



Nonlinear Size-Dependent Analysis of an Initially Curved Microbeam

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Nikpourian A.^{*1} PhD,
Ghazavi M.R.¹ PhD

How to cite this article

Nikpourian A, Ghazavi M.R. Nonlinear Size-Dependent Analysis of an Initially Curved Microbeam. Modares Mechanical Engineering. 2019; 19(2):247-258.

ABSTRACT

Nonlinear behavior of an initially curved fully clamped microbeam is investigated in this paper. The microbeam is laminated between two thin piezoelectric layers along its length. Applying voltage to the piezoelectric layers induces a lengthwise force in the microbeam which, in turn, changes the initial rise and the bending stiffness of the microbeam. This feature is used to tune the frequency and the bistability band of the initially curved microbeam for the first time in this paper. The microbeam is electrostatically actuated as well. The governing equation of motion is obtained, using the Hamilton's principle and the size effect is considered in the formulation of the problem utilizing the strain gradient theory. Static response of the system is obtained, using the Newton-Raphson numerical approach. The natural frequency of the system is obtained for various electrostatic voltages. The influence of piezoelectric actuation and size effect is studied on the static behavior and the frequency of the microbeam. Dynamic response of the microbeam in the vicinity of the primary resonance is obtained, using shooting technique and in some cases by the method of multiple scales. The effect of size and piezoelectric excitation on the primary resonance is investigated. The secondary resonance of the microbeam subjected to subharmonic resonance of order 1/2 and the influence of size on it is also studied.

Keywords Initially curved microbeam; Piezoelectric layers; Strain gradient theory; Primary resonance; Secondary resonance

CITATION LINKS

[1] MEMS linear and nonlinear statics and ... [2] Nonlinear dynamics of MEMS arches under harmonic electrostatic ... [3] Bistable nanowire for micromechanical ... [4] In-plane MEMS shallow arch beam for mechanical ... [5] Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical ... [6] Stress-based resonant volatile gas microsensor operated near the critically buckled ... [7] An electrostatically actuated MEMS arch band-pass ... [8] Snap-through and pull-in instabilities of an arch-shaped beam under an electrostatic ... [9] The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable ... [10] Pull-in and snap-through instabilities in transient deformations of microelectromechanical ... [11] Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro ... [12] The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated ... [13] Dynamics of a clamped-clamped microbeam resonator considering fabrication ... [14] On the parameters which govern the symmetric snap-through buckling behavior of an initially curved ... [15] Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever ... [16] Snap-through buckling of initially curved microbeam subject to an electrostatic ... [17] Size-dependent electro-elasto-mechanics of MEMS with initially curved deformable ... [18] Size-dependent bistability of an electrostatically actuated arch NEMS based on strain gradient ... [19] On the dynamics of bistable micro/nano resonators: Analytical solution and nonlinear ... [20] Bistable nonlinear response of MEMS ... [21] Experiments and theory in strain gradient ... [22] On the nonlinear dynamics of a piezoelectrically tuned micro-resonator based on non-classical elasticity ... [23] Mechatronics: Dynamics of electromechanical and piezoelectric ... [24] Piezoelectric multilayer beam bending actuators: Static and dynamic behavior and aspects of sensor ... [25] Tuning the primary resonances of a micro resonator, using piezoelectric ... [26] Nonlinear dynamics of a geometrically imperfect microbeam based on the modified couple stress ... [27] Fundamentals of ... [28] Dynamic analysis of electrostatically actuated nanobeam based on strain gradient ... [29] Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental ... [30] On the secondary resonance of a MEMS resonator: A conceptual study based on shooting and perturbation ... [31] M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test ...

¹Applied Designing Department, Mechanical Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Tarbiat Modares University, Nasr Bridge, Jalal-Al-Ahmad Highway, Tehran, Iran.
Postal Code: ...
Phone: +98 (21) 82883362
Fax: +98 (21) 82884989
ghazavim@modares.ac.ir

Article History

Received: April 02, 2018
Accepted: October 10, 2018
ePublished: February 01, 2019

بررسی رفتار غیرخطی میکروتیر دارای انحنای اولیه با در نظر گرفتن اثر اندازه

علیرضا نیک‌پوریان PhD

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

محمدرضا قضاوی PhD

گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش به بررسی رفتار غیرخطی یک میکروتیر دوسرگردار دارای انحنای اولیه پرداخته شده است. دو لایه پیزوالکتریک با ضخامت کم، به‌طور کامل به سطوح بالایی و پایینی میکروتیر چسبیده است. با اعمال ولتاژ به لایه‌های پیزوالکتریک، نیروی محوری در میکروتیر القا می‌شود که موجب تغییر در میزان انحنای اولیه و همچنین سفتی خمشی میکروتیر می‌شود. از این پدیده برای اولین بار در میکروتیرهای دارای انحنای اولیه به‌عنوان عامل تنظیم فرکانس استفاده شده است. علاوه بر این میکروتیر تحت تحریک مستقیم و متناوب الکتروستاتیک قرار دارد که کاملاً مستقل از تحریک پیزوالکتریک است. معادلات حاکم بر میکروتیر با استفاده از اصل همپتون به دست آمده است و همچنین از تئوری گرا دیان کرنش برای در نظر گرفتن اثر اندازه، بهره گرفته شده است. پاسخ استاتیکی میکروتیر با استفاده از روش عددی نیوتن رافسون و همچنین فرکانس طبیعی میکروتیر نیز به‌ازای ولتاژهای مختلف الکتروستاتیک به دست آمده است. اثر اندازه و تحریک پیزوالکتریک بر پاسخ استاتیکی میکروتیر و فرکانس طبیعی آن مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده است که تحریک پیزوالکتریک می‌تواند برای تنظیم باند دوپایداری استاتیکی سیستم مورد استفاده قرار گیرد. پاسخ دینامیکی میکروتیر نیز در همسایگی رزونانس اولیه با استفاده از روش عددی پرتابه‌ای به دست آمده و در موارد خاص با روش تحلیلی مقیاس‌های زمانی چندگانه مقایسه شده است. تأثیر اندازه و همچنین تحریک پیزوالکتریک بر رزونانس اولیه مورد تحلیل قرار گرفته است. در پایان نیز رزونانس ثانویه و تأثیر اندازه بر آن مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: میکروتیر دارای انحنای اولیه، لایه‌های پیزوالکتریک، تئوری گرا دیان کرنش، رزونانس اولیه، رزونانس ثانویه

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۱/۱۳

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۷/۱۸

* نویسنده مسئول: ghazavim@modares.ac.ir

۱- مقدمه

سیستم‌های میکروالکترومکانیک از جمله سیستم‌هایی هستند که به‌سرعت در حال همه‌گیر شدن و گسترش کاربرد هستند. همچنین به‌علت وجود منابع غیرخطی مختلف در چنین سیستم‌هایی، برای پژوهشگرها به‌لحاظ دینامیکی دارای جذابیت‌های زیادی هستند. از جمله منابع غیرخطی رایج در این سیستم‌ها می‌توان به کشش صفحه میانی در اثر وجود تکیه‌گاه‌های دوسرگردار اشاره کرد که به غیرخطی هندسی نیز معروف است. دیگر عامل غیرخطی، تحریک الکتروستاتیک است که به‌علت سادگی، مصرف پایین توان و عملکرد بالا، از رایج‌ترین راه‌های تحریک سیستم‌های الکترومکانیک از جمله میکروتیرها است [1]. از دیگر غیرخطی‌هایی که ممکن است در میکروتیرها به وجود بیاید، وجود انحنای اولیه در راستای طول میکروتیر است. با توجه به این که میکروتیرها ابعاد بسیار کوچکی دارند و فرآیند تولیدشان حساسیت بالایی دارد، در صورت وجود کوچک‌ترین نقصان در این فرآیند، احتمال این کم نیست که میکروتیر تولیدشده، تخت نباشد و دارای اندکی انحنای باشد. علاوه بر این میکروتیرهایی که دارای انحنای اولیه هستند، می‌توانند خواص منحصر به فردی را از خود نشان دهند که کاربردهای جذابی دارند. از جمله این خواص می‌توان به دوپایداری اشاره کرد.

میکروتیرهای دارای انحنای اولیه در صورتی که دارای انحنای اولیه مناسب باشند، بر خلاف میکروتیرهای تخت، در نواحی خاصی از محدوده عملکردشان دارای دو وضعیت تعادل پایدار هستند. از فواید چنین سیستم‌هایی می‌توان به این موارد زیر اشاره کرد:

۱- با تحریک مناسب می‌توان سیستم را از یک وضعیت تعادل به وضعیت تعادل دیگر منتقل کرد. این پدیده بسته به این که عامل ایجادکننده آن استاتیک یا دینامیک باشد، پرش استاتیک یا پرش دینامیک نامیده می‌شود.

۲- سیستم می‌تواند حول هر یک از وضعیت‌های تعادل خود نوسان کند و همچنین بین وضعیت‌های تعادل خود جابه‌جایی دامنه بزرگ داشته باشد.

۳- برای نگهداشتن سیستم در هر یک از وضعیت‌های تعادل خود، نیاز به صرف انرژی نیست. تنها برای انتقال آن از یک حالت تعادل به دیگری نیاز به صرف انرژی است [2].

با توجه به خواص بیان‌شده، از میکروتیرهای دارای انحنای اولیه در کاربردهایی نظیر حافظه مکانیکی [3، 4]، سوئیچ [5]، سنسور گاز [6] و فیلتر میان‌گذر [7] استفاده شده است. با توجه به موارد ذکرشده، مطالعه رفتار میکروتیرهای دارای انحنای اولیه به جهت شناخت هر چه بیشتر آنها و پیش‌بینی رفتارشان تحت شرایط دینامیکی مختلف ضروری است. در این راستا محققان بسیاری در زمینه بررسی رفتار استاتیک و دینامیک میکروتیرهای دارای انحنای اولیه به فعالیت‌های پژوهشی پرداخته‌اند. در ادامه مروری بر مهم‌ترین پژوهش‌ها در این زمینه صورت گرفته است.

