



Electric Response of Piezoelectric Nonlinear Beam with the Harmonic Base Excitation and Change Concentrated Mass

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Jabbari M.* PhD

How to cite this article

Jabbari M. Electric Response of Piezoelectric Nonlinear Beam with the Harmonic Base Excitation and Change Concentrated Mass. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(2):467-474.

ABSTRACT

The structural vibrations are the important sources of the energy harvesting, which can be produced from the harmonic excitation. The piezoelectric structure behavior is simulated by the electromechanical coupling. The flexible beam has the large strain. The results of linear theories are not proper. The large strains effect on the results response and the nonlinear behavior must be considered. The Newmark method is used to solve the equations of motion and coupled equations. Regarding the type of proportional damping, the nonlinear hardness effect is also applied to the damping calculation. This paper presents the electric response of the piezoelectric nonlinear beam with the harmonic base excitation by the numerical and experimental methods. The program of finite elements is developed for the numerical results and the electric response is obtained. The theories results are verified by the results of experimental. The experimental results are used for the piezoelectric bimorph beam with the change of concentrated mass position. The effect of piezoelectric property in the frequency response of nonlinear beam is presented. The results show the effect of piezoelectric properties on the frequency response of the nonlinear beam and the effect of the concentrated mass position on the output voltage, and the most suitable position of the concentrated mass position is presented to obtain the highest voltage response.

Keywords Piezoelectric; Nonlinear Beam; Harmonic Excitation; Concentrated Mass

CITATION LINKS

[1] A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics [2] Design considerations for MEMS-Scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters [3] Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting [4] Characterization of different beam shapes for piezoelectric energy harvesting [5] Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials [6] Comment on topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials [7] Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters [8] Multimodal energy harvesting system: Piezoelectric and electromagnetic [9] Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply [10] AVibration-to-electric energy conversion [11] On the efficiencies of piezoelectric energy harvesting circuits towards storage device voltages [12] Design of piezoelectric energy harvesting systems: A topology optimization approach based on multilayer plates and shells [13] Designing energy harvesting skin structure utilizing outdoor unit vibration. ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering [14] A new piezoelectric energy harvesting design concept: Multimodal energy harvesting skin [15] Nonlinear kinetic energy harvesting. The European Future Technologies Conference and Exhibition 2011 [16] Power enhancement for piezoelectric energy harvester [17] The effect of strain nodes on the energy harvesting of the cantilever piezoelectric beam with the vibration mode excitation [18] Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches [19] Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nano actuator using nonlocal elasticity theory [20] Dynamics analysis of the steady and transient states of a nonlinear piezoelectric beam by a finite element method [21] Experimental and numerical results of Dynamics behavior of a nonlinear piezoelectric beam [22] Dynamics of Structures [23] Energy harvesting of a multilayer piezoelectric beam in resonance and off-resonance cases

*Mechanical Engineering Department, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

Phone: -

Fax: +98 (31) 32654834
jabbari@iaukhsh.ac.ir

Article History

Received: April 22, 2018

Accepted: November 03, 2018

ePublished: February 01, 2019

پاسخ الکتریکی تیر غیرخطی پیزوالکتریک حاصل از تحریک هارمونیک پایه تیر و تغییر موقعیت جرم متمرکز

مجید جباری* PhD

گروه مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، ایران

چکیده

ارتعاشات سازه یک منبع مهم برای برداشت انرژی است که می‌تواند با تحریک هارمونیک حاصل شود. رفتار سازه پیزوالکتریک با جفت‌شدگی بین پارامترهای الکتریکی و مکانیکی مدل می‌شود. این مدل می‌تواند به‌صورت تیر انعطاف‌پذیری باشد که در آن کرنش‌های بزرگ ایجاد می‌شود. کرنش‌ها و تغییر شکل چرخشی بزرگ در رفتار سازه غیرخطی باعث می‌شود که نتایج حاصل از تئوری خطی مناسب و قابل قبول نباشند و در این حالت باید از تئوری غیرخطی استفاده شود. برای حل معادلات حرکت و کوپل بین معادلات از روش نیومارک استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن نوع میرایی تناسبی اثر سختی غیرخطی نیز در محاسبه میرایی اعمال شود. در این تحقیق، راستی‌آزمایی نتایج روش عددی اجزا محدود با روش تجربی برای بررسی پاسخ تیر نمونه غیرخطی پیزوالکتریک با تحریک هارمونیک پایه می‌شود. برای بررسی نتایج در روش عددی، برنامه اجزای محدود توسعه داده شده و پاسخ الکتریکی تیر غیرخطی پیزوالکتریک حاصل می‌شود. اجرای آزمایش روی تیر پیزوالکتریک دوشکلی با وجود جرم متمرکز و جابه‌جایی آن در طول تیر تحت تحریک بار هارمونیک و مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایش صورت می‌گیرد. نتایج حاصله تاثیر خصوصیت پیزوالکتریک در پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی و اثر موقعیت جرم متمرکز در ولتاژ خروجی را نشان داده و مناسب‌ترین حالت موقعیت جرم متمرکز برای حصول بیشترین پاسخ ولتاژ ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: پیزوالکتریک، تیر غیرخطی، تحریک هارمونیک، جرم متمرکز

تاریخ دریافت: ۹۷/۲/۲۰

تاریخ پذیرش: ۹۷/۸/۱۲

*نویسنده مسئول: jabbari@iaukhsh.ac.ir

۱- مقدمه

برداشت انرژی با استفاده از ارتعاشات موجود محیطی در سال‌های اخیر مورد توجه بیشتری واقع شده است. نوسانات و لرزش‌های موجود در دستگاه‌های مکانیکی از جمله انرژی‌هایی هستند که با استفاده از مواد هوشمند مانند پیزوالکتریک می‌توان آنها را به‌صورت انرژی الکتریکی تبدیل و به نوعی بازیافت کرد. مزیت اصلی مواد پیزوالکتریک در برداشت انرژی، وجود دانسیته توان بالا و کاربرد ساده آن است.

