_{\xi}(k+2) = e_{\xi}(k+1) + \varrho[-\lambda e_{\xi}(k+1) + s(k+1)]$$

که در آن:

$$\varrho = [I_3 - \exp(-\lambda T)]\lambda^{-1} \quad (36)$$

لازم به ذکر است که q ماتریسی قطری با مقادیر مثبت در قطر اصلی بوده و بنابراین معکوس پذیر است.

با توجه به ۳۵ می‌توان $s(k+1)$ را به صورت رابطه ۳۷ بازنویسی کرد.

(37)

$$s(k+1) = \varrho^{-1}[e_\xi(k+2) - e_\xi(k+1)] + \lambda e_\xi(k+1)$$

$$e_{\xi}(k+2) = (I_3 - \rho\lambda)e_{\xi}(k+1) - \tilde{\Delta}_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k+1) * \text{sign}(s(k+1)) + \frac{1}{4}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1) \quad (44)$$

بنابراین با استفاده از روابط ۳۷ و ۴۴، دینامیک سطح لغزش به شکل رابطه ۴۵ خواهد بود.

$$s(k+1) = \rho^{-1}[-\tilde{\Delta}_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k+1) * \text{sign}(s(k+1)) + \frac{1}{4}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1)] \quad (45)$$

حال تابع کاندیدای لیاپانوف به صورت رابطه ۴۶ تعریف می‌شود.

$$V_2(k+1) = s^T(k+1)s(k+1) + (\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k+1))^T \Gamma (\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k+1)) \quad (46)$$

بنابراین با توجه به روابط ۴۵ و ۴۶، رابطه ۴۷ به صورت زیر است:

$$\Delta V_2(k+1) = s^T(k+1)\rho^{-1}[-\tilde{\Delta}_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k+1) * \text{sign}(s(k+1)) + \frac{1}{4}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1)] - s^T(k)s(k) - (\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k))^T \Gamma (\eta_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k)) \quad (47)$$

حال با تعریف $\tilde{\eta}_{\xi}(k+1) \triangleq \eta_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k)$ ، استفاده از روابط ۴۱ و ۴۷ و در نظر گرفتن Δ_{ξ}^* به عنوان کران بالای $|\tilde{\Delta}_{\xi}(k+1)|$ ، رابطه ۴۸ به دست می‌آید.

$$\Delta V_2(k+1) \leq |s(k+1)|^T \rho^{-1} [\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k+1)] \quad (48)$$

$$+ \frac{1}{4}s^T(k+1)\rho^{-1}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1) - s^T(k)s(k) - 2(\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k))^T \Gamma \tilde{\eta}_{\xi}(k+1) + \tilde{\eta}_{\xi}^T(k+1)\Gamma \tilde{\eta}_{\xi}(k+1) \leq [\rho^{-1}|s(k+1)| - 2\Gamma \tilde{\eta}_{\xi}(k+1)]^T [\Delta_{\xi}^* - \eta_{\xi}(k)] + \frac{1}{4}s^T(k+1)\rho^{-1}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1) - s^T(k)s(k) + \tilde{\eta}_{\xi}^T(k+1)\Gamma \tilde{\eta}_{\xi}(k+1) - |s(k+1)|^T \rho^{-1}\tilde{\eta}_{\xi}(k+1)$$

با جای‌گذاری $\tilde{\eta}_{\xi}(k+1)$ از رابطه ۴۱، جمله اول رابطه ۴۸، حذف و در نتیجه با انجام محاسبات ساده، پایداری سیستم تضمین می‌شود.

$$\Delta V_2(k+1) \leq -s^T(k)s(k) \leq 0 \quad (49)$$

لازم به ذکر است که در کنترل مود لغزشی پایه، بهره کنترلی مود لغزش مقدار ثابتی در نظر گرفته می‌شود که باید از نرم نامعینی‌های سیستم بزرگ‌تر باشد. لیکن در کنترلر مود لغزشی تطبیقی پیشنهادی، بهره کنترلی $\eta_{\xi}(k+1)$ ثابت نیست و براساس رابطه ۴۱ به‌روزرسانی شده است و همان طور که در بخش ۱ به آن اشاره شد، نیازی به معلوم‌بودن کران بالای نامعینی‌های سیستم نیست.

با توجه به وجود نامعینی‌ها در زیرسیستم دوم معادلات ۱۸ می‌توان معادلات سیستم را براساس مقادیر نامی پارامترهای سیستم تعریف کرد و اثر نامعینی‌های سیستم را به صورت یک جمله مانند اغتشاش خارجی یا دینامیک‌های مدل‌نشده در سیستم لحاظ کرد. در واقع در این تحقیق نامعینی‌های سیستم شامل نامعینی‌های پارامتری، اغتشاشات خارجی و دینامیک‌های مدل‌نشده به شکل یک آشفتگی غیرساختاری اضافه‌شونده در نظر گرفته می‌شود که در طراحی قانون کنترل براساس سیگنال زمان گذشته تخمین زده می‌شوند. بنابراین برای طراحی کنترلر به جای زیرسیستم دوم معادلات ۱۸ از معادله ۳۸ استفاده می‌شود.

(۳۸)

$$\xi(k+2) = \xi(k+1) + \hat{E}_{\xi}(k+1)[\hat{A}_1\xi(k+1) + \hat{A}_2\text{sign}(\xi(k+1)) + \hat{B}\tau(k+1)] + \Delta_{\xi}(k+1)$$

که $\hat{x}$ بیانگر مقادیر نامی x و Δ_{ξ} بیانگر اثر نامعینی‌های سیستم است. در این تحقیق براساس منطق TDC، $\Delta_{\xi}(k+1)$ با سیگنال زمان گذشته آن یعنی $\Delta_{\xi}(k)$ تخمین زده و شرط کافی برای کران‌داربودن خطای این تخمین در لم ۲ ارایه می‌شود. ضرب نظیر به نظیر مولفه‌های دو بردار $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ و $b = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ به شکل رابطه ۳۹ تعریف می‌شود.

$$a * b = [a_1b_1 \ a_2b_2 \ a_3b_3]^T \quad (39)$$

قضیه ۲: برای زیرسیستم دوم معادلات ۱۸، اگر τ به صورت زیر باشد:

$$\tau(k+1) = -(\hat{E}_{\xi}(k+1)\hat{B})^{-1}[\hat{E}_{\xi}(k+1)\hat{A}_1\xi(k+1) + \hat{E}_{\xi}(k+1)\hat{A}_2\text{sign}(\xi(k+1)) + \xi_d(k+1) - \xi_d(k+2) + \Delta_{\xi}(k) - \rho\lambda e_{\xi}(k+1) - \eta_{\xi}(k+1) * \text{sign}(s(k+1)) + \frac{1}{4}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1)] \quad (40)$$