ژانگ و همکاران ناپایداری پولین و پدیده پرش استاتیک را برای میکروتیرهای دارای انحنای به‌صورت تئوری و تجربی بررسی کرده و نشان داده‌اند تیرهایی که پدیده پرش را تجربه می‌کنند، جابه‌جایی بزرگ‌تری نسبت به تیرهایی دارند که فقط ناپایداری پولین را تجربه می‌کنند [8]. کرالیوف و همکاران نیز با تحلیل تئوری و تجربی نشان داده‌اند که ترتیب رخداد پرش و پولین بسته به پارامترهای سیستم علی‌الخصوص ضخامت، انحنای اولیه و فاصله بین میکروتیر و الکتروود می‌تواند تغییر کند [9]. داس و باترا با اعمال اختلاف پتانسیل بین میکروتیر و الکتروود به دو صورت ناگهانی و خطی متغیر با زمان، پدیده‌های پولین و پرش را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که هر چه سرعت اعمال ولتاژ کمتر باشد، پاسخ سیستم به پاسخ استاتیک نزدیک می‌شود. همچنین با افزایش نرخ اعمال ولتاژ بدون رخداد پرش، مستقیماً ناپایداری پولین حادث می‌شود [10]. کرالیوف و همکاران به بررسی دینامیک گذرای میکروتیر دارای انحنای اولیه پرداخته و نشان داده‌اند که ولتاژهای متناظر با پرش و پولین دینامیک از مقادیر متناظر استاتیک خود کوچک‌تر هستند [11]. اوکاد و یونس به بررسی رفتار دینامیک میکروتیر دارای انحنای اولیه پرداخته و تأثیر میزان خیز اولیه را روی پاسخ استاتیک سیستم و فرکانس طبیعی آن مورد بررسی قرار داده‌اند [12]. باتابنه و یونس نیز به‌صورت تئوری و تجربی به بررسی رفتار استاتیک و دینامیک میکروتیر دارای انحنای اولیه پرداخته‌اند. در بخش دینامیک، پدیده‌های پرش، هیستریزیس و رفتار نرم‌شوندگی مورد بررسی قرار گرفته است [13]. چن و مگوید تأثیر پارامترهای مختلف نظیر نوع تکیه‌گاه (دوسرگردار یا دوسرولوا) شکل انحنای، نیروی محوری باقیمانده و تغییرات دمایی یکنواخت را بر پدیده پرش در میکروتیرهای دارای انحنای اولیه مورد بررسی قرار دادند. نتایج پژوهش آنها نشان می‌دهد که بین پارامترهای بررسی‌شده، شکل انحنای میکروتیر دارای کمترین تأثیر بر پرش متقارن است [14]. کلیه پژوهش‌هایی که مورد بررسی قرار گرفت

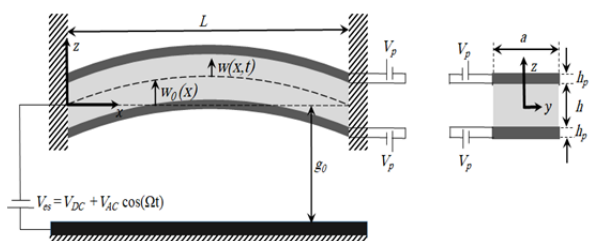
همچنین تحریک پیزوالکتریک بر فرکانس میکروتیر و رفتار آن پرداخته شده است.

۲- مدل سازی

در این بخش به معرفی مدل میکروتیر دارای انحنا اولیه و همچنین بیان پارامترهای آن پرداخته شده و سپس معادلات حاکم بر سیستم به دست آمده است.

۲-۱- معرفی مدل میکروتیر دارای انحنا اولیه

مدل در نظر گرفته شده برای میکروتیر به صورت شماتیک در شکل ۱ قابل مشاهده بوده و این شکل بیانگر یک میکروتیر دوسرگیردار با طول L ، ضخامت h و عرض a است. انحنا اولیه میکروتیر به وسیله تابع $w_0(x)$ نشان داده شده است. در فاصله g_0 از میکروتیر و در پایین آن یک الکترود ثابت قرار دارد. V_{es} تحریک الکتروستاتیک اعمالی به میکروتیر بوده که شامل دو بخش ثابت و متناوب است و به ترتیب توسط ولتاژ ثابت V_{DC} و تحریک متناوب با دامنه V_{AC} و فرکانس Ω صورت می پذیرد. دو لایه نازک پیزوالکتریک، هر یک به ضخامت h_p از بالا و پایین کاملاً به سطح میکروتیر چسبیده اند. V_p نیز ولتاژ اعمال شده به لایه های پیزوالکتریک است. x و z به ترتیب مختصات در نظر گرفته شده در راستای محوری و عرضی بوده و جابه جایی میکروتیر در راستای محوری و عرضی به ترتیب با $u(x,t)$ و $w(x,t)$ نشان داده شده است.



شکل ۱) شماتیک میکروتیر دارای انحنا اولیه در نظر گرفته شده

۲-۲- استخراج معادلات حاکم بر سیستم

در این بخش با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سیستم استخراج می شود. در این راستا ابتدا انرژی پتانسیل کرنشی میکروتیر، لایه های پیزوالکتریک و انرژی جنبشی آنها به دست می آید، سپس کار نیروی الکتروستاتیک محاسبه می شود. در نهایت معادلات با استفاده از اصل همیلتون استخراج می شود.

۲-۲-۱- انرژی پتانسیل میکروتیر

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن اثر اندازه، از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش استفاده شده توسط کم و همکاران [21] استفاده شده است. با توجه به این تئوری، انرژی کرنشی ماده ای که فضای $\mathcal{V}$ را اشغال می کند، به صورت معادله ۱ نوشته می شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{(s)} \chi_{ij}^{(s)}) d\mathcal{V} \quad (1)$$

در معادله ۱، ε_{ij} المان های تانسور کرنش کلاسیک هستند و از رابطه ۲ به دست می آیند.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (2)$$

که در آن نماد z بیانگر مشتق نسبت به مختصه z است. پارامترهای $\eta_{ijk}^{(1)}$ و γ_i و $\chi_{ij}^{(s)}$ به ترتیب بخش متقارن تانسور انحنا، المان های تانسور گرادیان اتساع و بخش انحرافی تانسور گرادیان

بر اساس تئوری کلاسیک محیط پیوسته نوشته شده اند. این در حالی است که در عمل نشان داده شده، زمانی که ابعاد سیستم بسیار کوچک است، تئوری کلاسیک از پیش بینی صحیح رفتار سیستم عاجز است و نتایج آن منطبق بر نتایج تجربی نیست [15] و هر چه ابعاد سیستم، کوچک تر و به پارامترهای مقیاس طولی آن نزدیک تر می شود، تفاوت نتایج تئوری کلاسیک با نتایج تجربی بیشتر و بیشتر می شود. از همین روی در صورتی که هدف، بررسی رفتار یک سیستم ریزساختار با ابعادی نزدیک به پارامترهای مقیاس طولی آن باشد، استفاده از تئوری های غیرکلاسیک برای به دست آوردن نتایج قابل اعتماد اجتناب ناپذیر است. در همین راستا برخی محققان در سال های اخیر به تحلیل رفتار میکروتیرهای دارای انحنا اولیه با استفاده از تئوری های غیرکلاسیک پرداخته اند که در ادامه برخی از آنها مرور شدند. چن و مگوید با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، پدیده پرش وابسته به اندازه میکروتیر دارای انحنا اولیه را تحت تحریک الکتروستاتیک مورد مطالعه قرار داده اند. آنها در مدل سازی خود اثر میدان الکتریکی لایه های الکترود، نیروهای ون در والس و کازیمیر را در نظر گرفته اند. در این پژوهش اهمیت تاثیر اندازه بر پدیده پرش و کم اهمیت بودن باقی موارد ذکر شده نشان داده شده است [16]. قاییش و همکاران ناپایداری پولین و رزونانس غیرخطی میکروتیر تحت تحریک الکتروستاتیک را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی کرده اند. آنها تاثیر دامنه و فرکانس تحریک را بر رفتار دینامیک سیستم بررسی کرده و پایداری سیستم را با استفاده از تئوری فلوکه مورد تحلیل قرار داده اند [17]. تجدیدیان فر و همکاران پدیده های پولین و پرش را بررسی و فرکانس طبیعی و دوقیاداری سیستم را بر اساس تئوری گرادیان کرنش تحلیل کرده و با تئوری کلاسیک مقایسه کرده اند. آنها نشان داده اند که بر خلاف آن چه تئوری کلاسیک پیش بینی می کند، ناحیه دوقیاداری با کاهش ابعاد سیستم کاهش می یابد [18]. تجدیدیان فر و همکاران در پژوهشی دیگر به بررسی رفتار دینامیک میکروتیرهای دارای انحنا اولیه در همسایگی رزونانس اولیه پرداخته اند. آنها با استفاده از روش اغتشاشات هوموتوپی قادر به رویت رفتار نرم شوندگی میکروتیر و پرش دینامیک بوده اند [19]. قاییش و فرخی یک میکروتیر ویسکوالاستیک دارای انحنا اولیه تحت تحریک الکتروستاتیک را با در نظر گرفتن اثر میدان الکتریکی لایه ها و همچنین اثر اندازه، به صورت استاتیک و دینامیک مورد مطالعه قرار داده اند. آنها نوسانات طولی و عرضی میکروتیر را در مدل سازی خود در نظر گرفته و تاثیر پارامترهایی نظیر انحنا اولیه، نیروی محوری و اثر اندازه را بر رفتار استاتیک و رزونانس اولیه مورد بررسی قرار داده اند [20].

همان گونه که مشاهده می شود، مطالعه در زمینه رفتار وابسته به اندازه میکروتیرهای دارای انحنا اولیه بسیار اندک بوده و کمبود نشریات در این زمینه کاملاً محسوس است. لذا برای شناخت هر چه بهتر سیستم های مذکور، انجام مطالعات بیشتر لازم است. در این پژوهش برای اولین بار استفاده از لایه های پیزوالکتریک به منظور تنظیم فرکانس و کنترل رفتار یک میکروتیر دوسرگیردار دارای انحنا اولیه تحت تحریک الکتروستاتیک در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب ابتدا به معرفی مدل و به دست آوردن معادلات حاکم بر آن پرداخته شده است. سپس معادلات استاتیک و دینامیک حل شده و همچنین فرکانس های طبیعی سیستم به ازای ولتاژهای مختلف الکتروستاتیک به دست آمده است. در نهایت به تحلیل پاسخ های سیستم و تاثیر پارامترهایی نظیر اثر اندازه و

کشش هستند که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} [\theta_{i,j} + \theta_{j,i}] \quad (۳)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} [u_{k,j} - u_{j,k}] \quad (۴)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (۵)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{15} \delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) \\ & - \frac{1}{15} \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) \\ & - \frac{1}{15} \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}) \end{aligned}$$

در روابط ۲-۶، u_i و θ_i المان‌های بردار جابه‌جایی و دوران هستند و δ_{ij} نماد دلتای کرونکر است. از این روابط پیداست که با داشتن بردار جابه‌جایی، باقی پارامترها نیز به دست می‌آیند. پارامترهای مرتبط با تنش‌ها نیز عبارت از σ_{ij} که تانسور تنش کوشی بوده، p_i و $\tau_{ijk}^{(1)}$ تانسورهای تنش مرتبه بالا و $m_{ij}^{(s)}$ بخش متقارن تانسور تنش کوپل است که به ترتیب براساس روابط ۷-۱۰ محاسبه می‌شوند [21].