تحقیقات در حوزه برداشت انرژی پیزوالکتریک با مفاهیم مکانیزم سازه ارتعاشی، تئوری مدار الکتریکی و رفتار ساختاری مواد پیزوالکتریک در ارتباط خواهد بود. در واقع مدل برداشت انرژی ارتعاشی با استفاده از مواد پیزوالکتریک، حصول ولتاژ الکتریکی در بار مقاومتی در اثر حرکت پایه سازه است و آن گاه ولتاژ خروجی برای محاسبه توان منتقل‌شده به بار مقاومتی استفاده می‌شود. بررسی ولتاژ در بار مقاومتی متصل‌شده به الکترودهای برداشت‌کننده ارتعاشی تحت تحریک پایه به‌وسیله محققان مختلفی انجام شده است. در مدل ریاضی ساده از پارامتر جرم توده‌ای سیستم یک‌درجه آزادی استفاده شده است. چنین مدلی دارای یک خازن ناشی از ظرفیت الکتریکی داخلی پیزوالکتریک و یک بار مقاومتی خارجی است. سپس معادلات مکانیکی و الکتریکی با استفاده از معادلات ساختاری پیزوالکتریک با یکدیگر کوپل می‌شوند و رابطه تبدیل انرژی ارتعاشی به الکتریکی حاصل می‌شود. این روشی بود که راندی و رایت^[1] و همچنین دوتویت و همکاران^[2] در مدل جرم توده‌ای ارائه کردند. اگر چه مدل توده‌ای،

توصیف اولیه‌ای نسبت به مساله ارائه می‌کند، ولی این روش تقریبی است که برای مود اول ارتعاشی می‌تواند به کار رود. در مدل توده‌ای برای هر دو نوع ارتعاشات عرضی و طولی، از تاثیر جرم گسترده (جرم فنر در مدل توده‌ای) در دامنه اجباری با تحریک پایه صرف نظر می‌شود. تاثیر جرم گسترده در دامنه تحریک می‌تواند مهم باشد، به‌خصوص اگر برداشت‌کننده انرژی دارای جرم متمرکز خیلی بزرگی نباشد.

مدل مناسب‌تری با استفاده از روش ریلی- ریتز برای پیزوالکتریک به‌وسیله سودانو و همکاران^[3] برای مدل برداشت‌کننده انرژی تیر یک‌سردگر به کار برده شد. مدل ریلی- ریتز نتایج مناسب‌تری نسبت به روش جرم توده‌ای یک‌درجه آزادی ارائه می‌کند. این روش درجات آزادی مکانیکی را از نامحدود به محدود تبدیل می‌کند و معمولاً محاسبات آن نسبت به روش تحلیلی (اگر قابل انجام باشد) زمان بیشتری می‌طلبد.

یکی از مطالعاتی که توسط محققان مورد توجه قرار گرفته، افزایش و ارتقای تولید انرژی با ارائه طرح‌های جدید برای سیستم‌های برداشت انرژی است. در این مورد گلد/شمیت-بوتینگ و ویاس^[4] برخی مطالعات را در زمینه پارامترهای موثر در افزایش برداشت انرژی الکتریکی پیزوالکتریک انجام داده و نشان داده‌اند که طرح مقطع دوزنقه‌ای به‌علت تغییر شکل بزرگ یکنواخت در همه نقاط روی سطح، نسبت به شکل مستطیلی کارایی بیشتری برای تولید انرژی پیزوالکتریک دارد. ژنگ و همکاران^[5] بهینه‌کردن یک تیر بر پایه پیزوالکتریک با حداکثر کردن فاکتور تبدیل انرژی را بررسی کردند. در این روش محدودیت‌هایی شامل مدار الکتریکی وجود داشت که توسط سیلو^[6] ارائه شده است. /رتزک و /بنمان^[7] با چند فرضیه ساده فیزیکی مدل ریاضی، وسایل تولید انرژی را ارائه کردند. آنها اختلافات مربوط به دو نوع مدل شامل مدل جرم توده‌ای و پارامترهای توزیع‌یافته را نشان دادند. در این تحقیق با به‌کارگیری ضریب تصحیح مدل، نتایج تحلیلی مناسبی مطابق با نتایج تجربی حاصل شد و بررسی پارامترها و خصوصیات تاثیرگذار بر عملکرد برداشت انرژی مورد توجه قرار گرفت. در عین حال ملاحظه شد که انتخاب مواد مناسب یک فاکتور بسیار مهم برای تجهیزات تولید انرژی پیزوالکتریک است. آنها انواع مختلف مواد پیزوالکتریک را معرفی کرده و راندمان تبدیل انرژی مواد و تاثیر ضرایب پیزوالکتریک در برداشت انرژی را مقایسه و توان بیشینه را در بار مقاومتی بهینه حاصل نموده‌اند.

برای ارتقای ظرفیت تولید انرژی، تادسه و همکاران^[8] یک وسیله هیبریدی پیزوالکتریک برای تولید انرژی را ارائه کردند که شامل اصول تبدیل پیزوالکتریک و الکترومغناطیس است. مدل مربوطه، تیر یک‌سرگرداری است که تحت میدان مغناطیسی قرار گرفته و وصله‌های پیزوالکتریک برای تولید انرژی از فرکانس‌های محرک روی آن نصب شده‌اند. /وتمن و همکاران^[9] مدار مبدلی را طراحی و توسعه داده‌اند که امپدانس آن مطابق با وسیله پیزوالکتریک تغییر می‌کند. در پیشنهاد آنها طرحی ارائه شد که بتوان حداکثر توان خروجی از یک وسیله پیزوالکتریک را به دست آورد. منیگر و همکاران^[10] یک سیستم برداشت انرژی را توسعه دادند که در آن از یک خازن برای تامین انتقال انرژی اضافی استفاده شود. در این طرح با استفاده از تبدیل ارتعاشات به انرژی الکتریکی، توان قابل استفاده برای سیستم‌های میکروالکترومکانیک حاصل می‌شود. استفاده از این انرژی در کنترلرها نیز در این مقاله ارائه شده است. گوآن و لیا^[11] راندمان مدارات برداشت انرژی را با توجه به ولتاژهای دستگاه ذخیره‌کننده مطالعه کرده‌اند. در این مقاله دو

وصله‌های پیزوالکتریک را مورد تحقیق قرار دادند. آنها با استفاده از روش تحلیلی در حل معادلات جفت‌شدگی الکترومکانیک، روش بهینه‌سازی عملگر پیزوالکتریک را ارایه کردند. کاغذیان و همکاران^[19] به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانو تحت عملگر دوشکلی پیزوالکتریک پرداختند. در تحقیق آنها از الاستیسیته غیرموضعی و تئوری تیر اویلر-برنولی برای استخراج معادلات ارتعاشات غیرخطی، استفاده و نتایج خیز استاتیکی و فرکانس طبیعی حاصل شده است. جباری و همکاران^[20] به تحلیل دینامیک تیر غیرخطی پیزوالکتریک با استفاده از روش اجزای محدود در حالات گذرا و دایمی پرداختند. در شرایط گذرا رفتار سازه به‌طور مشخصی نسبت به حالت دایمی تغییر می‌کند.