که در آن $\Gamma = \frac{1}{v_{\xi}^2}\rho^{-2}$ بوده که v_{ξ} یک بهره کنترلی ثابت با شرط $|v_{\xi}| < 1$ است و

$$\eta_{\xi}(k+1) = \eta_{\xi}(k) + \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\rho^{-1}|s(k+1)| \quad (41)$$

اگر $\tilde{\Delta}_{\xi}(k+1) = \Delta_{\xi}(k+1) - \Delta_{\xi}(k)$ کران‌دار باشد (مراجعه شود به لم ۲)، آن گاه سطح لغزش به صورت $\|s(k)\| \leq s^*$ کران‌دار است و به‌ازای تمام پاسخ‌های سیستم که در مجموعه زیر شروع شوند:

$$D_{\xi} = \{e_{\xi}(k) \in \mathbb{R}^n \mid \|e_{\xi}(k)\| > \varepsilon_{\xi}\} \quad (42)$$

خطای ردیابی $\xi - \xi_d$ به صورت زیر کران‌دار است:

(۴۳)

$$\|e_{\xi}(k)\| \leq \sqrt{\exp(k \ln(\sigma)) (\|e_{\xi}(0)\|^2 - \varepsilon_{\xi}^2) + \varepsilon_{\xi}^2}$$

در آن $\varepsilon_{\xi} = \rho^* s^* \sqrt{\frac{\sigma_{\xi}}{\gamma_{\xi}(1-\sigma_{\xi})(1-\exp(-2\lambda_{\min}T))}}$ و $0 < \gamma_{\xi} < 1$ یک ثابت بوده و $\rho^* = [1 - \exp(-\lambda_{\min}T)]/\lambda_{\min}$ است. اثبات: با توجه به معادلات ۳۸ و ۴۰، دینامیک خطا به صورت رابطه

بنابراین براساس رابطه ۴۹ می‌توان نتیجه گرفت که $V_2(k) \leq V_2(0)$ است. پس $V_2 \in \mathcal{L}_\infty$ و با توجه به رابطه ۴۶، $s \in \mathcal{L}_\infty$ است. $\eta_\xi \in \mathcal{L}_\infty$ است. لذا مقدار ثابتی مانند s^* وجود دارد، به‌نحوی که $\|s(k)\| \leq s^*$ است. حال برای تعیین کران بالای خطای ردیابی، تابع کاندیدای لیاپانوف به‌صورت رابطه ۵۰ تعریف می‌شود.

$$\bar{V}_2(k) = e_\xi^T(k+2)e_\xi(k+2) \quad (50)$$

با توجه به روابط ۳۵ و ۳۶

$$e_\xi(k+2) = he_\xi(k+1) + \rho s(k+1) \quad (51)$$

که در آن $h = \exp(-\lambda T)$ یک ماتریس ثابت قطری است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}_2(k) &= -e_\xi^T(k+1)(I_n - h^2)e_\xi(k+1) \\ &+ 2e_\xi^T(k+1)h\rho s(k+1) + s^T(k+1)\rho^2 s(k+1) \\ &\leq -(1-\gamma_\xi)(1-h^{*2})\|e_\xi(k+1)\|^2 \\ &+ [-\gamma_\xi(1-h^{*2})\|e_\xi(k+1)\|^2 \\ &+ 2\rho^*h^*\|s(k+1)\|\|e_\xi(k+1)\| \\ &+ \rho^{*2}\|s(k+1)\|^2 - (1-\sigma_\xi)\varepsilon_\xi^2] + (1-\sigma_\xi)\varepsilon_\xi^2 \end{aligned} \quad (52)$$

که در آن $h^* = \exp(-\lambda_{\min} T)$ است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که جمله داخل براکت برای همه مقادیر $\|s(k)\| \leq s^*$ نامثبت است، لذا:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}_2(k) &\leq -(1-\gamma_\xi)(1-h^{*2})\|e_\xi(k+1)\|^2 \\ &+ (1-\sigma_\xi)\varepsilon_\xi^2 = -(1-\sigma_\xi)[\|e_\xi(k+1)\|^2 - \varepsilon_\xi^2] \end{aligned}$$

که برای تمام پاسخ‌های سیستم که در D_ξ شروع شوند، نامثبت بوده، زیرا $0 < \sigma_\xi < 1$ است. بنابراین همگرایی سیستم به یک همسایگی کوچک دلخواه صفر اثبات می‌شود. با توجه به رابطه ۵۴:

$$\bar{V}_2(k) \leq \sigma_\xi \bar{V}_2(k-1) + (1-\sigma_\xi)\varepsilon_\xi^2 \quad (54)$$

لذا می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت:

$$\bar{V}_2(k) \leq \sigma_\xi^k \bar{V}_2(0) + (1-\sigma_\xi^k)\varepsilon_\xi^2 \quad (55)$$

که به رابطه ۴۳ منجر می‌شود.

لم ۲: برای زیرسیستم دوم معادلات ۱۸ با قانون کنترل ۴۰، اگر:

$$\forall k \geq 0, \quad c_\xi = \|C_\xi(k+1)\|_2 < 1 \quad (56)$$

که در آن $\|C_\xi\|_2$ بیانگر نرم طیفی C_ξ (جذر بزرگ‌ترین مقدار ویژه $C_\xi^T C_\xi$) است و رابطه ۵۷ که به‌صورت زیر است:

$$C_\xi(k) = I_3 - E_\xi(k)B[\hat{E}_\xi(k)\hat{B}]^{-1} \quad (57)$$

آن گاه Δ_ξ و $\bar{\Delta}_\xi$ کران‌دار هستند.

اثبات: به پیوست مراجعه شود.

تذکر ۹: برای طراحی قانون کنترل نیازی به معلوم‌بودن کران بالای $|\bar{\Delta}_\xi|$ نیست و فقط کران‌داربودن $|\bar{\Delta}_\xi|$ مورد نیاز است.

۳-۴- کنترل ولتاژ ربات

در این بخش براساس منطق روش کنترلی بازگشت به عقب فرض می‌شود که گشتاورهای مطلوب ربات به‌شکل رابطه ۵۸ هستند.