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (۷)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (۸)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (۹)$$

$$m_{ij}^{(s)} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \quad (۱۰)$$

در روابط ۸-۱۰، l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طولی ماده هستند که اثر اندازه با استفاده از همین پارامترها وارد فورمولاسیون مساله می‌شود. با توجه به این که جنس میکروتیر سیلیکون بوده، پارامترهای مقیاس طولی برابر با $l_0=l_1=l_2=0.15\mu\text{m}$ در نظر گرفته شده است [22]. λ و μ نیز ثابت‌های لامه هستند که از طریق روابط ۱۱ و ۱۲ با مدول یانگ (E) و ضریب پواسون (ν) ارتباط دارند.

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۱۱)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۲)$$

میدان جابه‌جایی در نظر گرفته شده برای میکروتیر مورد نظر عبارت از رابطه زیر است:

$$u_x = u(x, t) - z \frac{\partial u_z}{\partial x}, u_y = 0, u_z = w_0 + w(x, t) \quad (۱۳)$$

در رابطه ۱۳، u_x ، u_y و u_z به ترتیب نمایانگر جابه‌جایی در راستای محورهای x ، y و z هستند و $w_0 = b_0(1-2\pi x/L)/2$ در نظر گرفته شده برای انحنای اولیه میکروتیر است. با جای‌گذاری رابطه ۱۳ در معادله ۲، تنها مولفه غیرصفر کرنش به صورت رابطه ۱۴ در می‌آید.

$$\varepsilon_{xx} = u'^{\wedge} + \frac{1}{2} w'^{\wedge 2} + w'^{\wedge} w'' - zw'' \quad (۱۴)$$

بدین ترتیب با مشخص شدن مولفه‌های جابه‌جایی و کرنش، کلیه پارامترهای رابطه ۱ قابل محاسبه است و لذا انرژی پتانسیل بخش

اصلی میکروتیر به دست می‌آید.

۲-۲-۲- انرژی پتانسیل لایه‌های پیزوالکتریک

با در نظر گرفتن معادلات ساختاری حاکم بر مواد پیزوالکتریک [23]، انرژی پتانسیل کرنشی لایه‌های پیزوالکتریک عبارت از رابطه زیر است [24]:

$$(۱۵)$$

$$\begin{aligned} U_p = & \frac{1}{2} \int_0^L \iint_{A_p} \left(E_p \left(u' - zw'' + \frac{w'^2}{2} \right)^2 \right) dA dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L \iint_{A_p} \left(\varepsilon_{33}^S \left(\frac{V_p}{h_p} \right)^2 \right) dA dx \\ & - \int_0^L \iint_{A_p} \left(\frac{V_p}{h_p} e_{31} \left(u' - zw'' + \frac{w'^2}{2} \right) \right) dA dx \end{aligned}$$

که در رابطه ۱۵، عبارت اول مربوط به بخش مکانیکی انرژی کرنشی، عبارت دوم مربوط به بخش الکتریکی و عبارت سوم مربوط به کوپلینگ الکترومکانیک بوده و در این رابطه ε_{33}^S ثابت نفوذپذیری تحت کرنش ثابت است.

۲-۲-۳- انرژی جنبشی میکروتیر و لایه‌های پیزوالکتریک

انرژی جنبشی میکروتیر به همراه لایه‌های پیزوالکتریک به صورت رابطه ۱۶ به دست می‌آید.

$$T = \frac{1}{2} (\rho A)_{eq} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (۱۶)$$

که $(\rho A)_{eq}$ جرم واحد طول معادل میکروتیر به همراه لایه‌های پیزوالکتریک بوده و عبارت از رابطه زیر است:

$$(\rho A)_{eq} = \rho_b A_b + \rho_p A_p = \rho_b ah + \rho_p (2ah_p) \quad (۱۷)$$

در رابطه ۱۷، زیرنویس‌های b و p به ترتیب بیانگر میکروتیر و پیزوالکتریک هستند.

۲-۲-۴- کار نیروی خارجی

نیروی خارجی وارد شده به میکروتیر ناشی از تحریک الکتروستاتیک به صورت معادله ۱۸ نوشته می‌شود [25].

$$(۱۸)$$

$$W_{es} = \int_0^L \frac{\varepsilon_0 a V_{es}^2}{2} \left(\frac{1}{(g_0 + w_0 + w)} - \frac{1}{(g_0 + w_0)} \right) dx$$

در این رابطه $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ ، ضریب نفوذ خلأ است.

۲-۲-۵- اصل همیلتون

معادله همیلتون با در نظر گرفتن اثر میرایی ویسکوز به شکل معادله ۱۹ نوشته می‌شود [26].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W - C_d \frac{\partial w}{\partial t} \delta w) dt = 0 \quad (۱۹)$$

در این رابطه $C_d = 2\zeta\omega$ ضریب میرایی است که فرکانس طبیعی سیستم است.

با جای‌گذاری روابط به دست آمده برای انرژی پتانسیل و جنبشی و کار نیروی خارجی در رابطه ۱۹ و انجام یک سری عملیات ریاضی مشابه آن چه در یک مرجع [22] انجام شده است، معادله بدون بعد حاکم بر ارتعاشات عرضی میکروتیر با در نظر گرفتن اثر اندازه به شکل معادله ۲۰ حاصل می‌شود.

۳- حل معادله حاکم بر سیستم

در بخش ۲ معادله حاکم بر حرکت سیستم تحت تحریک الکتروستاتیک و پیزوالکتریک با در نظر گرفتن اثر اندازه به دست آمد (معادله ۲۰). در این بخش به توضیح روش حل معادله استاتیک و دینامیک پرداخته شده است. ابتدا مرتبه معادله کاهش داده می‌شود و سپس معادله کاهش مرتبه داده شده با استفاده از روش‌های مناسب حل می‌شود.

۳-۱- کاهش مرتبه معادله حاکم

با استفاده از روش گلرکین می‌توان معادله حاکم بر حرکت سیستم را گسسته‌سازی کرد. بدین ترتیب معادله با مشتقات جزئی تبدیل به معادله دیفرانسیل می‌شود. به عبارت دیگر سیستم پیوسته با تقریب، توسط یک سیستم با درجات آزادی محدود مدل می‌شود. در روش گلرکین پاسخ معادله ۲۰ به صورت رابطه ۲۵ در نظر گرفته می‌شود [27].

$$w = \sum_{i=1}^M u_i(t) \varphi_i(x) \quad (25)$$

بدین ترتیب فرض می‌شود که پاسخ سیستم از مختصات تعمیم‌یافته (توابع زمان‌مند) که مجهول‌اند و توابع مقایسه‌ای (توابع وابسته به مکان) که معلوم هستند، تشکیل شده است. معمولاً شکل مود سازه مورد بررسی به عنوان توابع مقایسه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین یک انتخاب این است که شکل مود میکروتیر دارای انحنای اولیه به عنوان توابع مقایسه‌ای در نظر گرفته شوند. با این حال /و/کاد و یونس [12] نشان داده‌اند که استفاده از شکل مود میکروتیر تخت (معادله ۲۶) به جای میکروتیر دارای انحنای اولیه در بسط گلرکین، جوابی با دقت بسیار بالا می‌دهد.

$$\varphi_i^{(iv)} + \omega_i^2 \varphi_i - \lambda_1 \varphi_i^{(vi)} = 0 \quad (26)$$

در رابطه ۲۶، $\varphi_i^{(n)} = \frac{d^n \varphi_i}{dx^n}$ است.

از طرفی مانی‌میان‌دوآب و همکاران [28] نشان داده‌اند در صورتی که $1 \ll \lambda_1$ باشد، پاسخ معادله ۲۶ به پاسخ معادله شکل مود براساس تئوری کلاسیک همگرا می‌شود. بنابراین حتی با وجود این که شکل مود میکروتیر تخت که براساس تئوری کلاسیک به دست آمده است، شرط مرزی مربوط به تئوری غیرکلاسیک را ارضا نمی‌کند، اما می‌توان به عنوان تابع مقایسه‌ای از آن استفاده کرد. بدین ترتیب با جای‌گذاری معادله ۲۵ در معادله ۲۰، ضرب طرفین معادله در $\varphi_n(x)$ و انتگرال‌گیری از معادله به دست آمده روی طول میکروتیر، معادله کاهش مرتبه‌یافته سیستم به دست می‌آید.

$$(27)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{u}_n(t) + \lambda_4 \dot{u}_n(t) + \sum_{i=1}^M u_i(t) \int_0^1 \varphi_i^{(iv)} \varphi_n dx \\ & - \lambda_1 \sum_{i=1}^M u_i(t) \int_0^1 \varphi_i^{(vi)} \varphi_n dx \\ & - \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^M u_i(t) \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_n dx + \int_0^1 w_0'' \varphi_n dx \right] \\ & - \lambda_3 \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M u_i u_j u_k \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' \varphi_k' dx \int_0^1 \varphi_k'' \varphi_n dx \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_i u_j \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx \int_0^1 w_0'' \varphi_n dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - (\lambda_2 + \lambda_3 \int_0^1 (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ & + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dw_0}{dx}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \lambda_4 \frac{\partial w}{\partial t} = \\ & - \lambda_5 \frac{(V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega \tilde{t}))^2}{(1 + w + w_0)^2} \end{aligned}$$

با توجه به این که از تئوری گرادیان کرنش استفاده شده، معادله حاکم بر سیستم (۲۰) از درجه ۶ است. بنابراین ۶ شرط مرزی مورد نیاز بوده (سه شرط در هر مرز) و شرایط مرزی نیز مطابق با معادله ۲۱ است.

(۲۱)

$$w|_{x=0,1} = 0, \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0,1} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0,1} = 0$$

دو رابطه اول، شرایط مرزی هندسی کلاسیک هستند که مبین این بوده که جابه‌جایی و شیب در مرزها برابر با صفر است. شرط مرزی سوم که یک شرط مرزی غیرکلاسیک بوده، مبین این است که گرادیان کرنش در مرزها برابر با صفر در نظر گرفته شده است. ضرایب بدون بعد موجود در رابطه ۲۰ به صورت زیر ارایه شده‌اند:

(۲۲)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{K}{SL^2}, & \lambda_1 &= \frac{K}{SL^2}, \\ \lambda_2 &= F_p \frac{L^2}{S}, & \lambda_2 &= (-2e_{31} V_p a) \frac{L^2}{S} \\ \lambda_3 &= \frac{(AE)_{eq} g_0^2}{2S}, & \lambda_3 &= \frac{(AE)_{eq} g_0^2}{2S}, \\ \lambda_4 &= \frac{C_d L^4}{S \tilde{t}}, & \lambda_4 &= \frac{C_d L^4}{S \tilde{t}}, \\ \lambda_5 &= \frac{\varepsilon_0 a L^4}{2S g_0^3}, & \lambda_5 &= \frac{\varepsilon_0 a L^4}{2S g_0^3}, \\ \tilde{t} &= \sqrt{\frac{(\rho A)_{eq} L^4}{S}}, & \tilde{t} &= \sqrt{\frac{(\rho A)_{eq} L^4}{S}} \end{aligned}$$

که در آن e_{31} ثابت پیزوالکتریک و ε_0 ثابت دی‌الکتریک است. ثابت‌های موجود در این رابطه نیز به صورت زیر است:

(۲۳)

$$\begin{aligned} S &= (EI)_{eq} + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{120}{225} l_1^2 + l_2^2 \right) \\ K &= \mu I \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \\ (AE)_{eq} &= E_b A_b + E_p A_p = E_b a h + E_p (2a h_p) \\ (EI)_{eq} &= (E_b I_b + E_p I_p) = E_b \frac{a h^3}{12} + \\ & E_p a \left(h h_p \left(\frac{h}{2} + h_p \right) + \frac{2}{3} h_p^3 \right) \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که معادله ۲۰ براساس پارامترهای ۲۴ بدون بعد شده است.