براساس تحقیقات انجام‌شده ملاحظه می‌شود که روش محاسباتی با استفاده از روش نیومارک برای حصول نتایج عددی با دقت مناسب‌تر، به‌کارگیری ضریب میرایی غیرخطی با توجه به رفتار سازه غیرخطی و به‌دست‌آوردن مناسب‌ترین حالت موقعیت جرم متمرکز برای حصول بیشترین پاسخ ولتاژ از مواردی بوده که در پژوهش‌های قبلی مورد توجه قرار نگرفته است.

هدف عمده این تحقیق، بررسی پاسخ الکتریکی تیر غیرخطی پیزوالکتریک با تحریک مودهای ارتعاشی برای برداشت انرژی و اعتبارسنجی نتایج با آزمایش برای کاربرد در صنایع هواپیماسازی و خودروسازی است. با استفاده از روابط جفت‌شدگی الکترومکانیک و اصل هامیلتون، معادلات حرکت استخراج می‌شود. با توجه به وجود تحلیل دینامیک و شرایط غیرخطی برای حل معادلات از روش نیومارک و تکرار استفاده می‌شود. با به‌کارگیری برنامه اجزای محدود، تحلیل دینامیک تیر غیرخطی پیزوالکتریک انجام می‌شود و با اجرای آزمایش، نتایج عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تیر پیزوالکتریک از نوع دوشکلی با اتصال سری انتخاب شده است. پاسخ تجربی و عددی ولتاژ در محدوده فرکانس‌های تشدید اول و دوم برای تیر دوشکلی در وضعیت مدار باز حاصل می‌شود و تغییرات فرکانس‌های تشدید اول و دوم تیر پیزوالکتریک برای تغییر موقعیت جرم متمرکز به دست می‌آید. همچنین بهترین حالت موقعیت جرم متمرکز برای بیشترین پاسخ ولتاژ حاصل می‌شود.

۲- تئوری

المان تیر پیزوالکتریک براساس تئوری اویلر-برنولی انتخاب شده است. در این مدل فرض می‌شود که طول تیر نسبت به ضخامت آن بزرگ باشد، بنابراین اثر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی در این مدل صرف نظر می‌شود. معادلات حرکت با رابطه ۱ براساس اصل هامیلتون به دست می‌آیند^[21].

$$(1) \quad [M]\{\ddot{v}\} + ([K^{vv}] + [K_N^{vv}])\{\dot{v}\} + ([K^{v\varphi}] + [K_N^{v\varphi}])\{\dot{\varphi}\} = \{f^v\}$$

$$([K^{\varphi v}] + [K_N^{\varphi v}])\{\dot{v}\} + ([K^{\varphi\varphi}])\{\dot{\varphi}\} = \{f^{\varphi}\}$$

$[M]$ ماتریس جرم، $\{\dot{v}\}$ بردار جابه‌جایی، $\{\dot{\varphi}\}$ بردار پتانسیل، $[K^{vv}]$ ماتریس سختی خطی، $[K^{v\varphi}]$ ماتریس جفت‌شدگی خطی پیزوالکتریک، $[K^{\varphi\varphi}]$ ماتریس دی‌الکتریک، $[K_N^{vv}]$ ماتریس سختی غیرخطی و $[K_N^{v\varphi}]$ ماتریس جفت‌شدگی غیرخطی پیزوالکتریک هستند.

براساس روابط حاصل، تاثیر غیرخطی در ماتریس سختی و ماتریس جفت‌شدگی پیزوالکتریک است که باعث تغییر پاسخ الکتریکی

طرح برداشت انرژی یک‌مرحله‌ای و دومرحله‌ای، ارایه و انجام آزمایش و مقایسه نتایج برای حالت یک‌مرحله‌ای انجام شده است و نتایج نشان می‌دهد که برداشت انرژی یک‌مرحله‌ای تاثیر بیشتری نسبت به طرح دومرحله‌ای دارد. راپ و همکاران^[12] یک روش طراحی به‌منظور یک سیستم تولید انرژی پیزوالکتریک برای پوسته چندلایه توسعه داده‌اند که در آن خصوصیات ماده پیزوالکتریک و مقاومت آن به‌عنوان فاکتورهای طراحی در نظر گرفته و شبیه‌سازی می‌شوند.

به‌منظور افزایش در برداشت انرژی الکتریکی از نوسانات و ارتعاشات، طرح جدیدی به‌نام پوسته برداشت انرژی ارایه شد. در این طرح، تکه‌های نازک پیزوالکتریک روی یک صفحه نوسانی قرار می‌گیرند تا انرژی الکتریکی به دست آید. پوسته ارتعاشی در انواع مختلف سیستم‌های مهندسی (مانند وسایل نقلیه، وسایل برقی خانگی، تجهیزات تهویه مطبوع و غیره) نقش بدنه را ایفا می‌کنند. یک روش عملی از این مدل توسط لی و همکاران^[13] ارایه شده که استفاده از پوسته پیزوالکتریک در یک واحد چگالنده است. در این مدل از تکه‌های مستطیلی پیزوالکتریک روی سازه با استفاده از اپوکسی و سیم به‌همراه یک‌سوکننده و خازن برای تولید حدود ۳/۷ میلی‌وات استفاده شده است. این مدل را به‌نام پوسته تولید انرژی پیزوالکتریک تک‌مودال می‌شناسند. زیرا از یک مود ارتعاشی در فرکانس اول هارمونیک حدود ۶۰ هرتز استفاده می‌شود و سایر مودهای هارمونیک به هدر می‌روند. لی و یوان^[14] طرح جدید برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک را با استفاده از مودهای چندگانه ارتعاشی ارایه کردند. در این روش در مدل پیزوالکتریک، الکترودها به‌صورت بخش‌های جداشده قرار گرفتند تا حذف انرژی الکتریکی در اثر شکل مودها به حداقل برسد. آنها با محاسبه مودهای ارتعاشی و شکل مودها، موقعیت‌های تغییر فاز ولتاژ را شناسایی کردند که در این موقعیت‌ها، برش الکترودها ایجاد می‌شود تا بیشترین توان از مودهای ارتعاشی حاصل شود. این روش در نمونه‌های سازه‌ای اجرا و آزمایش شد که می‌توان به سازه یک فن و پوسته هواپیما اشاره کرد. کاتون و همکاران^[15] برداشت انرژی از ماده پیزوالکتریک را ارایه کردند. در این مقاله ابتدا به پارامترهای موثر در برداشت انرژی پرداخته و سپس انرژی‌های میکرو برای تجهیزات میکروبی توضیح داده شده است. ارایه نمونه‌ای برای برداشت انرژی ارتعاشی و مدل ریاضی آن نیز در ادامه بیان شده است. ابرهیم و علی^[16] تحقیقی در مورد افزایش توان برداشت انرژی پیزوالکتریک انجام دادند. مدل مورد نظر آنها تیر پیزوالکتریک با جرم متمرکز است. در این مقاله شرایط مورد نیاز برای افزایش توان الکتریکی از انرژی ارتعاشی تحریک‌شده با استفاده از مواد پیزوالکتریک، بیان و برای به‌دست‌آوردن ماکزیمم توان از بهینه‌کردن امپدانس استفاده شده است. برای بررسی نتایج از آزمایش، استفاده و با نتایج تئوری مقایسه شده است. در این مقاله به برداشت انرژی از ارتعاشات موجود به‌عنوان منبع انرژی پرداخته و نمونه‌ای از سیستم برداشت انرژی ارایه شده است. جباری^[17] تاثیر گره‌های کرنشی در برداشت انرژی تیر پیزوالکتریک با تحریک مودهای ارتعاشی را ارایه کرد. در این پژوهش با روش‌های تئوری و تجربی، تاثیر گره‌های کرنشی در برداشت انرژی از تیر یک‌سردگر پیزوالکتریک در حالات فرکانس تحریک تشدید و غیرتشدید مورد بررسی واقع می‌شود. در عین حال تاثیر بار مقاومتی روی نتایج ولتاژ و توان خروجی و حصول بار مقاومتی بهینه مورد توجه قرار می‌گیرد.