(۵۸)

$$\begin{aligned} \tau_d(k+1) &= -(\hat{E}_\xi(k+1)\hat{B})^{-1}[\hat{E}_\xi(k+1)\hat{A}_1\xi(k+1) \\ &+ \hat{E}_\xi(k+1)\hat{A}_2\text{sign}(\xi(k+1)) + \xi_d(k+1) \\ &- \xi_d(k+2) + \Delta_\xi(k) - \rho\lambda e_\xi(k+1) \\ &- \eta_\xi(k+1) * \text{sign}(s(k+1))] \\ &+ \frac{1}{4}\Gamma^{-1}\rho^{-1}s(k+1) \end{aligned}$$

بنابراین ولتاژ u به‌عنوان ورودی زیرسیستم سوم معادلات ۱۸ به‌نحوی طراحی می‌شود که خطای ردیابی $e_\tau = \tau_d - \tau$ به سمت یک همسایگی دلخواه صفر میل کند. در این حالت سطح لغزش به‌صورت رابطه ۵۹ تعریف می‌شود.

$$z(k) = \dot{e}_\tau(k) + \beta e_\tau(k) \quad (59)$$

که $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ با مقادیر $\beta_i > 0$ برداری ثابت است. با توجه به تذکر ۵ می‌توان رابطه ۶۰ را براساس ۵۹ بیان کرد.

$$e_\tau(k+1) = e_\tau(k) + \rho[-\beta e_\tau(k) + z(k)] \quad (60)$$

که در آن:

$$\rho = [I_3 - \exp(-\beta T)]\beta^{-1} \quad (61)$$

بوده و لازم به ذکر است که σ ماتریسی قطری با مقادیر مثبت در قطر اصلی بوده و بنابراین معکوس‌پذیر است. با توجه به رابطه ۶۰ می‌توان $z(k)$ را به‌صورت رابطه ۶۲ بازنویسی کرد.

$$z(k) = \rho^{-1}[e_\tau(k+1) - e_\tau(k)] + \beta e_\tau(k) \quad (62)$$

با توجه به وجود نامعینی‌ها در زیرسیستم سوم معادلات ۱۸ می‌توان مشابه بخش ۴-۲، برای طراحی کنترلر به‌جای زیرسیستم سوم معادلات ۱۸ از معادله ۶۳ استفاده نمود.

$$\tau(k+1) = \tau(k) + \hat{E}_\tau[\hat{D}_1\tau(k) + \hat{D}_2\xi(k)l + \hat{G}u(k)] + \Delta_\tau(k) \quad (63)$$

که Δ_τ بیانگر اثرات نامعینی‌های سیستم است. لازم به ذکر بوده که مشابه بخش ۴-۲، $\Delta_\tau(k)$ با سیگنال زمان گذشته آن یعنی $\Delta_\tau(k-1)$ تخمین زده شده است و شرط کافی برای کران‌داربودن خطای این تخمین در لم ۳ ارایه می‌شود.

قضیه ۳: برای زیرسیستم سوم معادلات ۱۸، اگر u به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} u(k) &= -(\hat{E}_\tau\hat{G})^{-1}[\hat{E}_\tau\hat{D}_1\tau(k) + \hat{E}_\tau\hat{D}_2\xi(k) + \tau_d(k) \\ &- \tau_d(k+1) + \Delta_\tau(k-1) - \rho\beta e_\tau(k) \\ &- \eta_\tau(k) * \text{sign}(z(k)) + \frac{1}{4}\Lambda^{-1}\rho^{-1}z(k)] \end{aligned} \quad (64)$$

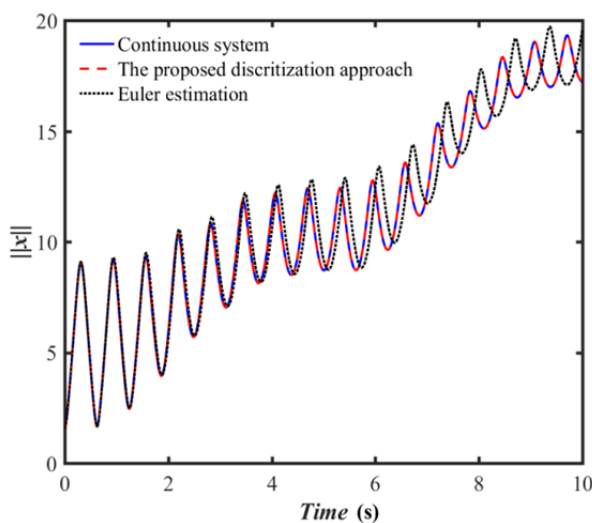
که در آن $\Lambda = \frac{1}{v_\tau^2}\rho^{-2}$ بوده که v_τ یک بهره کنترلی ثابت با شرط $|v_\tau| < 1$ است و

$$\eta_\tau(k) = \eta_\tau(k-1) + \frac{1}{2}\Lambda^{-1}\rho^{-1}|z(k)| \quad (65)$$

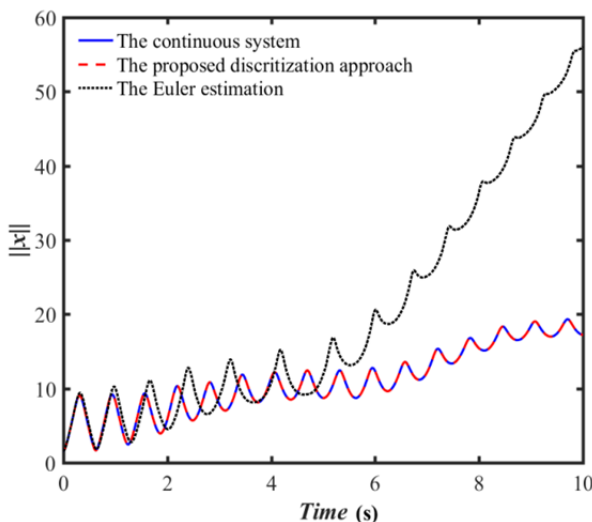
و اگر $\bar{\Delta}_\tau(k) = \Delta_\tau(k) - \Delta_\tau(k-1)$ کران‌دار باشد (به لم ۳ مراجعه شود)، آن گاه سطح لغزش به‌صورت $\|z(k)\| \leq z^*$ کران‌دار است و به‌ازای تمام پاسخ‌های سیستم که در مجموعه زیر شروع شوند:

$$D_\tau = \{e_\tau(k) \in \mathbb{R}^n \mid \|e_\tau(k)\| > \varepsilon_\tau\} \quad (66)$$

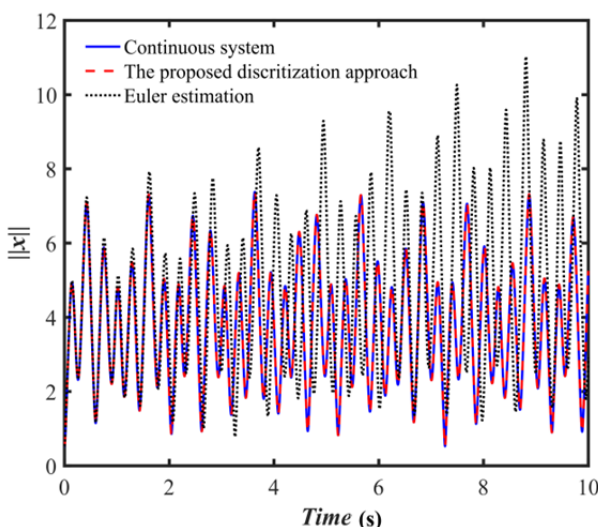
انتظار می‌رود که تأثیر خطای تخمین، کمتر و در هر مرحله با گرفتن فیدبک از خروجی سیستم تا حدی اصلاح شود.