(۲۴)

$$\hat{w} = \frac{w}{g_0}, \hat{w}_0 = \frac{w_0}{g_0}, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{t} = \frac{t}{\tilde{t}}, \tilde{\Omega} = \Omega \tilde{t}$$

که به جهت سادگی، از آوردن کلاهی پارامترها در معادله حرکت صرف نظر شده است.

مقیاس‌های زمانی چندگانه محدود به حالاتی است که دامنه تحریک کم و ضریب کیفیت بالا باشد. چرا که تنها در این حالت است که بسط مجانبی در نظر گرفته شده به عنوان پاسخ معادله معتبر خواهد بود.

۳-۳-۱- روش عددی پرتابه‌ای

برای حل معادله به روش پرتابه‌ای ابتدا معادله ۲۷ را به فرم فضای حالت نوشته

$$\ddot{\vec{x}} = F(\vec{x}, t) \quad (۲۹)$$

و باید بردار شرایط اولیه‌ای به صورت

$$\vec{x}(0) = \vec{\eta} \quad (۳۰)$$

پیدا شود که با توجه به این که پاسخ‌های تناوبی با دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ مورد توجه است، باید شرط ۳۱ برقرار شود.

$$\vec{x}(T, \vec{\eta}) = \vec{\eta} \quad (۳۱)$$

برای این منظور ابتدا حدس اولیه‌ای ($\vec{\eta}_0$) در نظر گرفته می‌شود که از مقدار دقیق آن به اندازه $\delta\vec{\eta}$ تفاوت دارد.

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 + \delta\vec{\eta} \quad (۳۲)$$

با جای‌گذاری رابطه ۳۲ در ۳۱، بسط معادله به صورت تیلور و حذف عبارات غیرخطی، معادله ۳۳ به دست می‌آید.

$$\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\eta}} - I\right) \delta\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 - \vec{x}(T, \vec{\eta}_0) \quad (۳۳)$$

معادله ۳۳ به همراه معادلات ۲۹، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را تشکیل می‌دهند که تغییرات $\partial \vec{x} / \partial \vec{\eta}$ را بر حسب زمان نشان می‌دهد. شرایط اولیه معادلات ۳۳ نیز با مشتق‌گیری از معادله ۳۰ به دست می‌آید. با حل همزمان دستگاه معادلات ۲۹ و ۳۳ در یک فرآیند تکراری، $\delta\vec{\eta}$ در هر مرحله اصلاح می‌شود و در نهایت با دقت مورد نیاز به مقدار نهایی خواهد رسید. بدین ترتیب شرط اولیه‌ای که منجر به پاسخ تناوبی با دوره تناوب T می‌شود، به دست می‌آید. این عملیات به‌ازای تمام فرکانس‌های محدوده فرکانسی مورد نظر به دست آمده است و پاسخ فرکانسی سیستم حاصل می‌شود.

در روش پرتابه‌ای برای به‌دست‌آوردن پاسخ فرکانسی سیستم حول رزونانس اولیه کافی است تا معادلات به‌دست‌آمده با دوره تناوب T حل شوند. برای به‌دست‌آوردن پاسخ فرکانسی حول رزونانس ثانویه زیرهارمونیک از مرتبه $1/2$ ، معادلات باید با دوره تناوب $2T$ حل شوند.

۳-۳-۲- روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

در روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، ابتدا معادله برای استفاده از این روش مناسب‌سازی می‌شود. بدین منظور حل معادله حرکت که از دو بخش استاتیک و دینامیک تشکیل شده است، به صورت معادله ۳۴ نوشته می‌شود.

$$w(x, t) = w_s(x) + w_d(x, t) \quad (۳۴)$$

با قراردادن معادله ۳۴ در ۲۰، حذف عبارات مربوط به تعادل استاتیک، قراردادن بسط گلرکین^[۲۵] در معادله حاصله و انجام عملیات مشابه آن چه در بخش ۱-۳ انجام شد، با در نظر گرفتن یک مود، معادله ۳۵ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \lambda_4 \dot{u} + Ku + K_{nq}u^2 + K_{nc}u^3 \\ = F_1 V_{AC} \cos(\Omega t) + F_2 u V_{AC} \cos(\Omega t) \\ + f_1 V_{AC}^2 \cos^2(\Omega t) \\ + f_2 u V_{AC}^2 \cos^2(\Omega t) \end{aligned}$$

پارامترهای موجود در معادله ۳۵ عبارت از موارد زیر است:

$$\begin{aligned} & + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_i u_j \int_0^1 \varphi_i' w_0' dx \int_0^1 \varphi_j'' \varphi_n dx \\ & + 2 \sum_{i=1}^M u_i \int_0^1 \varphi_i' w_0' dx \int_0^1 w_0'' \varphi_n dx \\ & = -\lambda_5 (V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t))^2 \\ & \int_0^1 \frac{\varphi_n}{(1 + w_0 + \sum_{i=1}^M u_i \varphi_i)^2} dx \end{aligned}$$

معادله ۲۷، معادله کاهش مرتبه‌یافته حاکم بر سیستم بوده که به روش‌های مختلفی قابل حل است. لازم به ذکر است که حضور عبارت انتگرالی مربوط به تحریک الکتروستاتیک، بر پیچیدگی‌های حل معادله می‌افزاید. برای مقابله با این مشکل، عبارت انتگرالی با معادل عددی آن که به روش سیمپسون $1/3$ به‌دست‌آمده جایگزین شده است. در روش سیمپسون $1/3$ ، ابتدا بازه انتگرال‌گیری به m قسمت تقسیم می‌شود (که $m+1$ گره را تشکیل می‌دهند). با در نظر گرفتن یک درجه آزادی، معادل عبارت انتگرالی موجود در تحریک الکتروستاتیک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{(1 + w_0 + u\varphi(x))^2} dx \\ & = \frac{1}{3m} \left[\frac{\varphi(0)}{(1 + w_0 + u\varphi(0))^2} + \frac{\varphi(1)}{(1 + w_0 + u\varphi(1))^2} \right. \\ & \quad + 4 \sum_{i=1}^{m/2-1} \frac{\varphi(x_{2i})}{(1 + w_0 + u\varphi(x_{2i}))^2} \\ & \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{m/2} \frac{\varphi(x_{2i-1})}{(1 + w_0 + u\varphi(x_{2i-1}))^2} \right] \end{aligned}$$

۳-۲- معادله استاتیک

با اعمال تحریک مستقیم الکتروستاتیک به سیستم، میکروتیر مقداری از وضعیت اولیه خود، منحرف و به سمت الکتروود ثابت متمایل می‌شود و در واقع وضعیت تعادل جدیدی پیدا می‌کند. برای تحلیل رفتار سیستم در این حالت باید معادله استاتیک سیستم حل شود. معادله استاتیک سیستم با برابر صفر قراردادن عبارت‌های زمان‌مند موجود در معادله ۲۷ به دست می‌آیند. همچنین با توجه به این که معادله استاتیک است، u_i ها دیگر وابسته به زمان نیستند و ثابت هستند. بدین ترتیب معادله‌ای غیرخطی بر حسب u_i ها به دست می‌آید که به روش نیوتن-رافسون حل می‌شود. در نهایت با قراردادن u_i های به‌دست‌آمده در معادله ۲۵، جابه‌جایی میکروتیر حاصل می‌شود و به‌ازای ولتاژهای مختلف الکتروستاتیک، نقاط تعادل سیستم به دست می‌آید.

۳-۳- معادله دینامیک

با حل معادله ۲۷، پاسخ فرکانسی سیستم به دست می‌آید. با توجه به پیچیدگی معادله دینامیک، حل تحلیلی برای آن وجود ندارد. لذا در این پژوهش از روش عددی پرتابه‌ای^[۱، ۲۹] استفاده شده است. روش پرتابه‌ای روشی بسیار قدرتمند بوده که قادر است پاسخ‌های تناوبی سیستم را چه از نوع پایدار و چه ناپایدار بیابد. پایداری پاسخ‌های به‌دست‌آمده نیز با استفاده از تئوری فلوکت تعیین می‌شود^[۱]. در برخی موارد خاص نیز از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده شده که روشی تحلیلی است. استفاده از روش

تحریک از فرکانس اصلی سیستم بوده که در رابطه ۳۹ مشخص شده است.

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (39)$$

۳-۳-۳- تحلیل فرکانسی

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم تحت تحریک الکتروستاتیک و پیزوالکتریک، با برابر صفر قرار دادن عبارات غیرخطی و تحریک خارجی در معادله ۳۵، معادله خطی سیستم به دست می‌آید. سپس با حل مساله مقدار ویژه [27]، فرکانس طبیعی سیستم به دست می‌آید. همان گونه که از اولین رابطه در معادلات ۳۶ پیداست، ولتاژ DC الکتروستاتیک بر سختی خطی میکروتیر تاثیر دارد. بنابراین می‌توان فرکانس طبیعی سیستم خطی شده را به‌ازای ولتاژهای مختلف الکتروستاتیک به دست آورد.

۴- اعتبارسنجی مدل

پیش از آن که پاسخ سیستم به دست بیاید، باید از اعتبار آن اطمینان حاصل شود. بدین منظور نتایج حاصل از آزمایش‌های انجام شده روی میکروتیر دارای انحنای اولیه که در یک مرجع [9] گزارش شده است، به‌عنوان معیار مقایسه در نظر گرفته شد.

میکروتیر مورد نظر دارای طول $L=1000\mu m$ ، عرض $a=30\mu m$ ، ضخامت $h=2.4\mu m$ ، خیز اولیه $b_0=3.5\mu m$ و فاصله اولیه بین میکروتیر و الکتروود $g_0=10.1\mu m$ است.