علیقلی‌زاده و همکاران^[18] کنترل فعال ارتعاش تیر یک‌سردگر با

سازه نسبت به تئوری خطی می‌شود.

ضرایب ماتریسی در معادلات حرکت در روابط ۲ ارایه شده است. وابستگی ضرایب غیرخطی سختی و جفت‌شدگی پیزوالکتریک به مقادیر بردار جابه‌جایی باعث ایجاد معادله پیچیده غیرخطی می‌شود که از روش تکرار برای همگرایی در حل معادله استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} [K^{vv}] &= \int_V [B_v^L]^T [c^E] [B_v^L] dV \\ [K^{v\varphi}] &= \int_V [B_v^L]^T [e]^T [B^\varphi] dV = [K^{v\varphi}]^T \\ [K^{\varphi\varphi}] &= - \int_V [B^\varphi]^T [\epsilon^S]^T [B^\varphi] dV \\ [K_N^{vv}] &= \frac{1}{2} \int_V ([B_v^L]^T [c^E] [B_v^N] + [B_v^N]^T [c^E] [B_v^L] \\ &\quad + [B_v^N]^T [c^E] [B_v^N]) dV \\ [K_N^{v\varphi}] &= \frac{1}{2} \int_V [B_v^N]^T [e]^T [B^\varphi] dV = [K_N^{v\varphi}]^T \\ [M] &= \int_V [N^v]^T \rho [N^v] dV \end{aligned} \quad (۲)$$

ρ جرم حجمی، $[B_v^L]$ و $[B^\varphi]$ مشتق توابع شکل، $[B_v^N]$ مشتق تابع شکل غیرخطی، $[e]$ ماتریس ضرایب تنش پیزوالکتریک برای تیر، $[c^E]$ ماتریس ضرایب الاستیسیته در میدان الکتریکی ثابت، $[\epsilon^S]$ ماتریس دی‌الکتریک در کرنش ثابت و $[N^v]$ توابع شکل درجات آزادی مکانیکی هستند.

با در نظر گرفتن خصوصیات غیرخطی، پاسخ جابه‌جایی و ولتاژ تیر پیزوالکتریک حاصل می‌شود. رفتار معادلات الکترومکانیک با توجه به روابط سختی به معادلات غیرخطی از نوع درجه سه نزدیک است. برای حل معادلات حرکت و کوپل بین معادلات از روش نیومارک استفاده می‌شود. روش نیومارک به‌منظور محاسبه بردار جابه‌جایی و پاسخ ولتاژ به کار می‌رود.

با در نظر گرفتن ضرایب میرایی ریلی $[C_c]$ ، معادله حرکت سازه غیرخطی پیزوالکتریک با اضافه شدن ترم $\{C_c\}\{\dot{v}\}$ می‌تواند به‌صورت رابطه ۳ حاصل شود [22].

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{v}\} + [C_c]\{\dot{v}\} + ([K^{vv}] + [K_N^{vv}])\{v\} \\ + ([K^{v\varphi}] + [K_N^{v\varphi}])\{\varphi\} \\ = \{f^v\} \end{aligned} \quad (۳)$$

$$([K^{\varphi\varphi}] + [K_N^{\varphi\varphi}])\{\ddot{\varphi}\} + ([K^{\varphi\varphi}])\{\dot{\varphi}\} = \{f^\varphi\}$$

باید توجه داشت که نوع اتصال لایه‌ها می‌تواند به‌صورت سری یا موازی باشد و تاثیر نوع اتصال در روابط معادله حرکت سازه پیزوالکتریک در ماتریس ضرایب پیزوالکتریک و دی‌الکتریک خواهد بود.

$\{f^\varphi\}$ بردار بار الکتریکی گرهی حاصل از اثر کار الکتریکی ناپایستار بوده و نرخ زمانی بار الکتریکی معادل با جریان الکتریکی عبور داده از بار مقاومتی (R_r) است که با رابطه ۴ بیان می‌شود [23].

$$\{f^\varphi\} = \frac{\{\dot{\varphi}\}}{R_r} \quad (۴)$$

بنابراین رابطه دوم معادله حرکت می‌تواند به‌صورت رابطه ۵ حاصل شود.

$$\frac{d}{dt}(K^{\varphi v} + K_N^{\varphi v})\{\dot{v}\} + [K^{\varphi\varphi}]\{\dot{\varphi}\} - \frac{\{\dot{\varphi}\}}{R_r} = 0 \quad (۵)$$

ماتریس میرایی با استفاده از میرایی تناسبی (از نوع ریلی) تعیین می‌شود که اغلب در بررسی رفتارهای ارتعاشی استفاده می‌شود. این نوع میرایی باعث می‌شود تا اثر سختی غیرخطی نیز در محاسبه میرایی اعمال شود. در این حالت، ماتریس میرایی با ترکیب ماتریس جرم و سختی کل به دست می‌آید. در تحلیل‌های دینامیک می‌توان با رابطه ۶ ماتریس میرایی را تعریف نمود [21].