نمودار (۱) نتایج شبیه‌سازی سیستم آونگ متحرک با ارایه با فرض $T=0.001s$



نمودار (۲) نتایج شبیه‌سازی سیستم آونگ متحرک با ارایه با فرض $T=0.01s$



نمودار (۳) نتایج شبیه‌سازی سیستم آونگ دوگانه با فرض $T=0.001s$

خطای ردیابی $e_\tau = \tau_d - \tau$ به صورت زیر کران‌دار است:

$$\|e_\tau(k)\| \leq \sqrt{\exp(k \ln(\sigma)) (\|e_\tau(0)\|^2 - \varepsilon_\tau^2) + \varepsilon_\tau^2} \quad (۶۷)$$

در آن $0 < \gamma_\tau < 1$ که $\varepsilon_\tau = \rho^* z^* \sqrt{\frac{\sigma_\tau}{\gamma_\tau(1-\sigma_\tau)(1-\exp(-2\beta_{min}T))}}$ یک ثابت بوده و $\rho^* = [1 - \exp(-\beta_{min}T)]/\beta_{min}$ و $\sigma_\tau = \gamma_\tau(1 - \exp(-2\beta_{min}T)) + \exp(-2\beta_{min}T)$ اثبات: مشابه با قضیه ۲ اثبات می‌شود.

لم ۳: برای زیرسیستم سوم معادلات ۱۸ با قانون کنترل ۶۴، اگر:

$$c_\tau = \|C_\tau\|_2 < 1 \quad (۶۸)$$

که در آن:

$$C_\tau = I_3 - E_\tau G [\hat{E}_\tau \hat{G}]^{-1} \quad (۶۹)$$

آن گاه Δ_τ و $\tilde{\Delta}_\tau$ کران‌دار هستند.

اثبات: مشابه با لم ۲ اثبات می‌شود.

تذکر ۱۰: برای طراحی قانون کنترل نیازی به معلوم بودن کران بالای $|\tilde{\Delta}_\tau|$ نیست و فقط کران دار بودن $|\tilde{\Delta}_\tau|$ مورد نیاز است.

۵- شبیه‌سازی

در این بخش ابتدا به اعتبارسنجی روش گسسته‌سازی ارایه‌شده پرداخته و سپس نتایج شبیه‌سازی کنترلر پیشنهادی و مقایسه نتایج آن با سایر روش‌های کنترلی ارایه شده است.

۵-۱- اعتبارسنجی روش گسسته‌سازی ارایه‌شده

روش گسسته‌سازی پیشنهادی روی دو سیستم معیار شبیه‌سازی شده و نتایج آن با سیستم پیوسته و روش تخمین اویلر مقایسه شده است.

نتایج شبیه‌سازی برای یک سیستم آونگ متحرک با ارایه [31] با فرض $M=2kg$, $m=0.5kg$, $L=0.3m$ و شرایط اولیه $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ و $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$ با ورودی $F = 5 \sin \frac{2\pi}{5}t$ در نمودارهای ۱ و ۲ نشان داده شده است. همچنین نتایج شبیه‌سازی برای یک سیستم آونگ دوگانه [32] با فرض $m_1=m_2=0.5kg$, $l_1=0.3m$ و $l_2=0.2m$ و شرایط اولیه $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ و $\theta_1(0) = \pi/6$ در نمودارهای ۳ و ۴ نشان داده شده است. برای به‌دست آوردن این نمودارها، هر دو سیستم در محیط SIMULINK نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده است. برای سیستم پیوسته از معادلات دیفرانسیلی سیستم و برای سیستم‌های گسسته از معادل گسسته معادلات دینامیک سیستم (برای تخمین اویلر از رابطه ۹ و برای روش پیشنهادی این تحقیق از لم ۱) استفاده شده است.

براساس نمودارها، روش گسسته‌سازی پیشنهادی در این تحقیق نسبت به تخمین اویلر که حتی برای مقادیر بسیار کوچک زمان نمونه‌برداری نیز دارای خطای محسوس بوده، دارای دقت بسیار بیشتری است. در واقع همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد، با صرف نظر از جملات دوم به بعد رابطه ۱۴، $E(k) \cong TI_n$ شده که همان تخمین اویلر است و لذا در حالتی که از جملات مرتبه بالاتر صرف نظر نشود، دقت تخمین بالاتر خواهد بود. البته خطای ایجادشده در نمودارهای ۱-۴ برای سیستم حلقه باز بدون جبران‌ساز است و در سیستم حلقه بسته در صورتی که کنترلر طراحی‌شده نسبت به عدم قطعیت‌های ناشی از گسسته‌سازی به اندازه کافی مقاوم باشد،

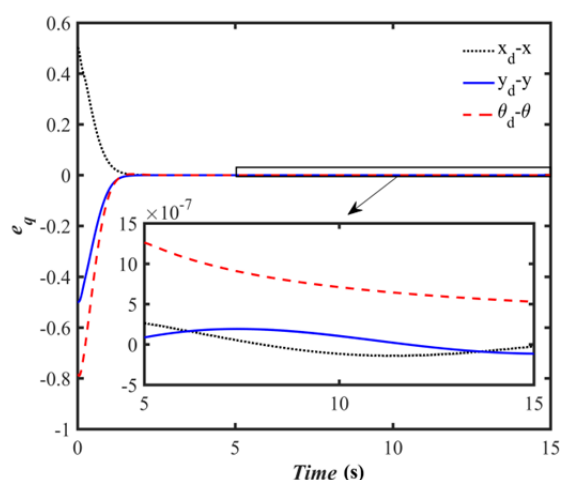
داده می‌شود. همچنین حالتی را که κ یک سیگنال نویز سفید در دامنه $[-0.15, 0.15]$ باشد با κ'_2 نمایش داده می‌شود.

در شبیه‌سازی انجام‌شده، $\beta = \lambda = 5I_3$ ، $v_\xi = v_\tau = 0.001$ ، $\alpha = \exp(-2T)I_3$ بوده و $q_0 = [-0.5, -0.5, -\frac{\pi}{4}]^T$ به‌عنوان حالت اولیه ربات فرض شده است. همچنین مسیر مرجع به‌شکل دایره‌ای با شعاع یک‌متر و مطابق با رابطه ۷۱ در نظر گرفته شده است.