نتایج حاصله در نمودار ۱ نشان داده شده و همان گونه که از این نمودار مشخص است، انطباق خوبی بین مدل به‌دست‌آمده با نتایج آزمایشگاهی کر/یلوف و همکاران [9] وجود دارد. با توجه به نمودار ۱، با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک، میکروتیر از وضعیت اولیه خود که با نقطه A در نمودار نشان داده شده، مقداری به سمت الکتروود منحرف می‌شود و جابه‌جایی میکروتیر همواره افزایش می‌یابد تا این که در نقطه B با اندکی افزایش در ولتاژ الکتروستاتیک، میکروتیر دچار پرش می‌شود. در این حرکت که از نقطه B به C نشان داده شده است، میکروتیر از وضعیت تعادل اولیه خود به وضعیت تعادل ثانویه منتقل می‌شود. ولتاژ متناظر با این پرش را ولتاژ پرش گویند. با افزایش بیشتر ولتاژ الکتروستاتیک، جابه‌جایی میکروتیر همچنان افزایش می‌یابد تا جایی که در نقطه D دچار ناپایداری پولین می‌شود که در این حالت میکروتیر به الکتروود می‌چسبد. ولتاژ متناظر با ناپایداری پولین را ولتاژ پولین گویند. از سوی دیگر اگر از وضعیت D مقدار ولتاژ اعمالی کاهش یابد، جابه‌جایی میکروتیر کاهش می‌یابد تا جایی که در نقطه E، پرشی را به نقطه F تجربه می‌کند که مبین پرش میکروتیر از وضعیت تعادل ثانویه به وضعیت تعادل اولیه آن است. این پرش را پرش بازگشتی و ولتاژ متناظر با آن را ولتاژ پرش بازگشتی گویند. همان گونه که از منحنی مشخص است، به‌ازای مقادیر ولتاژ الکتروستاتیک که کمتر از ولتاژ پرش و بیشتر از ولتاژ پرش بازگشتی هستند (بین نقاط F و B)، سیستم دارای دو وضعیت تعادل پایدار است. این محدوده را ناحیه دوپایداری استاتیک می‌نامند.

در منحنی پاسخ استاتیک نشان داده شده در نمودار ۱، نقاط E، B و D نقاط انشعاب از نوع نقطه-زین‌اسبی هستند. در محل این نوع از انشعاب، یک شاخه حل پایدار با یک شاخه حل ناپایدار به هم می‌رسند.

با صفر در نظر گرفتن انحنای اولیه و صرف نظر از لایه‌های پیزوالکتریک، مدل میکروتیر تخت دوسرگیردار به دست می‌آید. برای این مدل نیز ولتاژهای پولین برای میکروتیر با طول‌های متفاوت و عرض $a=50\mu m$ ، ضخامت $h=2.94\mu m$ و

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \varphi^{(iv)} \varphi dx - \lambda_1 \int_0^1 \varphi^{(vi)} \varphi dx - \lambda_2 \int_0^1 \varphi'' \varphi dx \\ &\quad - \lambda_3 \int_0^1 (w_s')^2 dx \int_0^1 \varphi'' \varphi dx \\ &\quad - 2\lambda_3 \left(\int_0^1 \varphi' w_0' dx + \int_0^1 \varphi' w_s' dx \right) \int_0^1 (w_s'' + w_0'') \varphi dx \\ &\quad - 2\lambda_3 \left(\int_0^1 w_s' w_0' dx \int_0^1 \varphi'' \varphi dx \right) \\ &\quad - 2\lambda_5 V_{DC}^2 \int_0^1 \frac{\varphi^2}{(1 + w_s + w_0)^3} dx \\ K_{nq} &= -2\lambda_3 \left(\int_0^1 \varphi' w_0' dx + \int_0^1 \varphi' w_s' dx \right) \int_0^1 \varphi'' \varphi dx \\ &\quad - \lambda_3 \int_0^1 \varphi' \varphi dx \int_0^1 (w_s'' + w_0'') \varphi dx \\ &\quad + 3\lambda_5 V_{DC}^2 \int_0^1 \frac{\varphi^3}{(1 + w_s + w_0)^4} dx \\ K_{nc} &= -\lambda_3 \int_0^1 (\varphi')^2 dx \int_0^1 \varphi'' \varphi dx \\ &\quad - 4\lambda_5 V_{DC}^2 \int_0^1 \frac{\varphi^4}{(1 + w_s + w_0)^5} dx \\ F_1 &= -2\lambda_5 V_{DC} \int_0^1 \frac{\varphi}{(1 + w_s + w_0)^2} dx \\ F_2 &= 4\lambda_5 V_{DC} \int_0^1 \frac{\varphi^2}{(1 + w_s + w_0)^3} dx \\ f_1 &= -\lambda_5 \int_0^1 \frac{\varphi}{(1 + w_s + w_0)^2} dx \\ f_2 &= 2\lambda_5 \int_0^1 \frac{\varphi^2}{(1 + w_s + w_0)^3} dx \end{aligned}$$

همچنین با توجه به کوچک بودن دامنه نوسانات حول وضعیت تعادل استاتیک، u به‌صورت بسط مجانبی ۳۷ در نظر گرفته می‌شود.

(۳۷)

$$u(t) = \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 q_3(T_0, T_1, T_2)$$

در بسط مجانبی ۳۷، ε پارامتر کتابخانه‌ای است و $T_0 = t$ و $T_1 = \varepsilon t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ به‌ترتیب مقیاس‌های زمانی بزرگ، متوسط و کوچک هستند.

با انجام عملیات ریاضی مشابه آن چه در دو پژوهش [25, 30] انجام شده است، معادله پاسخ فرکانسی ۳۸ به دست می‌آید.

(۳۸)

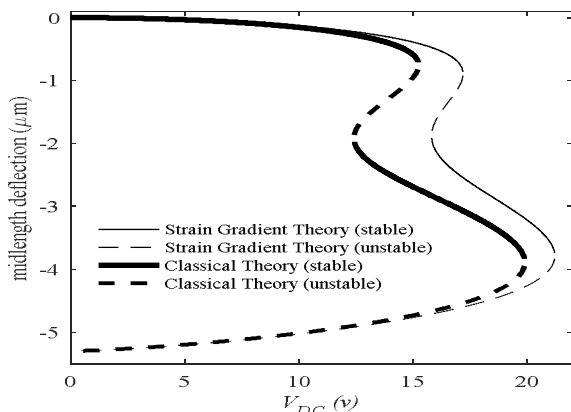
$$\begin{aligned} 4 \left(\omega a_0 \sigma + a_0^3 \left(\frac{5}{12} \frac{K_{nq}^2}{\omega^2} - \frac{3}{8} K_{nc} \right) \right)^2 + (\lambda_4 \omega a_0)^2 \\ = (F_1 V_{AC})^2 \end{aligned}$$

در رابطه ۳۸، a_0 دامنه پاسخ سیستم و σ بیانگر فاصله فرکانس

دارد این است که هر چه ابعاد سیستم، کوچک‌تر و به پارامتر مقیاس طولی آن نزدیک‌تر شود، تفاوت این دو سختی بیشتر می‌شود و اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری افزایش می‌یابد.

جدول (۱) مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتر در نظر گرفته شده

مقدار	مشخصه
۶۰۰ μm	طول میکروتر (L)
۳۰ μm	عرض میکروتر (a)
۱ μm	ضخامت میکروتر (h _p)
۱/۳ μm	خیز اولیه میکروتر (b ₀)
۴ μm	فاصله اولیه (g ₀)
۲۳۳۲ Kg/m ³	دانسیته میکروتر (ρ _b)
۱۶۶ GPa	مدول یانگ میکروتر (E _b)
۰/۰۱ μm	ضخامت لایه پیزوالکتریک (h _p)
۷۵۰۰ Kg/m ³	دانسیته پیزوالکتریک (ρ _p)
۷۶/۶ GPa	مدول یانگ پیزوالکتریک (E _p)
-۹/۲۹	ثابت پیزوالکتریک (e _{۳۱})
۸/۸۴۵×۱۰-۱۲ F/m	ثابت دی‌الکتریک (ε _۰)



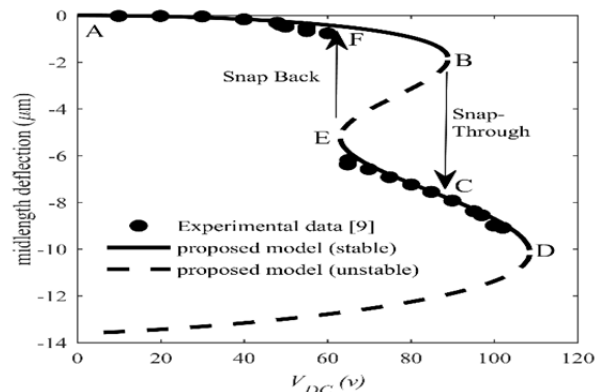
نمودار (۳) اثر اندازه بر رفتار استاتیک میکروتر دارای انحنا اولیه

سپس به بررسی تاثیر در نظر گرفتن اثر اندازه بر فرکانس اصلی سیستم پرداخته شده است. بدین منظور فرکانس طبیعی سیستم به‌ازای ولتاژهای مختلف الکتروستاتیک به دست آمده و منحنی آن در نمودار ۴ رسم شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود هر یک از منحنی‌های فرکانسی از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول مربوط به وضعیت تعادل اولیه میکروتر و پیش از وقوع پرش بوده و بخش دوم مربوط به وضعیت تعادل ثانویه میکروتر پس از وقوع پرش است. این دو بخش دارای همپوشانی هستند و این ناحیه متناظر با محدوده ولتاژی بوده که سیستم دوپایداری است. مشاهده می‌شود که قبل از وقوع پرش منحنی متناظر با تئوری غیرکلاسیک گرایان کرنش فرکانس‌های بالاتری را نسبت به تئوری کلاسیک برای سیستم پیش‌بینی می‌کند که علت آن بالاتر بودن سختی خمشی در تئوری گرایان کرنش است. در واقع بالاتر بودن سختی معادل در تئوری گرایان کرنش باعث شده است تا فرکانس سیستم در حالتی که در موقعیت تعادل اولیه قرار دارد، بالاتر از آن چه تئوری کلاسیک پیش‌بینی می‌کند، باشد.

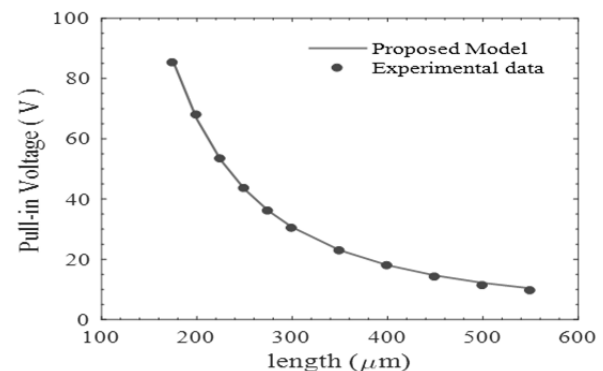
سپس به بررسی تاثیر تحریک پیزوالکتریک بر رفتار استاتیک میکروتر پرداخته و پاسخ استاتیک میکروتر به‌ازای سه حالت مختلف $V_p=+50\text{mv}$ و $V_p=-50\text{mv}$ و $V_p=0$ در نمودار ۵ نشان داده شده است. اعمال ولتاژ پیزوالکتریک با پولاریته مثبت موجب ایجاد نیروی کششی محوری در میکروتر می‌شود. بنابراین موجب کاهش خیز اولیه آن می‌شود و در نتیجه میکروتر با چنین تحریک

$g_0=1.05\mu\text{m}$ و پیش‌تنشی معادل ۱۰Mpa به دست آمده و با نتایج تجربی ارایه‌شده در یک پژوهش^[31] مقایسه شده و در نمودار ۲ نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود مدل در نظر گرفته شده در این مورد نیز تطابق خوبی با نتایج تجربی ارایه‌شده در یک پژوهش^[31] دارد.