$$[C_c] = \alpha_1 [M] + \alpha_2 [K^{vv} + K_N^{vv}] \quad (۶)$$

α_1 و α_2 با استفاده از فرکانس‌های تشدید (ω_n) و نسبت میرایی (ξ_n) با استفاده از رابطه ۷ حاصل می‌شود.

$$\xi_n = \frac{\alpha_1}{2\omega_n} + \frac{\alpha_2 \omega_n}{2} \quad (۷)$$

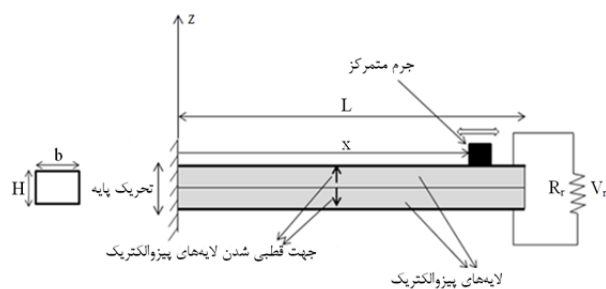
نسبت میرایی با استفاده از روش RAF قابل حصول است. در این روش از نتایج پاسخ فرکانسی حاصل از آزمایش روی نمونه استفاده می‌شود. با استفاده از اطلاعات ارایه شده از استانداردهای سازه نمونه مورد آزمایش، ضریب کیفیت سازه نمونه حاصل می‌شود. با استفاده از رابطه ۸ می‌توان نسبت میرایی را به دست آورد.

$$Q_n = \frac{1}{2\xi_n \sqrt{1 - \xi_n^2}} \quad (۸)$$

در این تحقیق برنامه اجزای محدود در نرم‌افزار MATLAB برای بررسی برداشت انرژی سازه تیر غیرخطی پیزوالکتریک تدوین شد.

۳- نمونه مورد آزمایش و تحلیل

با به‌کارگیری برنامه اجزای محدود، تحلیل دینامیک تیر غیرخطی پیزوالکتریک انجام می‌شود و با اجرای آزمایش، نتایج عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تیر پیزوالکتریک دوشکلی استفاده شده در این بخش در شکل ۱ نشان داده شده و دارای دو لایه پیزوالکتریک با اتصال سری است. لایه‌های پیزوالکتریک در شرایط مدار باز در نظر گرفته شده‌اند. خصوصیات هندسی و جنس تیر پیزوالکتریک در حالت یک‌سردرگیر در جدول‌های ۱ و ۲ از شرکت USTC (ارایه‌کننده قطعه نمونه پیزوالکتریک) نشان داده شده‌اند. تیر یک‌سردرگیر دوشکلی با جرم متمرکز ۰/۴ گرم تحت تحریک هارمونیک در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مقدار جرم متمرکز و جرم تیر ملاحظه می‌شود که نسبت جرم متمرکز به جرم تیر، ۰/۲۴ است. به عبارت دیگر مقدار جرم متمرکز به اندازه‌ای است که نمی‌توان از جرم آن صرف نظر کرد. همچنین نسبت طول به ضخامت تیر دوشکلی، ۵۲/۶ است و بنابراین مدل تیر اویلر-برنولی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۱) تیر پیزوالکتریک دوشکلی مورد استفاده در روش‌های عددی و تجربی

تیر پیزوالکتریک ارایه شده در روش عددی است. تیر دوشکلی PZT بدون لایه مرکزی بوده و نمونه برای آزمایش از شرکت USTC تهیه شده است. برای ایجاد شرایط تکیه‌گاهی گیردار از قطعات صلب پلی‌کربنات استفاده و تجهیزات آزمایش برای اندازه‌گیری پاسخ زمانی و فرکانسی در شکل ۲ نشان داده شده است. این تجهیزات شامل بخش‌های زیر هستند:

۱- دستگاه داده‌برداری (Data acquisition B&K PULSE 3560D) دارای دو کانال تولیدکننده سیگنال‌های سینوسی و تصادفی برای تغذیه به لرزاننده و دارای چهار کانال برای اندازه‌گیری شتاب است. این دستگاه همچنین دارای چهار بخش بوده که هر کدام از این بخش‌ها دارای شش کانال برای اندازه‌گیری پاسخ خروجی است.

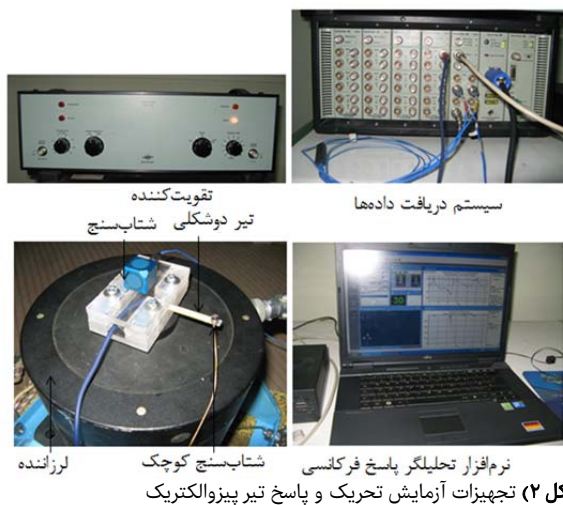
۲- دستگاه آمپلی‌فایر (Amplifier B&K 2712) که سیگنال تولیدشده توسط دستگاه داده‌برداری را تقویت و به لرزاننده ارسال می‌کند.

۳- لرزاننده (Shaker B&K 4808)

۴- نرم‌افزار اندازه‌گیری (Software B&K PULSE Labshop)

۵- شتاب‌سنج سه‌جهته (Acceleration PCB 356B08) که به‌وسیله موم روی تکیه‌گاهی که تیر پیزوالکتریک به آن متصل است، قرار می‌گیرد. این تکیه‌گاه به‌همراه تیر روی لرزاننده محکم می‌شود.

۶- شتاب‌سنج (Acceleration Endevco 2250A-10) که برای دو هدف استفاده می‌شود که عبارت از اثر جرم متمرکز و اندازه‌گیری شتاب خروجی است و در موقعیت مورد نظر روی تیر به‌وسیله چسب متصل می‌شود.