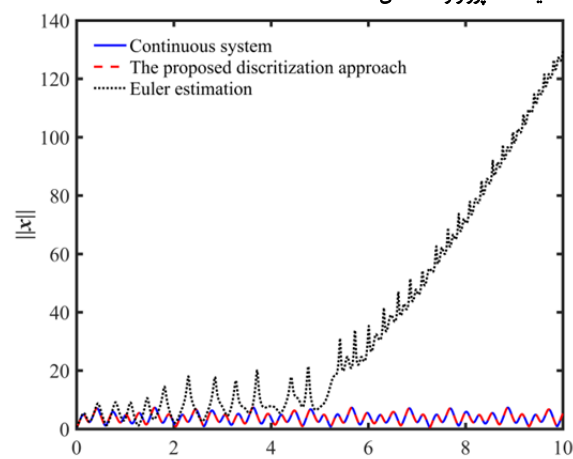
$$\begin{cases} x_d(t) = \sin(\frac{2\pi}{15}t) \\ y_d(t) = -\cos(\frac{2\pi}{15}t) \\ \theta_d(t) = \frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (71)$$

خطای ردیابی مسیر مرجع در نمودار ۵ نمایش داده شده است. طبق نمودار، ربات به‌خوبی مسیر مرجع را ردیابی کرده است. ولتاژ موتورهای ربات به‌عنوان ورودی کنترلی در نمودار ۶ نمایش داده شده است. با توجه به این نمودار، مقدار ولتاژ موتورهای ربات محدود بوده و مسیر ربات نیز در صفحه مختصات x-y در نمودار ۷ نمایش داده شده است.

حال به مقایسه عملکرد کنترلر پیشنهادی با دو روش کنترلی دیگر می‌پردازیم. به همین منظور، کنترلر مود لغزشی (SMC) [33] و کنترلر مود لغزشی با تخمین تاخیر زمانی (TDSMC) [12, 34] را با کنترلر پیشنهادی در این تحقیق یعنی کنترلر مود لغزشی تطبیقی با تخمین تاخیر زمانی (TDASMC) مقایسه می‌کنیم (نمودارهای ۸ و ۹). با توجه به نمودارهای ۸ و ۹، میزان خطای ردیابی مسیر مرجع در کنترلر پیشنهادی کمتر از دو کنترلر دیگر است. همچنین توجه به نمودارهای مربوط به نرم ورودی، اندازه ورودی و همچنین میزان لرزش سیستم برای کنترلر پیشنهادی در مقایسه با دو روش دیگر کمتر است. در واقع به‌دلیل تخمین نامعینی‌های سیستم با سیگنال زمان گذشته و تطبیقی‌بودن کنترلر مود لغزشی، مقدار نوسانات خطای ردیابی و ورودی کنترلی برای روش پیشنهادی در این تحقیق نسبت به دو روش دیگر کمتر شده که همین موضوع منجر به کاهش نرم ورودی شده است. همچنین در کنترلر پیشنهادی در این تحقیق، ضرایب $sign(s(k+1))$ و $sign(z(k))$ به‌روزرسانی می‌شوند که منجر به عملکرد بهتر کنترلر شده است.



نمودار ۵) خطای ردیابی مسیر مرجع با فرض $T=0.1s$ و $\kappa = \kappa_1$



نمودار ۴) نتایج شبیه‌سازی سیستم آونگ دوگانه با فرض $T=0.1s$

۵-۲- شبیه‌سازی کنترلر و مقایسه با سایر روش‌ها

به‌منظور ساده‌سازی فرض می‌شود که شعاع چرخ‌های ربات، برابر و مشخصات موتورهای DC چرخ‌های ربات یکسان باشند. پارامترهای نامی ربات در جدول ۱ بیان شده است [29]. نامعینی‌های سیستم به‌صورت رابطه ۷۰ در نظر گرفته شده است.

$$\psi = (1 + \kappa_\psi)\hat{\psi} \quad (70)$$

که در آن ψ هر یک از پارامترهای جدول ۱ است و κ_ψ میزان نامعینی را مشخص می‌کند. در واقع، در این تحقیق نامعینی‌های پارامتری سیستم به‌شکل یک آشفتگی غیرساختاری اضافه‌شونده با ضریب κ_ψ در نظر گرفته شده است که در مدل‌سازی ربات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۱) پارامترهای نامی ربات

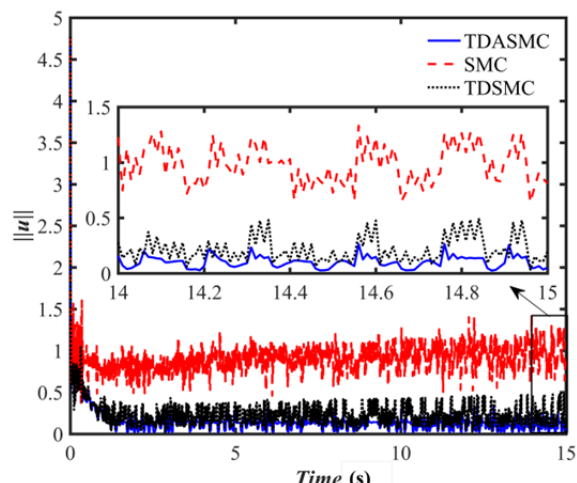
پارامتر	واحد	مقدار
B_v	N.s/m	۲
B_{v_n}	N.s/m	۱/۵
B_ω	N.s/rad	۰.۰۲۴
C_v	N	۱/۲
C_{v_n}	N	۰/۸
C_ω	N.m	۰/۰۰۳۵
b	m	۰/۱
m	kg	۱/۵
I	kg.m ²	۰/۰۲۵
δ	—	۳۰°
$r = r_1 = r_2 = r_3$	m	۰/۰۳۵
$l = l_1 = l_2 = l_3$	—	۱:۱۹
$L = L_1 = L_2 = L_3$	H	۰/۰۰۰۱۱
$R = R_1 = R_2 = R_3$	Ω	۱/۶۶
$K_v = K_{v_1} = K_{v_2} = K_{v_3}$	V.s/rad	۰/۰۰۵۹
$K_t = K_{t_2} = K_{t_2} = K_{t_3}$	N.m/A	۰/۰۰۵۹

برای سادگی، در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده میزان نامعینی پارامترها یکسان فرض شده $(\kappa_\psi = \kappa)$ ، همچنین حالت‌های مختلف κ به‌صورت زیر لحاظ شده است:

الف- $\kappa=0.5$ برای ارزیابی عملکرد کنترلر پیشنهادی در برابر نامعینی‌های ناشی از خطاهای اندازه‌گیری در نظر گرفته شده است. این حالت در شبیه‌سازی‌ها با κ_1 نمایش داده می‌شود.