در بخش‌های بعدی نشان داده شده است که میکروتیرهای دارای انحنای اولیه با طراحی مناسب می‌توانند دوپایداری باشند. در غیر این صورت مانند میکروتیرهای تخت به‌ازای هر ولتاژ الکتروستاتیک، صرفاً یک وضعیت تعادل پایدار دارند. همچنین می‌توان محدوده دوپایداری سیستم را کاهش یا افزایش داد.



نمودار (۴) اعتبارسنجی مدل در نظر گرفته شده در این مقاله با مرجع^[9]



نمودار (۵) اعتبارسنجی مدل میکروتر تخت بدون تحریک پیزوالکتریک با مرجع^[31]

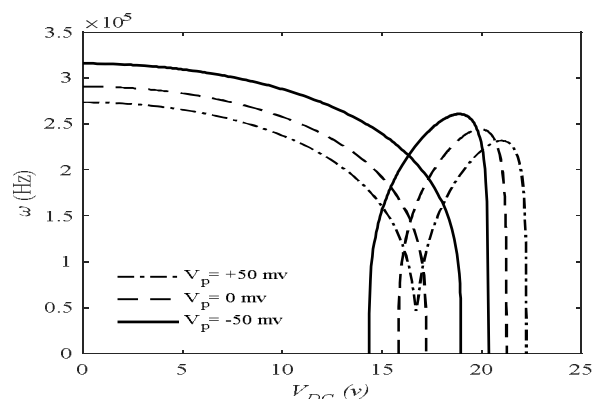
۵- نتایج شبیه‌سازی و بحث در نتایج

برای انجام شبیه‌سازی‌ها، میکروتر با ابعاد و مشخصات ارایه‌شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است. ابتدا تاثیر در نظر گرفتن اثر اندازه بر رفتار استاتیک میکروتر مورد بررسی قرار گرفته و این کار با مقایسه رفتار استاتیک میکروتر براساس تئوری کلاسیک با تئوری غیرکلاسیک گرایان کرنش انجام شده که نتایج آن در نمودار ۳ ارایه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تئوری گرایان کرنش ولتاژ پرش و پولین بزرگ‌تری را برای میکروتر پیش‌بینی می‌کند. دلیل این تفاوت را می‌توان با نگاه کردن به اولین رابطه در معادلات ۲۳ دریافت. سختی خمشی در نظر گرفته شده توسط تئوری کلاسیک عبارت از $(EI)_{eq}$ بوده، این در حالی است که سختی در نظر گرفته شده توسط تئوری غیرکلاسیک گرایان کرنش عبارت از $(EI)_{eq} + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{120}{225} l_1^2 + l_2^2 \right)$ است. بنابراین واضح بوده که سختی خمشی در نظر گرفته شده توسط تئوری گرایان کرنش بزرگ‌تر از سختی خمشی تئوری کلاسیک است. نکته‌ای که وجود

بر فرکانس طبیعی اثرگذار هستند. بنابراین تأثیری که در نهایت، تحریک پیزوالکتریک بر فرکانس می‌گذارد، معادل تأثیر برآیند دو عامل فوق است. همان گونه که در نمودار ۶ نشان داده شده است، تحریک پیزوالکتریک با پولاتریت مثبت در نهایت موجب کاهش فرکانس طبیعی و تحریک پیزوالکتریک با پولاتریت منفی موجب افزایش آن می‌شود. از منحنی‌های نمودار ۶ نیز تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک بر ناحیه دوپایداری میکروتیر قابل درک است. همان گونه که پیشتر نیز اشاره شد، تحریک منفی پیزوالکتریک ($V_p = -$) باعث بزرگ‌تر شدن ناحیه دوپایداری شده و تحریک ($V_p = +50\text{mv}$) موجب از بین رفتن ناحیه دوپایداری شده و منحنی مربوط به این تحریک به صورت یکپارچه بوده است و به‌ازای هیچ ولتاژ الکتروستاتیک دارای دو جواب نیست.

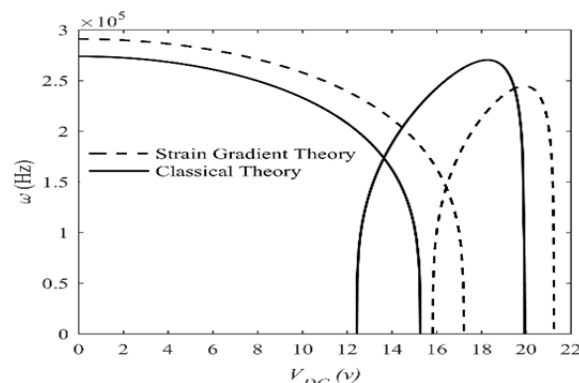
حال به بررسی رفتار دینامیک میکروتیر پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا رزونانس اولیه میکروتیر با استفاده از دو روش پرتابه‌ای و مقیاس‌های زمانی چندگانه تحت تحریک الکتروستاتیک $V_{DC} = 14\text{v}$ و ضریب میرایی $\zeta = 0.0005$ به‌ازای دو مقدار مختلف $V_{AC} = 5\text{mv}$ و $V_{AC} = 50\text{mv}$ به دست آمده و در نمودار ۷ رسم شده است. در این نمودارها خطوط پیوسته و خط چین به ترتیب بیانگر پاسخ‌های تناوبی (چرخه‌های حدی) پایدار و ناپایدار حاصل از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه است. همچنین دایره‌های توپ و توخالی بیانگر چرخه‌های حدی پایدار و ناپایدار به دست آمده از روش پرتابه‌ای است. همان گونه که مشخص است، پاسخ هر دو روش در حالی که $V_{AC} = 5\text{mv}$ بوده، بر هم منطبق است. در حالی که با افزایش ولتاژ متناوب الکتروستاتیک به $V_{AC} = 50\text{mv}$ ، پاسخ دو روش در حال دور شدن از یکدیگر هستند.

نکته‌ای که در استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه بسیار حایز اهمیت است، در نظر گرفتن مرتبه بزرگی عبارات مختلف و نحوه بالانس شدن آنها با یکدیگر است. تنها در این صورت است که می‌توان انتظار پاسخ منطقی و معتبر از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه داشت [30]. با در نظر گرفتن مرتبه بزرگی عبارات مطابق با آن چه در یک مرجع [30] آمده است، مشخص می‌شود که پاسخ فرکانسی در همسایگی رزونانس اولیه به‌ازای ولتاژهای تحریک متناوب الکتروستاتیک تا مرتبه بزرگی میلی‌ولت معتبر است. در چنین شرایطی همان گونه که از نمودار ۷- الف مشخص است پاسخ به دست آمده از دو روش پرتابه‌ای و اغتشاشات دارای تطابق هستند. با افزایش مرتبه بزرگی تحریک متناوب الکتروستاتیک مشاهده می‌شود که پاسخ به دست آمده از دو روش تطابق ندارند. دلیل این امر معتبر نبودن حل مجانبی در نظر گرفته شده در روش اغتشاشات است.

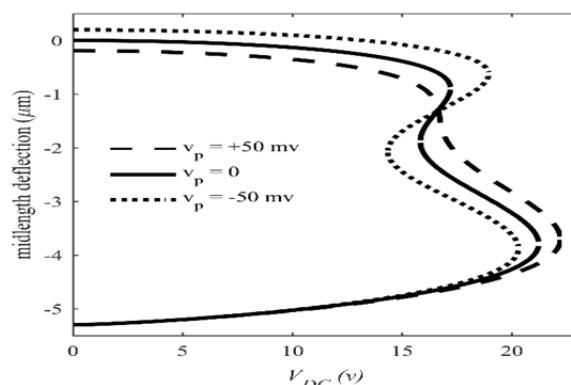


نمودار ۶ اثر تحریک پیزوالکتریک بر فرکانس اصلی میکروتیر دارای انحنا اولیه

پیزوالکتریک نسبت به حالتی که تحریک پیزوالکتریک ندارد، اندکی به سمت الکتروود ثابت متمایل می‌شود. برعکس با اعمال ولتاژ پیزوالکتریک با پولاتریت منفی، نیروی فشاری محوری در میکروتیر القا می‌شود که موجب افزایش خیز اولیه آن می‌شود و در نتیجه میکروتیر اندکی از الکتروود ثابت دور می‌شود. دلیل این که در نمودار ۵، مبدأ منحنی مربوط به $V_p = +50\text{mv}$ نسبت به منحنی $V_p = 0$ اندکی به سمت پایین آمده و مبدأ منحنی مربوط به $V_p = -50\text{mv}$ اندکی به سمت بالا رفته نیز همین است. از طرفی تحریک پیزوالکتریک با پولاتریت مثبت موجب افزایش سختی خمشی میکروتیر و پولاتریت منفی موجب کاهش سختی خمشی میکروتیر می‌شود. در نمودار ۵ مشاهده می‌شود که ولتاژ پیزوالکتریک مثبت موجب کاهش ولتاژ پرش و افزایش ولتاژ پرش بازگشتی و بنابراین باعث کوچک شدن ناحیه دوپایداری می‌شود. حتی به‌ازای ولتاژهای پیزوالکتریک بزرگ به اندازه کافی می‌توان ناحیه دوپایداری را از بین برد. همچنین تحریک پیزوالکتریک با پولاتریت مثبت موجب افزایش ولتاژ پولین می‌شود که علت آن افزایش سختی خمشی میکروتیر در اثر ایجاد نیروی کششی محوری در آن است. از سوی دیگر تحریک پیزوالکتریک با پولاتریت منفی موجب افزایش ولتاژ پرش و کاهش ولتاژ پرش بازگشتی شده است و در نتیجه موجب بزرگ‌تر شدن ناحیه دوپایداری میکروتیر می‌شود. ولتاژ پولین نیز در این حالت کاهش یافته که آن هم به علت کاهش در سختی خمشی میکروتیر است.