شکل ۲) تجهیزات آزمایش تحریک و پاسخ تیر پیزوالکتریک

طول تیر برای حل عددی باید طول موثر تیر در نظر گرفته شود که از موقعیت تکیه‌گاه تا سر تیر می‌باشد. تیر انتخابی دارای طول کل ۵۲/۷ میلی‌متر بوده که طول موثر آن ۴۰ میلی‌متر است. با توجه به معیار نایکویست برای تعیین نمونه‌برداری در محدوده فرکانسی صفر تا ۵۰۰۰ هرتز نیاز است تا نمونه‌برداری با گام ۰/۰۰۱ ثانیه انجام گیرد. این بخش به ارایه نتایج تجربی برای بررسی پاسخ الکتریکی تیر پیزوالکتریک می‌پردازد. از نتایج حاصل می‌توان برای بررسی و تایید نتایج عددی استفاده کرد. تیر یک‌سردرگیر با جرم متمرکز تحت تحریک پایه در نظر گرفته شده است. در نتایج عددی، پایه تیر دارای تکیه‌گاه گیردار است و بار تحریک هارمونیک روی تیر توزیع می‌شود. بار اعمالی باعث ایجاد بار عکس‌العمل در پایه تیر می‌شود.

جدول ۱) خصوصیات تیر پیزوالکتریک

پارامتر	مقدار
c_{11}^E (N/m ²)	$66/67 \times 10^9$
e_{31} (C/m ²)	-۱۴
ϵ_{33}^s (F/m)	$24/19 \times 10^{-1}$
ρ (kg/m ³)	۷۸۰۰
Q_1	۷۰
Q_2	۶۷

جدول ۲) ابعاد تیر پیزوالکتریک

L (mm)	b (mm)	H (mm)
۴۰	۷/۱	۰/۷۶

در جدول ۳ چهار حالت برای تغییر موقعیت جرم متمرکز ارایه شده است. این حالات برای روش‌های عددی و تجربی در نظر گرفته شده‌اند. روش مناسب برای به‌دست‌آوردن فرکانس‌های تشدید در حالت غیرخطی، حصول پاسخ ولتاژ یا جابه‌جایی در اثر تحریک با شتاب هارمونیک و بار مقاومتی مشخص با تغییر فرکانس تحریک است. این وضعیت در حالت آزمایش نیز به همین صورت انجام می‌شود.

جدول ۳) چهار حالت برای تغییر موقعیت جرم متمرکز ۰/۴ گرم

حالت	موقعیت جرم متمرکز x (mm)
۱	۴۰
۲	۳۰
۳	۲۰
۴	۲

برنامه تدوین شده اجزای محدود برای بررسی پاسخ زمانی حالت دایمی و گذرای تیر پیزوالکتریک تحت بار تحریک هارمونیک به کار می‌رود. قابل ذکر است که نتایج تجربی در حالت دایمی حاصل می‌شود و شرایط گذرا در حالت تجربی، قابل اندازه‌گیری نیست. بار تحریک هارمونیک با رابطه ۹ در نظر گرفته می‌شود. برای همه حالات، دامنه شتاب تحریک به‌کاررفته مقدار ۴/۵g (g شتاب جاذبه زمین) و فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس‌های تشدید تیر انتخاب شده است.

$$F = pbHa_d \cos \omega t \quad (9)$$

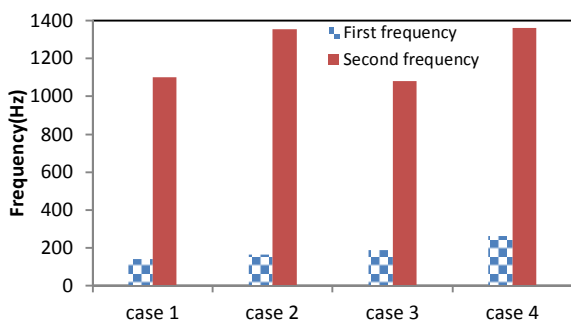
a_d دامنه شتاب تحریک، ω فرکانس تحریک، t زمان، ρ دانسیته، b عرض تیر و H ضخامت تیر هستند.

گام زمانی برای حل عددی ۰/۰۰۱ ثانیه و زمان پاسخ یک‌ثانیه در نظر گرفته شده است. بار مقاومتی موثر در حالت مدار باز حدود ۱۰۰۰ کیلوهم است. این مقدار براساس مقدار بار مقاومتی که بتواند شرایط مدار باز را تامین کند، انتخاب شده است. میرایی از نوع تناسبی با استفاده از رابطه ۶ در نظر گرفته شده است. در محاسبه نسبت میرایی از مقدار ضریب کیفیت حاصل از مشخصات ارایه شده از شرکت USTC استفاده شد. طبق خصوصیات مربوط به ضرایب کیفیت (Q_1 و Q_2) برای تیر پیزوالکتریک، نسبت‌های میرایی براساس رابطه ۸ و با توجه به نتایج آزمایش برابر با $\xi_1 = 0/00714$ و $\xi_2 = 0/00739$ حاصل می‌شود. از آنجایی که شرایط اولیه در پاسخ سازه غیرخطی موثر است، لذا در این مدل از شرایط اولیه جابه‌جایی و بردار پتانسیل الکتریکی صفر در زمان صفر استفاده و نتایج فرکانسی با استفاده از پاسخ ولتاژ بر حسب تغییر فرکانس تحریک حاصل شده است.

تیر یک‌سردرگیر دوشکلی در روش تجربی دارای همان خصوصیات

فرکانس‌های تحریک بر سازه اعمال می‌شود. فرکانس تحریکی که بیشترین پاسخ ولتاژ را حاصل کند، نزدیک فرکانس تشدید خواهد بود.

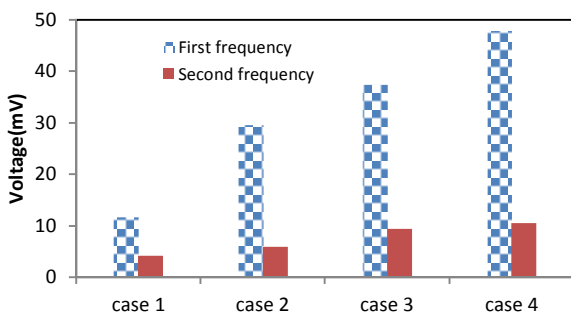
نمودار ۳، مقادیر فرکانس‌های تشدید اول و دوم تیر پیزوالکتریک برای تغییر موقعیت جرم متمرکز در روش‌های تجربی را نشان می‌دهد. طبق نمودارهای حاصل، تغییر مقادیر فرکانس‌های تشدید ارتعاشی وابسته به موقعیت جرم متمرکز است و نزدیک‌بودن موقعیت جرم متمرکز به گره کرنشی باعث می‌شود تا فرکانس تشدید دوم تیر در حالت ۳ نسبت به حالت ۲ کاهش یابد.