ب) κ یک سیگنال نویز سفید در دامنه $[-0.05, 0.15]$ بوده که برای ارزیابی عملکرد کنترلر پیشنهادی در برابر تغییرات شدید پارامترها در نظر گرفته شده است. این حالت در شبیه‌سازی‌ها با κ_2 نمایش

کنترل مود لغزش تطبیقی گسسته یک ربات سیار همه‌جهته با استفاده از روش کنترل تاخیر زمانی ۵۰۱ افزایش نامعینی‌های سیستم، مقدار خطای ردیابی و ولتاژ ورودی در هر سه روش بیشتر شده است.



نمودار ۹) نرم ولتاژ موتورهای ربات با فرض $\kappa = \kappa'_2$

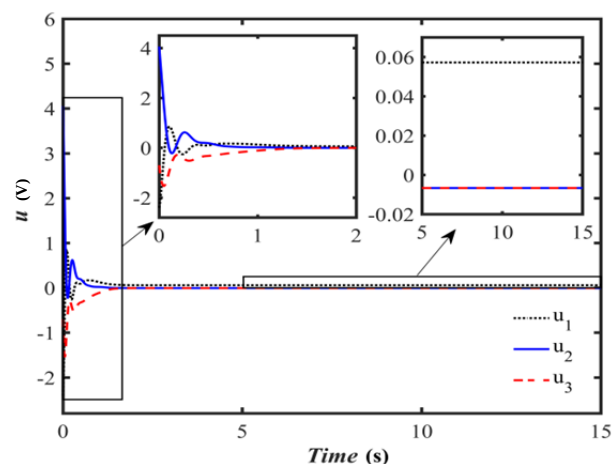
جدول ۲) جذر میانگین مربعات (RMS) خطای ردیابی مسیر مرجع

نرم خطای ردیابی	کنترلر مود لغزشی تطبیقی با تخمین تاخیر زمانی (TDASMC)	کنترلر مود لغزشی (SMC)	کنترلر مود لغزشی با تخمین تاخیر زمانی (TDASMC)
$\ e_q\ _{rms}$ κ_2	$160/8 \times 10^{-3}$	$173/4 \times 10^{-3}$	$173/2 \times 10^{-3}$
$\ e_q\ _{rms}$ κ'_2	$163/4 \times 10^{-3}$	$179/3 \times 10^{-3}$	$177/6 \times 10^{-3}$
$\ u\ _{rms}$ κ_2	$213/3 \times 10^{-3}$	$569/5 \times 10^{-3}$	$283/3 \times 10^{-3}$
$\ u\ _{rms}$ κ'_2	$248/8 \times 10^{-3}$	$950/7 \times 10^{-3}$	$393/2 \times 10^{-3}$

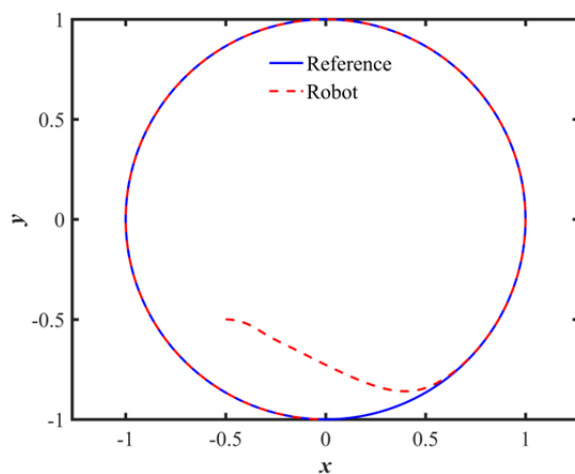
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به طراحی کنترلر گسسته مود لغزشی تطبیقی با کمک روش TDC برای ربات سیار همه‌جهته پرداخته شد. به همین منظور ابتدا مدل‌سازی ربات با در نظر گرفتن دینامیک موتورهای DC، استخراج و پس از مدل‌سازی ربات، قانون کنترل گسسته مقاوم با استفاده از روش بازگشت به عقب در سطح ولتاژ موتورهای ربات طراحی شد. کنترلر ارایه‌شده در این تحقیق در حوزه سیستم گسسته بدون نیاز به معلوم بودن کران نامعینی‌های سیستم طراحی شد. براساس نتایج شبیه‌سازی، کنترلر پیشنهادی به‌نحو مطلوبی به ردیابی مسیر مرجع پرداخته و خطای ردیابی در مدت زمان کم و با ورودی‌های کنترلی نسبتاً پایین به سمت یک همسایگی دلخواه صفر میل کرده و در عین حال مقدار لرزش سیستم نیز بسیار کم بوده است. کنترلر پیشنهادی در مقایسه با کنترلر مود لغزشی حدود ۷٪ بهبود در خطای ردیابی و ۶۲٪ بهبود در ولتاژ ورودی و در مقایسه با کنترلر مود لغزشی با تخمین تاخیر زمانی نیز حدود ۷٪ بهبود در خطای ردیابی و ۲۵٪ بهبود در ولتاژ ورودی داشته است.

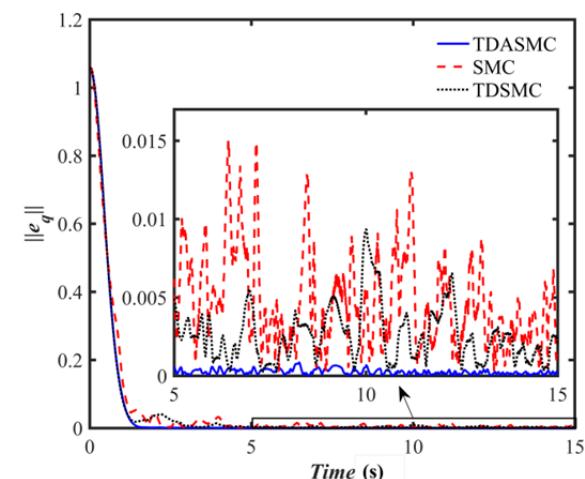
تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان گزارش نشد.
تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله، حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج برعهده نویسندگان است.
تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.
سهم نویسندگان: امید محمدپور (نویسنده اول)، نگارنده



نمودار ۶) ولتاژ موتورهای DC ربات با فرض $\kappa = \kappa_1$ و $T=0.01s$



نمودار ۷) مسیر ربات در صفحه مختصات x-y با فرض $\kappa = \kappa_1$ و $T=0.01s$



نمودار ۸) نرم خطای ردیابی مسیر مرجع با فرض $\kappa = \kappa'_2$

برای بررسی عملکرد کنترلر پیشنهادی در برابر SMC و TDSMC، مقدار جذر میانگین مربعات نرم خطای ردیابی مسیر مرجع و نرم ولتاژ ورودی برای دو حالت نامعینی κ_2 و κ'_2 در جدول ۲ ارایه شده است. با توجه به جدول ۲، مقدار RMS خطای ردیابی و ولتاژ ورودی در کنترلر پیشنهادی نسبت به دو کنترلر دیگر کمتر بوده و با

مقدمه/روش شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۸۰٪)؛ رضا احمدی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۲۰٪)
منابع مالی: از منابع مالی خاصی برای انجام این پژوهش استفاده نشده است.