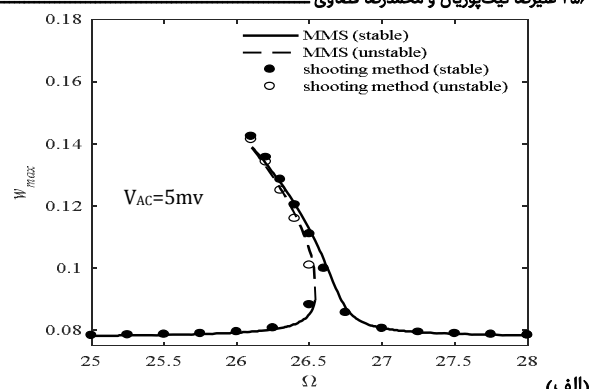
نمودار ۴ اثر اندازه بر فرکانس اصلی میکروتیر دارای انحنا اولیه



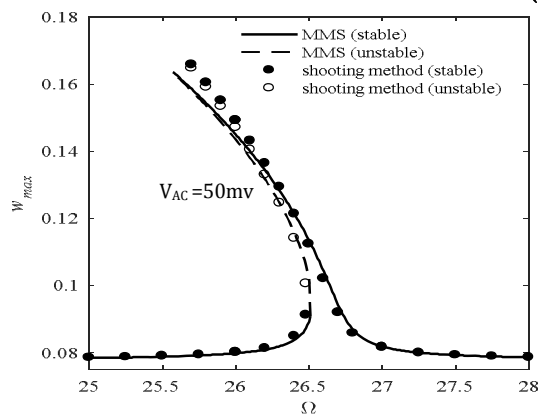
نمودار ۵ اثر تحریک پیزوالکتریک بر رفتار استاتیک میکروتیر دارای انحنا اولیه

تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی مود اول میکروتیر در نمودار ۶ نشان داده شده است. تحریک پیزوالکتریک از طرفی باعث تغییر در خیز اولیه میکروتیر و از طرف دیگر موجب تغییر در سختی خمشی آن می‌شود. هر یک از دو عامل خیز اولیه و سختی خمشی

با توجه به این که پدیده‌های مورد بررسی در این پژوهش در تحریک‌های متناوب الکتروستاتیک بزرگ‌تر از مرتبه بزرگی میلی‌ولت اتفاق می‌افتند، روش مقیاس‌های زمانی چندگانه قادر به پیش‌بینی صحیح رفتار سیستم نخواهد بود. لذا باقی پاسخ‌ها با استفاده از روش عددی پرتابه‌ای به دست آمده است. در مرحله بعد به بررسی تاثیر تحریک پیزوالکتریک و در نظر گرفتن اثر اندازه بر رفتار رزونانسی سیستم در نزدیکی رزونانس اولیه پرداخته شده است. برای این منظور پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک $V_{AC}=2V$ و $V_{DC}=5V$ حول رزونانس اولیه با استفاده از روش پرتابه‌ای به دست آمده و در نمودار ۸ رسم شده است. در این نمودار، منحنی‌های ردیف اول (a) با استفاده از تئوری کلاسیک و منحنی‌های ردیف دوم (b) با استفاده از تئوری گرادیان کرنش رسم شده‌اند. بنابراین با مقایسه منحنی‌های ردیف اول و دوم می‌توان به تاثیر اندازه بر رزونانس اولیه میکروتیر پی برد. منحنی‌ها در هر حالت به‌ازای سه تحریک پیزوالکتریک مختلف رسم شده‌اند. منحنی‌های ستون اول (۱)، دوم (۲) و سوم (۳) به‌ترتیب مربوط به تحریک پیزوالکتریک با ولتاژ $V_p=0mv$ ، $V_p=-50mv$ و $V_p=+50mv$ است. میکروتیر تحت چنین تحریکی رفتار نرم‌شوندگی- سخت‌شوندگی از خود نشان می‌دهد. بدین معنا که در نزدیکی فرکانس طبیعی مود اول، دامنه پاسخ‌ها که به چرخه حدی نیز مشهور هستند، شروع به افزایش می‌کنند و به سمت چپ محور فرکانس متمایل می‌شوند. در این جریان یکی از شاخه‌های پایدار از طریق یک نقطه انشعاب از نوع نقطه-زین‌اسبی (نقطه A در نمودار ۸- a2) به شاخه ناپایدار تبدیل می‌شود.

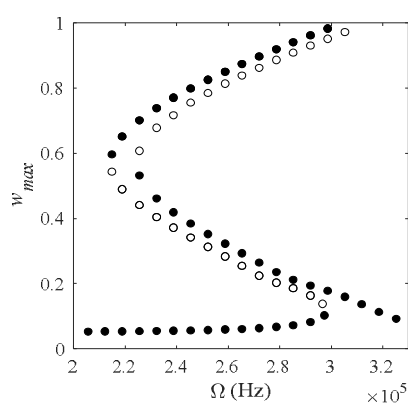


(الف)

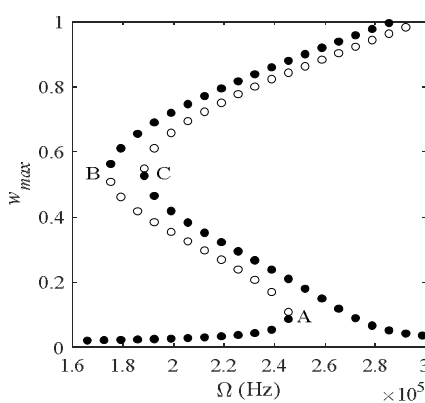


(ب)

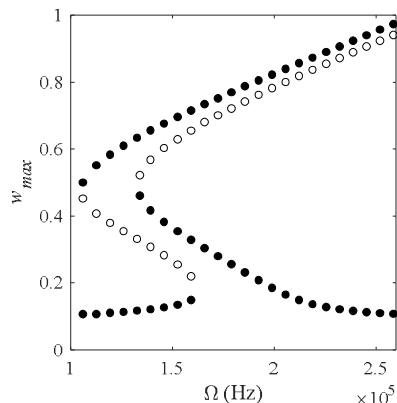
نمودار ۸) رزونانس اولیه میکروتیر تحت تحریک الکتروستاتیک با $V_{DC}=14V$ و $\zeta=0.0005$



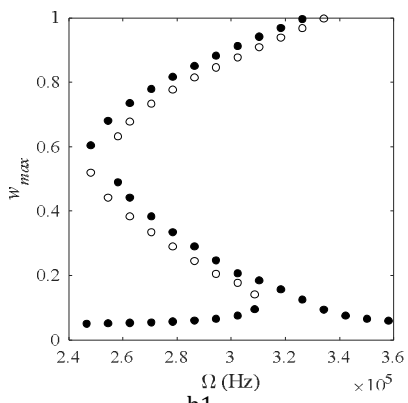
a1



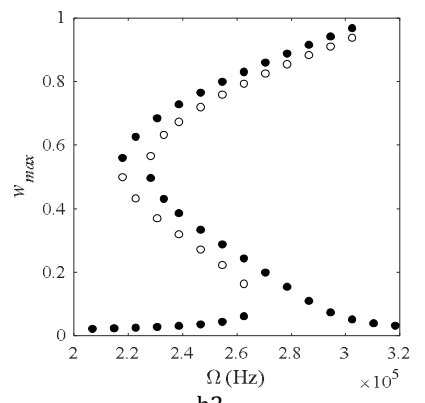
a2



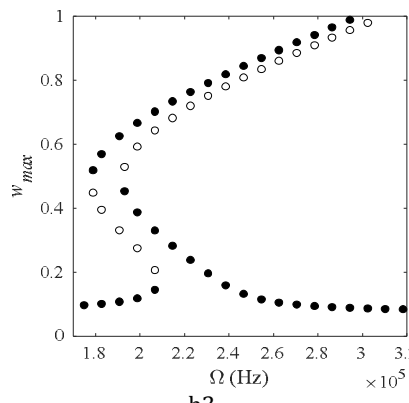
a3



b1



b2



b3

نمودار ۸) رزونانس اولیه میکروتیر تحت تحریک الکتروستاتیک با $V_{AC}=2V$ و $V_{DC}=5V$ (a، تئوری کلاسیک، b، تئوری گرادیان کرنش، ۱، $V_p=0mv$ ، ۲، $V_p=-50mv$ ، ۳، $V_p=+50mv$)

رزونانس اولیه شرح داده شد، در این حالت نیز با در نظر گرفتن اثر اندازه، علاوه بر این که فرکانس میکروتیر افزایش می‌یابد و پاسخ‌های غیرپدیایی در فرکانس‌های بالاتری از پاسخ‌های پدیایی منشعب می‌شوند، میکروتیر نیز رفتار نرم‌شوندگی ضعیف‌تری از خود نشان می‌دهد که علت این رفتار نیز بزرگ‌تر بودن سختی خمشی در تئوری گرادیان کرنش نسبت به تئوری کلاسیک است. همین امر موجب کوچک‌تر بودن ناحیه چندپاسخی میکروتیر (فرکانس‌هایی که به‌ازای آنها سیستم چند پاسخ پایدار دارد) کوچک‌تر می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی رفتار استاتیک و دینامیک غیرخطی میکروتیر دوسرگیردار دارای انحنای اولیه تحت تحریک پیزوالکتریک و الکتروستاتیک پرداخته شده است. دو لایه نازک پیزوالکتریک به‌طور کامل به سطوح بالایی و پایینی میکروتیر چسبیده است. با اعمال ولتاژ همسان به لایه‌های پیزوالکتریک، نیروی محوری درون میکروتیر ایجاد می‌شود که خود موجب تغییر در سختی خمشی و مقدار انحنای آن می‌شود. از این پدیده به‌عنوان عامل تنظیم فرکانس استفاده شده است. معادلات حاکم بر سیستم به روش همپلتون به دست آمده و با استفاده از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش، اثر اندازه نیز در فرمولاسیون سیستم در نظر گرفته شده است. معادله استاتیک با استفاده از روش نیوتون-رافسون حل شده و تاثیر اندازه و تحریک پیزوالکتریک بر آن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان داد که با اعمال ولتاژ مناسب پیزوالکتریک می‌توان ناحیه دوپایداری استاتیک میکروتیر را تنظیم کرد و آن را کاهش یا افزایش داد یا حتی می‌توان این ناحیه را حذف کرد. همچنین معادله دینامیک نوسانات میکروتیر با استفاده از دو روش پرتابه‌ای و مقیاس‌های زمانی چندگانه حل و با یکدیگر مقایسه شد. طبق نتایج با افزایش دامنه تحریک متناوب الکتروستاتیک، روش مقیاس‌های زمانی چندگانه قادر به پیش‌بینی صحیح رفتار میکروتیر نیست. سپس تاثیر تحریک پیزوالکتریک و همچنین اثر اندازه بر رفتار دینامیک سیستم در همسایگی رزونانس اولیه مورد بحث قرار گرفت. طبق یافته‌ها با اعمال تحریک پیزوالکتریک با پولاریته مثبت بر شدت رفتار سخت‌شوندگی سیستم و بالعکس با اعمال تحریک پیزوالکتریک با پولاریته منفی بر شدت رفتار نرم‌شوندگی افزوده می‌شود. همچنین با توجه به این که در تئوری گرادیان کرنش، سختی خمشی بزرگ‌تری برای میکروتیر در نظر گرفته می‌شود، در نظر گرفتن اثر اندازه موجب بیشتر شدن رفتار سخت‌شوندگی می‌شود. در نهایت نیز بررسی تاثیر اندازه بر رزونانس ثانویه زیرهارمونیک از مرتبه ۱/۲ نشان داد که تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش فرکانس بالاتر و همچنین دامنه نوسانات کوچک‌تری را برای میکروتیر پیش‌بینی می‌کند.