نمودار ۳) مقادیر فرکانس‌های تشدید اول و دوم تیر پیزوالکتریک برای حالات ۱ تا ۴ در روش‌های تجربی

نمودار ۴، دامنه ولتاژ خروجی تیر پیزوالکتریک برای حالت دایمی با وضعیت مدار باز در روش تجربی را نشان می‌دهد. نتایج حاصل مربوط به مقدار ولتاژ بیشینه در حالات فرکانس‌های تشدید اول و دوم هستند. طبق این نتایج، افزایش فرکانس تشدید اول باعث افزایش دامنه ولتاژ می‌شود.

با مقایسه نتایج پاسخ ولتاژ در روش‌های عددی و تجربی بیشترین مقدار خطا حدود ۲۰٪ به دست آمده است که می‌توان به‌عنوان خطای روش عددی در نظر گرفت.



نمودار ۴) دامنه ولتاژ خروجی تیر پیزوالکتریک در فرکانس‌های تشدید با وضعیت مدار باز در روش تجربی برای حالات ۱ تا ۴

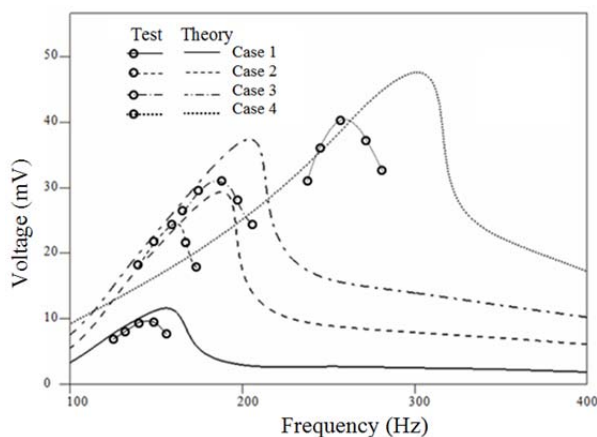
۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق بررسی پاسخ الکتریکی تیر غیرخطی پیزوالکتریک با وجود جرم متمرکز و تحریک هارمونیک در وضعیت مدار باز با روش‌های عددی و آزمایش ارایه شد. در تدوین مدل اجزای محدود، وجود شرایط غیرخطی و همچنین بار مقاومتی در برداشت انرژی باعث پیچیدگی روابط جفت‌شدگی خواهد شد. در این راستا به‌کارگیری شیوه‌های مناسب محاسباتی همانند روش نیومارک و روش تکرار مورد توجه قرار می‌گیرد.

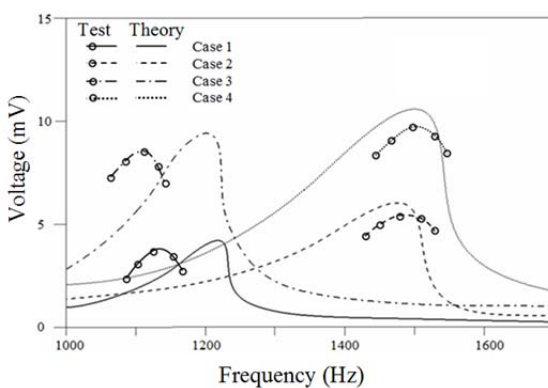
تیر نمونه پیزوالکتریک از نوع دوشکلی با اتصال سری و وجود میرایی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج روش عددی با نتایج

در روش آزمایشی، پایه تیر به‌وسیله لرزاننده تحریک می‌شود که بار تحریک معادل بار عکس‌العمل در روش عددی است. وجود تکیه‌گاه گیردار برای ابتدای تیر، شرایط شیب صفر را در پایه تیر فراهم می‌کند. به این ترتیب با اعمال بار تحریک در پایه، شرایط مدل تئوری برای مدل آزمایشی شبیه‌سازی می‌شود. لرزاننده، پایه تیر را در جهت Z تحریک می‌کند و شتاب ورودی در پایه تیر به‌وسیله شتاب‌سنج موجود در موقعیت تکیه‌گاه اندازه‌گیری می‌شود. حالات مورد نظر برای اجرای آزمایش در جدول ۳ ارایه شده است.

نمودارهای ۱ و ۲، پاسخ تجربی و عددی ولتاژ بر حسب فرکانس تحریک در محدوده فرکانس‌های تشدید اول و دوم برای تیر دوشکلی در وضعیت مدار باز را نشان می‌دهند. در این نمودارها مقدار فرکانس غالب دارای بیشینه مقدار پاسخ ولتاژ قابل مشاهده است. طبق نمودار ۱، فرکانس‌های تشدید اول ۱۴۲، ۱۶۴/۵، ۱۸۹/۵ و ۲۶۳/۵ هرتز به‌ترتیب برای حالات ۱ تا ۴ قابل حصول است. نمودار ۲، فرکانس‌های تشدید دوم ۱۱۰۰، ۱۳۵۴، ۱۰۸۰ و ۱۳۶۱ هرتز حاصل از بیشینه پاسخ ولتاژ برای حالات در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. رفتار حاصل در پاسخ ولتاژ نشان‌دهنده تأثیرات غیرخطی در نتایج است.



نمودار ۱) پاسخ تجربی و عددی ولتاژ بر حسب فرکانس تحریک در محدوده فرکانس تشدید اول برای تیر دوشکلی



نمودار ۲) پاسخ تجربی و عددی ولتاژ بر حسب فرکانس تحریک محدوده فرکانس تشدید دوم برای تیر دوشکلی

قابل ذکر است که برای یافتن مقدار دقیق فرکانس تشدید در روش تجربی از روش تکرار در تغییر فرکانس‌های تحریک استفاده می‌شود. در این روش براساس وجود شرایط غیرخطی و وابسته‌بودن فرکانس سازه به دامنه تحریک، بار تحریک با دامنه ثابت و تغییر