۷- پی نوشت

اثبات لم ۱: برای این که تغییرات $x(t)$ در بازه $[kT, (k+1)T]$ در نظر گرفته شود، این بازه به m قسمت تقسیم می شود. بردار جدید $\varphi \in \mathbb{R}^n$ به شکل رابطه ۷۲ تعریف می شود.

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{T}{m} f(\varphi_i, z(k), u(k)); \quad (72)$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

که $\varphi_0 = x(k)$ و $\varphi_m = x(k+1)$ است. حال تابع $f(\cdot)$ حول φ_0 توسط سری تیلور مرتبه اول بسط داده می شود.

$$f(\varphi_i, z(k), u(k)) = f(\varphi_0, z(k), u(k)) + F'(\varphi_0, z(k), u(k))(\varphi_i - \varphi_0) \quad (73)$$

که در آن $F'(\varphi_0, z(k), u(k))$ به شکل رابطه دوم ۱۲ قابل محاسبه است. بنابراین با جای گذاری رابطه ۷۳ در ۷۲، رابطه ۷۴ به دست می آید.

$$\varphi_{i+1} = \left[I_m + \frac{T}{m} F'(k) \right] \varphi_i + \frac{T}{m} [f(k) - F'(k)\varphi_0] \quad (74)$$

که در آن برای سادگی، $F'(\varphi_0, z(k), u(k))$ و $f(\varphi_0, z(k), u(k))$ به ترتیب به صورت $F'(k)$ و $f(k)$ نمایش داده شده اند. همچنین I_m بیانگر ماتریس همانی مرتبه m است. با استفاده از رابطه ۷۴ می توان به سادگی رابطه بین φ_m و φ_0 را به صورت زیر به دست آورد.

$$\varphi_m = \varphi_0 + \frac{T}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[I_m + \frac{T}{m} F'(k) \right]^i \cdot f(k) \quad (75)$$

در صورتی که $m \rightarrow \infty$ باشد، پیوستگی سیستم حاصل می شود. بنابراین:

$$x(k+1) = x(k) + \left(\int_0^T \exp[F'(k)t] dt \right) \cdot f(k) \quad (76)$$

که معادل رابطه ۱۱ است.

اثبات لم ۲: با توجه به روابط ۱۸، ۳۴ و ۵۷ دینامیک $\Delta_\xi(k+1)$ به صورت ۷۷ به دست می آید.

$$\Delta_\xi(k+1) = -C_\xi(k+1)\hat{E}_\xi(k+1)\hat{B}\tau(k+1) + (E_\xi(k+1)A_1 - \hat{E}_\xi(k+1)\hat{A}_1)\xi(k+1) \quad (77)$$

$$+ (E_\xi(k+1)A_2 - \hat{E}_\xi(k+1)\hat{A}_2) \text{sign}(\xi(k+1))$$

با جای گذاری $\tau(k+1)$ از رابطه ۴۰ در رابطه ۷۷، دینامیک $\Delta_\xi(k+1)$ به صورت رابطه ۷۸ به دست می آید.

$$\Delta_\xi(k+1) = C_\xi(k+1)\Delta_\xi(k) + H(k+1) \quad (78)$$

که در آن:

$$H(k+1) = E_\xi(k+1)(A_1 - B\hat{B}^{-1}\hat{A}_1)\xi(k+1)$$

$$\begin{aligned} &+ E_\xi(k+1)(A_2 - B\hat{B}^{-1}\hat{A}_2) \text{sign}(\xi(k+1)) \\ &+ C_\xi(k+1)[\xi_d(k+1) - \xi_d(k+2) - q\lambda e_\xi(k+1) \\ &- \eta_\xi(k+1) * \text{sign}(s(k+1))] \\ &+ \frac{1}{4} \Gamma^{-1} q^{-1} s(k+1)] \end{aligned} \quad (79)$$

حال تابع لیپانوف به شکل رابطه ۸۰ تعریف می شود.

$$\Pi(k+1) = \Delta_\xi^T(k+1)\Delta_\xi(k+1) \quad (80)$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۷۸، رابطه ۸۱ به دست می آید.

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(k+1) &= -\Delta_\xi^T(k) \left(I_3 - C_\xi^T(k+1)C_\xi(k+1) \right) \Delta_\xi(k) \\ &+ 2H^T(k+1)C_\xi(k)\Delta_\xi(k) + H^T(k+1)H(k+1) \\ &\leq -(1-\mu_\xi)(1-c_\xi^2) \|\Delta_\xi(k)\|^2 \\ &+ [-\mu_\xi(1-c_\xi^2) \|\Delta_\xi(k)\|^2 \\ &+ 2c_\xi^2 \|H(k+1)\| \|\Delta_\xi(k)\| \\ &+ \|H(k+1)\|^2 - \rho^2] + \rho^2 \end{aligned} \quad (81)$$

که $0 < \mu_\xi < 1$ یک مقدار ثابت، c_ξ^* بیشترین مقدار ویژه C_ξ بوده و

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{c_\xi^{*2}}{\mu_\xi(1-c_\xi^2)}} H^* \quad (82)$$

است. به سادگی می توان نشان داد که اگر:

$$\|H(k+1)\| \leq H^* \quad (83)$$

آن گاه:

$$\Delta \Pi(k+1) \leq -(1-\mu_\xi)(1-c_\xi^2) \|\Delta_\xi(k)\|^2 + \rho^2 \quad (84)$$

اگر H^* به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، یک مقدار k_1 وجود دارد که به ازای هر $k \leq k_1$ شرط رابطه ۸۳ برقرار باشد. ما در اینجا قصد داریم مقدار H^* را به نحوی تعیین کنیم که شرط ۸۳ برای هر مقدار $k \geq 0$ برقرار باشد. بنابراین با توجه به روابط ۸۰ و ۸۴، رابطه ۸۵ حاصل می شود.

$$\Pi(k+1) \leq -(1-\delta_\xi)\Pi(k) + \rho^2 \quad (85)$$

که در آن $\delta_\xi = (1-\mu_\xi)(1-c_\xi^2)$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \Pi(k+1) &\leq (1-\delta_\xi)^{k+1} \Pi(0) + \frac{\rho^2}{\delta_\xi} (1 \\ &- (1-\delta_\xi)^{k+1}) \end{aligned} \quad (86)$$

است، لذا اگر $0 < \delta_\xi < 1$ برقرار باشد، می توان رابطه ۸۷ را نتیجه گرفت.