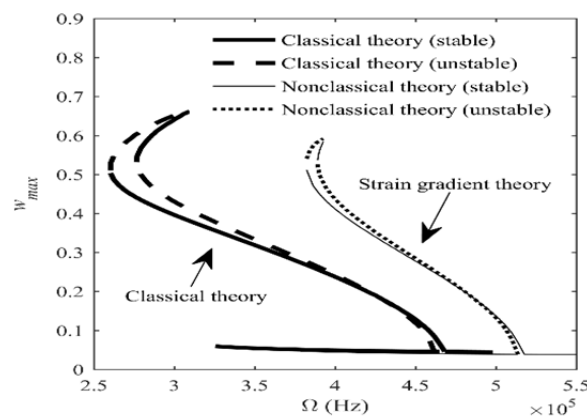
تشکر و قدردانی: نویسندگان بر خود لازم می‌دانند از جناب آقای دکتر صابر عزیزی بابت رهنمودهای مفیدشان قدردانی نمایند.

تأییدیه اخلاقی: این مقاله تاکنون در نشریه دیگری (به‌طور کامل یا بخشی از آن) به چاپ نرسیده است. همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری ارسال نشده است. ضمناً محتویات علمی مقاله حاصل فعالیت علمی نویسندگان بوده و صحت و اعتبار نتایج بر عهده نویسندگان است.

تعارض منافع: مقاله حاضر هیچ گونه تعارض منافعی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

از نقطه‌نظر فیزیکی، رفتار نرم‌شوندگی ناشی از غیرخطی‌های مربوط به تحریک الکتروستاتیک و انحنای میکروتیر بوده و رفتار سخت‌شوندگی ناشی از تکیه‌گاه دوسرگیردار میکروتیر است که به غیرخطی هندسی نیز شهرت دارد^[1]. رفتار نرم‌شوندگی-سخت‌شوندگی که میکروتیر از خود نشان می‌دهد، بیانگر این است که در چرخه‌های حدی کم‌دامنه میکروتیر، اثر نرم‌شوندگی ناشی از دو عامل ذکر شده بر اثر سخت‌شوندگی هندسی غلبه دارد. اما با افزایش دامنه سیکل‌های تناوبی، اثر سخت‌شوندگی ناشی از غیرخطی هندسی افزایش می‌یابد و در نهایت هر دو شاخه حل پایدار و ناپایدار از طریق دو نقطه انشعاب نقطه-زین‌اسبی (نقاط B و C در نمودار ۸-۲) به‌ترتیب به شاخه‌های ناپایدار و پایدار تبدیل می‌شوند.

با مشاهده منحنی‌های رسم‌شده در نمودار ۸، این نتیجه حاصل می‌شود که علاوه بر عوامل غیرخطی ذکر شده، اثر اندازه و تحریک پیزوالکتریک بر رفتاری که سیستم از خود نشان می‌دهد، تاثیر دارد، همچنین روی شدت و ضعف نرم‌شوندگی یا سخت‌شوندگی نیز تاثیر می‌گذارد. با مقایسه منحنی‌های به‌دست‌آمده از تئوری کلاسیک (ردیف اول نمودار ۸) با همتای خود که از تئوری گرادیان کرنش به دست آمده است (ردیف دوم نمودار ۸)، مشاهده می‌شود که تئوری گرادیان کرنش، رفتار سخت‌شوندگی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. علت این امر بزرگ‌تر بودن سختی خمشی در تئوری گرادیان کرنش نسبت به تئوری کلاسیک است که طبیعتاً باعث می‌شود میکروتیر، رفتار سخت‌شوندگی پُررنگ‌تری از خود بروز دهد. از سوی دیگر با اعمال تحریک مثبت پیزوالکتریک از شدت رفتار نرم‌شوندگی کاسته و سخت‌شوندگی بیشتر می‌شود که علت آن، افزایش سختی خمشی میکروتیر در اثر القای نیروی کششی محوری در آن است. از سوی دیگر با اعمال تحریک منفی پیزوالکتریک، نیروی محوری فشاری در میکروتیر القا می‌شود که موجب کاهش سختی خمشی میکروتیر و در نتیجه رفتار نرم‌شوندگی در آن پُررنگ‌تر می‌شود. همچنین از شدت رفتار سخت‌شوندگی کاسته می‌شود.



نمودار ۹) اثر اندازه بر میکروتیر تحت تحریک الکتروستاتیک و $V_{DC}=10V$ و $V_{AC}=2V$ در همسایگی رزونانس زیرهارمونیک مرتبه ۱/۲

در نهایت اثر اندازه بر رزونانس ثانویه میکروتیر دارای انحنای اولیه در نمودار ۹ نشان داده شده است. در این نمودار، رفتار میکروتیر تحت تحریک الکتروستاتیک $V_{DC}=10V$ و $V_{AC}=2V$ در همسایگی رزونانس ثانویه زیرهارمونیک از مرتبه ۱/۲ نشان داده شده است. از نمودار ۹ مشخص است که میکروتیر، رفتار نرم‌شوندگی-سخت‌شوندگی از خود نشان می‌دهد. همانند آن چه در مورد

microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2005;15(5):1060.

16- Chen X, Meguid SA. Snap-through buckling of initially curved microbeam subject to an electrostatic force. *Proceedings of the Royal Society A*. 2015;471:20150072.

17- Ghayesh MH, Farokhi H, Alici G. Size-dependent electro-elasto-mechanics of MEMS with initially curved deformable electrodes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015;103:247-264.

18- Tajaddodianfar F, Nejat Pishkenari H, Hairi Yazdi MR, Maani Miandoab E. Size-dependent bistability of an electrostatically actuated arch NEMS based on strain gradient theory. *Journal of Physics D Applied Physics*. 2015;48(24):245503.

19- Tajaddodianfar F, Nejat Pishkenari H, Hairi Yazdi MR, Maani Miandoab E. On the dynamics of bistable micro/nano resonators: Analytical solution and nonlinear behavior. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015;20(3):1078-1089.

20- Ghayesh MH, Farokhi H. Bistable nonlinear response of MEMS resonators. *Nonlinear Dynamics*. 2017;90(3):1627-1645.

21- Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003;51(8):1477-1508.

22- Nikpourian AR, Ghazavi MR, Azizi S. On the nonlinear dynamics of a piezoelectrically tuned micro-resonator based on non-classical elasticity theories. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2018;14(1):1-19.

23- Preumont A. *Mechatronics: Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*. Dordrecht: Springer Science & Business Media; 2006.

24- Ballas RG. *Piezoelectric multilayer beam bending actuators: Static and dynamic behavior and aspects of sensor integration*. Heidelberg: Springer Science & Business Media; 2007.

25- Azizi S, Ghazavi MR, Rezazadeh Gh, Ahmadian I, Cetinkaya C. Tuning the primary resonances of a micro resonator, using piezoelectric actuation. *Nonlinear Dynamics*. 2014;76(1):839-852.

26- Farokhi H, Ghayesh MH, Amabili M. Nonlinear dynamics of a geometrically imperfect microbeam based on the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*. 2013;68:11-23.

27- Meirovitch L. *Fundamentals of vibrations*. Long Grove: Waveland Press; 2010.

28- Maani Miandoab E, Nejat Pishkenari H, Yousefi Koma A. Dynamic analysis of electrostatically actuated nanobeam based on strain gradient theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2015;15(04):1450059.

29- Nayfeh AH, Balachandran B. *Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental methods*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2008.

30- Azizi S, Chorsi MT, Bakhtiari Nejad F. On the secondary resonance of a MEMS resonator: A conceptual study based on shooting and perturbation methods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016;82:59-68.

31- Osterberg PM, Senturia SD. M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 1997;6(2):107-118.

سهم نویسندگان: علیرضا نیک‌پوریان (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ محمدرضا قضاوی (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/تحلیلگر آماری (۵۰٪)

منابع مالی: منابع مالی خاصی برای انجام این تحقیق استفاده نشده است.

منابع

- 1- Younis MI. *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*. New York: Springer Science & Business Media; 2011.
- 2- Younis MI, Ouakad HM, Alsaleem FM, Miles R, Cui W. Nonlinear dynamics of MEMS arches under harmonic electrostatic actuation. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2010;19(3):647-656.
- 3- Charlot B, Sun W, Yamashita K, Fujita H, Toshiyoshi H. Bistable nanowire for micromechanical memory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2008;18(4):045005.
- 4- Al Hafiz MA, Kosuru L, Ramini A, Chappanda KN, Younis MI. In-plane MEMS shallow arch beam for mechanical memory. *Micromachines*. 2016;7(10):191.
- 5- Intaraprasong V, Fan S. Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical buckling. *Applied Physics Letters*. 2011;98(24):241104.
- 6- Joe DJ, Linzon Y, Adiga VP, Barton RA, Kim M, Ilic B, et al. Stress-based resonant volatile gas microsensor operated near the critically buckled state. *Journal of Applied Physics*. 2012;111(10):104517.
- 7- Ouakad HM. An electrostatically actuated MEMS arch band-pass filter. *Shock and Vibration*. 2013;20(4):809-819.
- 8- Zhang Y, Wang Y, Li Z, Huang Y, Li D. Snap-through and pull-in instabilities of an arch-shaped beam under an electrostatic loading. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2007;16(3):684-693.
- 9- Krylov S, Ilic BR, Schreiber D, Seretensky S, Craighead H. The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable microstructures. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2008;18(5):055026.
- 10- Das K, Batra RC. Pull-in and snap-through instabilities in transient deformations of microelectromechanical systems. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2009;19(3):035008.
- 11- Krylov S, Dick N. Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2010;22(6-8):445-468.
- 12- Ouakad HM, Younis MI. The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010;45(7):704-713.
- 13- Bataineh AM, Younis MI. Dynamics of a clamped-clamped microbeam resonator considering fabrication imperfections. *Microsystem Technologies*. 2015;21(11):2425-2434.
- 14- Chen X, Meguid SA. On the parameters which govern the symmetric snap-through buckling behavior of an initially curved microbeam. *International Journal of Solids and Structures*. 2015;66:77-87.
- 15- Mc Farland AW, Colton JS. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to