- 2- duToit NE, Wardle BL, Kim S. Design considerations for MEMS-Scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. *Integrated Ferroelectrics*. 2005;71(1):121-160.
- 3- Sodano HA, Park G, Inman DJ. Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. *Strain*. 2004;40(1):49-58.
- 4- Goldschmidtboeing F, Woias P. Characterization of different beam shapes for piezoelectric energy harvesting. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2008;18(10):104013.
- 5- Zheng B, Chang CJ, Gea HC. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009;38(1):17-23.
- 6- Silva ECN. Comment on topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009;39(3):337-338.
- 7- Erturk A, Inman DJ. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*. 2008;17(6):065016.
- 8- Tadesse Y, Zhang S, Priya S. Multimodal energy harvesting system: Piezoelectric and electromagnetic. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2009;20(5):625-632.
- 9- Ottman GK, Hofmann HF, Bhatt AC, Lesieutre GA. Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2002;17(5):669-676.
- 10- Meninger S, Mur-Miranda JO, Amirtharajah R, Chandrakasan A, Lang JH, Mit C. Vibration-to-electric energy conversion. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*. 2001;9(1):64-76.
- 11- Guan MJ, Liao WH. On the efficiencies of piezoelectric energy harvesting circuits towards storage device voltages. *Smart Materials and Structures*. 2007;16(2):498-505.
- 12- Rupp CJ, Evgrafov A, Maute K, Dunn ML. Design of piezoelectric energy harvesting systems: A topology optimization approach based on multilayer plates and shells. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2009;20(16):1923-1939.
- 13- Lee S, Youn BD, Giraud M. Designing energy harvesting skin structure utilizing outdoor unit vibration. *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Montreal, Canada. New York: ASME Proceedings | 4th International Conference on Micro- and Nanosystems; 2010.
- 14- Lee S, Youn BD. A new piezoelectric energy harvesting design concept: Multimodal energy harvesting skin. *IEEE Transactions on Ultrasonics*. 2011;58(3):629-645.
- 15- Cottone F, Mincigrucci R, Neri I, Orfei F, Travasso F, Vocca H, et al. Nonlinear kinetic energy harvesting. *The European Future Technologies Conference and Exhibition 2011*. *Procedia Computer Science*. 2011;7:190-191.
- 16- Ibrahim SW, Ali WG. Power enhancement for piezoelectric energy harvester. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol II WCE 2012*, July 4 - 6, 2012, London, U.K. Hong Kong: The International Association of Engineers; 2012.
- 17- Jabbari M. The effect of strain nodes on the energy harvesting of the cantilever piezoelectric beam with the

آزمایش، مقایسه و بار تحریک با شتاب هارمونیک و بار مقاومتی مشخص انتخاب شد.

پاسخ ولتاژ با تغییر فرکانس تحریک در محدوده فرکانس تشدید برای موقعیت‌های مختلف جرم متمرکز حاصل شد. دامنه ولتاژ با تغییر موقعیت جرم متمرکز از انتهای تیر به طرف ابتدای تیر افزایش می‌یابد. به دلیل این که با تغییر موقعیت جرم متمرکز از انتهای تیر به طرف پایه تیر، فرکانس تشدید اول نیز افزایش می‌یابد، بنابراین دامنه ولتاژ با افزایش فرکانس تحریک افزایش پیدا می‌کند. با تغییر موقعیت جرم متمرکز از انتهای تیر به طرف ابتدای تیر با نزدیک شدن موقعیت جرم متمرکز به گره کرنشی باعث می‌شود تا فرکانس تشدید دوم تیر در حالت ۳ نسبت به حالت ۲ کاهش یابد. با این حال پاسخ ولتاژ خروجی با افزایش فرکانس اول به عنوان فرکانس تحریک افزایش می‌یابد. پاسخ تیر پیزوالکتریک در ولتاژ خروجی برای فرکانس‌های تشدید اول و دوم متفاوت بوده است و در هر فرکانس تشدید، موقعیت جرم متمرکز و مقدار فرکانس به طور جداگانه یا ترکیبی در ولتاژ خروجی می‌توانند تأثیرگذار باشند.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسنده گزارش نشد.

تأییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسنده گزارش نشد.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسنده گزارش نشد.

منابع مالی: موردی از سوی نویسنده گزارش نشد.

۵- پی‌نوشت

علامه اختصاری	شرح
a_d	دامنه شتاب تحریک
b	ضخامت تیر
$[B^{\varphi}]$	مشتق توابع شکل الکتریکی
$[B_v^L]$	مشتق توابع شکل مکانیکی
$[B_v^N]$	مشتق تابع شکل غیرخطی مکانیکی
$[c^E]$	ماتریس ضرایب الاستیسیته در میدان الکتریکی ثابت
$[C_c]$	ماتریس ضرایب میرایی ریلی
c_{11}^E	مولفه ۱۱ ماتریس ضرایب الاستیسیته در میدان الکتریکی ثابت
$[e]$	ماتریس ضرایب تنش پیزوالکتریک برای تیر
e_{31}	ضریب تنش پیزوالکتریک در مود ۳۱
ε_{33}^s	مولفه ۳۳ ماتریس دی الکتریک در کرنش ثابت
$\{f^{\varphi}\}$	بردار بار الکتریکی گرهی
F	بار تحریک هارمونیک
H	ضخامت تیر
$[K^{vv}]$	ماتریس سختی خطی
$[K^{v\varphi}]$	ماتریس جفت‌شدگی خطی پیزوالکتریک
$[K^{\varphi\varphi}]$	ماتریس دی الکتریک
$[K_N^{vv}]$	ماتریس سختی غیرخطی
$[K_N^{v\varphi}]$	ماتریس جفت‌شدگی غیرخطی پیزوالکتریک
L	طول تیر
$[M]$	ماتریس جرم
$[N^v]$	توابع شکل درجات آزادی مکانیکی
Q_n	ضریب کیفیت سازه
R_r	بار مقاومتی
T	زمان
علامه یونانی	
α_1, α_2	ضرایب ماتریس میرایی
$\{\hat{\varphi}\}$	بردار پتانسیل
ρ	جرم حجمی
ω_n	فرکانس‌های تشدید
ξ_n	نسبت میرایی
$[\varepsilon^s]$	ماتریس دی الکتریک در کرنش ثابت

منابع

- 1- Roundy S, Wright PK. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*. 2004;13(1):1131-1144.

piezoelectric beam by a finite element method. Journal of Solid Mechanics. 2016;8(2):247-261.

21- Jabbari M, Ghayour M, Mirdamadi HR. Experimental and numerical results of Dynamics behavior of a nonlinear piezoelectric beam. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2015;23(8):853-864.

22- Clough RW, Penzien J. Dynamics of Structures. 2nd Edition. New York: McGraw-Hill; 1993.

23- Jabbari M, Ghayour M, Mirdamadi HR. Energy harvesting of a multilayer piezoelectric beam in resonance and off-resonance cases. Journal of Engineering Materials and Technology. 2017;139(3):031008.

vibration mode excitation. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(10):65-72. [Persian]

18- Aligholizadeh S, Hamed MA, Hassannejad Qadim R. Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches. Modares Mechanical Engineering. 2015;15(9):11-22. [Persian]

19- Kaghazian A, Foruzande H, Hajnayeb A, Mohammad Sedighi H. Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nano actuator using nonlocal elasticity theory. Modares Mechanical Engineering. 2016;16(4):55-66. [Persian]

20- Jabbari M, Ghayour M, Mirdamadi HR. Dynamics analysis of the steady and transient states of a nonlinear