$$\|\Delta_\xi(k+1)\| \leq \|\Delta_\xi(0)\| \quad (87)$$

حال با استفاده از روابط ۷۸ و ۸۷، رابطه ۸۸ حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \|H(k+1)\| &= \|\Delta_\xi(k+1) - C_\xi(k+1)\Delta_\xi(k)\| \\ &\leq (1+c_\xi^*) \|\Delta_\xi(0)\| \end{aligned} \quad (88)$$

بنابراین اگر H^* به نحوی انتخاب شود که:

$$H^* \geq (1+c_\xi^*) \|\Delta_\xi(0)\| \quad (89)$$

- delay control approach. IEEE Transactions on Power Electronics. 2001;16(1):72-82.
- 16- Wang YX, Yu DH, Kim YB. Robust time-delay control for the DC-DC boost converter. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2014;61(9):4829-4837.
- 17- Jung JH, Chang PH, Stefanov D. Discretisation method and stability criteria for non-linear systems under discrete-time time delay control. IET Control Theory and Applications. 2011;5(11):1264-1276.
- 18- Youcef-Toumi K, Reddy S. Analysis of linear time invariant systems with time delay. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1992;114(4):544-555.
- 19- Lee J, Medrano-Cerda GA, Jung JH. Corrections for discretisation method and stability criteria for non-linear systems under discrete-time time delay control. IET Control Theory and Applications. 2016;10(14):1751-1754.
- 20- Watanabe K, Shiraishi Y, Tzafestas SG, Tang J, Fukuda T. Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots. Journal of Intelligent and Robotic Systems. 1998;22(3-4):315-330.
- 21- Mazare M, Ghanbari P, Kazemi MG, Najafi MR. Dynamic modeling and optimal adaptive robust control of an omni directional mobile robot using harmony search. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(8):191-200. [Persian]
- 22- Huang JT, Van Hung T, Tseng ML. Smooth switching robust adaptive control for omnidirectional mobile robots. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015;23(5):1986-1993.
- 23- Abidi K, Xu JX. Advanced discrete-time control: Designs and applications. 1st Edition. Berlin: Springer; 2015.
- 24- Seatzu C, Silva M, Van Schuppen JH, editors. Control of discrete-event systems: Automata and petri net perspectives. 1st Edition. Berlin: Springer; 2013.
- 25- Hashemi E, Jadidi MG, Jadidi NG. Model-based PI-fuzzy control of four-wheeled omni-directional mobile robots. Robotics and Autonomous Systems. 2011;59(11):930-942.
- 26- Treesatayapun C. A discrete-time stable controller for an omni-directional mobile robot based on an approximated model. Control Engineering Practice. 2011;19(2):194-203.
- 27- Velasco-Villa M, Alvarez-Aguirre A, Rivera-Zago G. Discrete-time control of an omnidirectional mobile robot subject to transport delay. Proceeding of American Control Conference, 9-13 July, 2007, New York, NY, USA. Piscataway: IEEE; 2007. pp. 2171-2176.
- 28- Jamali P, Tabatabaei SM, Sohrabi O, Seifipour N. Software based modeling, simulation and fuzzy control of a Mecanum wheeled mobile robot. Proceeding of First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics, 13-15 Feb, 2013, Tehran, Iran. Piscataway: IEEE; 2013. pp. 200-204. [Persian]
- 29- Barreto S JCL, Conceição AGS, Dórea CET, Martinez L, De Pieri ER. Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2014;19(2):467-476.
- 30- Bingulac S, Vanlandingham HF. Discretization and continualization of MIMO systems. IFAC Proceedings Volumes. 1993;26(2):625-628.
- 31- Baruh H. Analytical dynamics. Pennsylvania: McGraw-Hill; 1999.

باشد، آن گاه با توجه به این که کران بالای $\|H(k+1)\|$ در رابطه ۸۸ تابعی نزولی از k است، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $k \geq k_1$ رابطه ۹۰ به دست می‌آید.

$$\|H(k+1)\| \leq \|H(k_1+1)\| \leq (1+c_{\xi}^*)\|\Delta_{\xi}(0)\| \leq H^* \quad (90)$$

بنابراین $\Delta_{\xi}(k+1)$ به صورت ۸۷ کران‌دار است و در نتیجه $|\tilde{\Delta}_{\xi}(k+1)| = |\Delta_{\xi}(k+1) - \Delta_{\xi}(k)|$ نیز کران‌دار خواهد بود.

منابع

- 1- Baik IC, Kim KH, Youn MJ. Robust nonlinear speed control of PM synchronous motor using boundary layer integral sliding mode control technique. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2000;8(1):47-54.
- 2- Bartolini G, Levant A, Pisano A, Usai E. Adaptive second-order sliding mode control with uncertainty compensation. International Journal of Control. 2016;89(9):1747-1758.
- 3- Zhou F, Fisher DG. Continuous sliding mode control. International Journal of Control. 1992;55(2):313-327.
- 4- Li H, Shi P, Yao D, Wu L. Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear Markovian jump systems. Automatica. 2016;64(C):133-142.
- 5- Keymasi Khalaji A, Moosavian SAA. Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer. Modares Mechanical Engineering. 2014;14(4):91-98. [Persian]
- 6- Sun T, Pei H, Pan Y, Zhou H, Zhang C. Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators. Neurocomputing. 2011;74(14-15):2377-2384.
- 7- Baek J, Jin M, Han S. A new adaptive sliding-mode control scheme for application to robot manipulators. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2016;63(6):3628-3637.
- 8- Hsia TCS. A new technique for robust control of servo systems. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 1989;36(1):1-7.
- 9- Youcef-Toumi K, Wu S-T. Input/output linearization using time delay control. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1992;114(1):10-19.
- 10- Youcef-Toumi K, Ito O. A time delay controller for systems with unknown dynamics. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. 1990;112(1):133-142.
- 11- Hsia TCS, Lasky TA, Guo Z. Robust independent joint controller design for industrial robot manipulators. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 1991;38(1):21-25.
- 12- Kali Y, Saad M, Benjelloun K, Fatemi A. Discrete-time second order sliding mode with time delay control for uncertain robot manipulators. Robotics and Autonomous Systems. 2017;94:53-60.
- 13- Chang PH, Lee SJ. A straight-line motion tracking control of hydraulic excavator system. Mechatronics. 2002;12(1):119-138.
- 14- Chang PH, Park SH, Lee JH. A reduced order time-delay control for highly simplified brushless DC motor. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. 1999;121(3):556-560.
- 15- Kim KH, Youn MJ. A simple and robust digital current control technique of a PM synchronous motor using time

IEEE Transactions on Automatic Control. 1987;32(10):930-932.

34- Xu JX, Cao WJ. Synthesized sliding mode and time-delay control for a class of uncertain systems. Automatica. 2000;36(12):1909-1914.

32- Jankowski K. Dynamics of double pendulum with parametric vertical excitation [Dissertation]. Lodz: Technical University of Lodz; 2011.

33- Sarpturk S, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems.