ماهنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
mme.modares.ac.ir

بررسی سه بعدی رفتارهای مکانیکی غیرخطی وابسته به دمای ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی روی پایه الاستیک وینکلر-پسترناک

یوسف غلامی[1]، رضا انصاری خلخالی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت
* رشت، صندوق پستی 3756، r_ansari@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله
مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 دی 1396
پذیرش: 12 اسفند 1396
ارائه در سایت: 14 اردیبهشت 1397
کلید واژگان:
ورق مدرج تابعی
رفتار مکانیکی غیرخطی
تئوری الاستیسیته سه بعدی
حل عددی

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار مکانیکی غیرخطی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی در جهت ضخامت وابسته به دما با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی روی پایه‌های الاستیک وینکلر-پسترناک پرداخته شده است. فرض می‌شود خواص مواد سازنده وابسته به دما می‌باشند و براساس یک قانون توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. با در نظر گرفتن رابطه کرنش غیرخطی گرین-لاگرانژ، اثرات غیرخطی هندسی در محاسبات منظور شده است. پس از بدست آوردن انرژی‌های کرنشی و جنبشی و کار ناشی از نیروی خارجی و در نظر گرفتن اثرات دما و بستر الاستیک، از اصل همیلتون برای بدست آوردن معادلات حاکم سه بعدی استفاده می‌شود. برای حل مسائل مربوط به رفتار مکانیکی سیستم، ابتدا از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته برای گسسته‌سازی معادلات کوپل غیرخطی در فضای مکان استفاده می‌شود. سپس، با استفاده از روش گلرکین عددی برای حل مسأله ارتعاشات آزاد، معادلات تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان می‌شوند و با استفاده از روش گسسته‌سازی متناوب زمانی در حوزه زمان گسسته می‌شود. در نهایت، از الگوریتم طول کمان برای یافتن پاسخ فرکانسی سیستم بهره گرفته می‌شود. برای حل مسأله خمش غیرخطی، با صرف‌نظر کردن از اثر اینرسی و استفاده از الگوریتم طول کمان، ماکزیمم خمش بر حسب نیرو به دست می‌آید. اثرات پارامترهای مانند نسبت طول به ضخامت، ثابت‌های وینکلر و پسترناک، تغییر دمای یکنواخت و خطی و شاخص کسر حجمی بر پاسخ فرکانسی و ماکزیمم خمش ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف به تفضیل مورد بررسی قرار گرفته است.

Three dimensional analysis of temperature-dependent nonlinear mechanical behaviors of functionally graded rectangular plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundation

Yousef Gholami, Reza Ansari Khalkhali*

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran
* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION
Original Research Paper
Received 31 December 2017
Accepted 03 March 2018
Available Online 04 May 2018

Keywords:
Functionally graded plate
Non-linear mechanical behaviors
3D theory of elasticity
Numerical solution procedure

ABSTRACT

The temperature-dependent nonlinear mechanical behaviors of functionally graded rectangular plates in the thickness direction resting on Winkler–Pasternak elastic foundation are investigated using the three-dimensional theory of elasticity. The material properties are temperature-dependent and varied in the thickness direction based on a power-law. Considering the nonlinear Green-Lagrange strain relation, the geometric nonlinearity is taken into account. After obtaining the potential strain, kinetic energies, taking into account the effects of the temperature and the elastic foundation, the Hamilton's principle is used to derive the nonlinear three-dimensional governing equations and corresponding boundary conditions. To solve the nonlinear free vibration problem, first, the generalized differential quadrature (GDQ) method is used to discretize the nonlinear coupled governing equations in the space domain. Then, the obtained equations are converted to the time-dependent ordinary differential equations using the numerical-based Galerkin scheme and the time periodic discretization (TPD) are used to discretize them in the time domain. Finally, the arc-length method is employed to find the frequency-response of system. Also, to solve the nonlinear bending problem, by neglecting the effect of inertia and using the arc length algorithm, the maximum deflection versus the applied load is obtained. The effects of different parameters such as length-to-thickness ratio, Winkler–Pasternak elastic foundation coefficients, uniform and linear temperature rises and volume fraction index on the frequency response and maximum deflection of functionally graded plates with various edge conditions are studied.

1- مقدمه

مواد کامپوزیتی به خاطر نسبت استحکام و سفتی به وزن بالا در طول‌سال‌های متمادی در بسیاری از کابردهای مهندسی نظیر فضاپیماها و صنایع اتومبیل‌سازی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. اخیراً مواد کامپوزیتی به نام مواد مدرج تابعی[1] توجه زیادی را در بسیاری از کاربردهای مهندسی به خود جلب کرده است [1]. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی معمولا ترکیبی از فلز و سرامیک است که به طور پیوسته از یک سمت به سمت دیگر برای رسیدن به هدف مشخصی در حال تغییر می‌باشد.

مزیت دیگر استفاده از این مواد این است که آنها قادر به مقاومت در محیط هایی با درجه حرارت بالا با حفظ یکپارچگی سازه می‌باشند. مهم‌ترین کاربرد مواد مدرج تابعی در شرایط محیطی با درجه حرارت بالا است. با توجه به افزایش ارتباط اجزای ساختاری مواد مدرج تابعی در طراحی سازه‌های فضایی و همچنین ورق‌ها به عنوان یک جز اصلی بسیاری از ابزارهای مهندسی، ویژگی‌های ارتعاشی و استاتیکی آن‌ها توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. با این وجود، در بسیاری از کارهای گذشته به ورق‌های کامپوزیتی پرداخته شده است و تحقیقات محدودی بر روی ورق‌های مدرج تابعی انجام شده است.

ورق‌های مستطیلی عموماً در صنایع هوافضا، صنایع مکانیکی، صنایع هسته ای، صنایع دریایی و هم‌چنین سازه‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور مثال، ورق‌های ضخیم در صنایع مدرن متنوع مانند ساختمان‌های بلند، کانال‌ها، بزرگ راه‌ها، اسکله کانتینر و ... کاربرد عملی دارند. در بسیاری از موارد این ورق ها تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی قرار می‌گیرند. بنابراین، درک ویژگی‌های خمشی و ارتعاشی از نیازهای ضروری برای طراحی می‌باشد. در حالت کلی، مطالعات انجام شده در این زمینه را می‌توان به مطالعات براساس تئوری‌های دو بعدی و سه بعدی دسته‌بندی نمود. در ادامه، به مرور برخی از مطالعات انجام شده پرداخته خواهد شد.

ردی [2] فرمول‌بندی نظری و مدل‌های المان محدود بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای بررسی رفتارهای استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی ارائه می‌کند و حل ناویر برای یک ورق مستطیلی تحت بار توزیع شده سینوسی شامل اثر تغییر شکل برشی ارائه کرده است. ویژگی ارتعاشی نقش بارزی در طراحی‌های مهندسی و تولید دارد. لذا، تخمین دقیق رفتار ارتعاشی سیستم‌های مکانیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. بسیاری از مطالعات قبلی در زمینه ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی برپایه تئوری‌های دو بعدی کلاسیک و تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم می‌باشد [3-7]. به عنوان مثال، یانگ و شن [3] از تئوری کلاسیک برای ارتعاشات آزاد و اجباری ورق نازک مستطیلی مدرج تابعی در معرض تنش اولیه صفحه‌ای که روی پایه الاستیک قرار دارد، استفاده کرده‌اند. یانگ و کیتیپورنچای [4] از تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی برای بررسی ارتعاشات و کمانش ورق مستطیلی مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده و استخراج صریح مقادیر ویژه استفاده کرده‌اند. ارتعاشات ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی غیر آیزوتروپیک با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی و روش اجزا محدود توسط باترا و جین [5] بررسی شده است. کیان و همکاران [6] به بررسی تغییر شکل استاتیکی، ارتعاشات آزاد و اجباری ورق الاستیک مدرج تابعی مستطیلی با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه سوم بررسی و روش پترو-گلرکین می‌پردازند. متسوناکا [7] به بررسی فرکانس طبیعی و تنش‌های کمانش ورق‌های مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییرشکل مرتبه بالا که بر پایه‌ی بسط دنباله اجزای جابجایی در جهت ضخامت هستند، می‌پردازد. در زمینه مطالعات و مدلسازی سه‌بعدی، علیزاده و علی بیگلو [8] به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی مستطیل شکل پرداخته‌اند. معادلات براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بدست آمده‌اند و با استفاده از یک روش تحلیلی برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده حل شده‌اند. ظفرمند و کدخدایان [9] یک صفحه مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و با روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار داده‌اند. علی بیگلو و عبدالله زاده شهر بابکی[10] ارتعاشات آزاد خطی سه بعدی نانو ورق‌های مستطیلی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی مورد بررسی قرار داده اند. حسینی هاشمی و همکاران [11] ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مدرج تابعی با در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از حل دقیق را ارائه کرده اند. حسینی هاشمی و همکاران [12] به حل دقیق ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های مستطیل شکل با استفاده از تئوری مرتبه سوم غیر محلی پرداخته‌اند. بخششی و خورشیدی [13] ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی در محیط حرارتی با استفاده از تئوری تنش کوپله اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند.

مرور مطالعات انجام گرفته قبلی نشان می‌دهد که بسیاری از کارهای انجام شده براساس تئوری‌های دوبعدی مانند تئوری‌های ورق کلاسیک، مرتبه اول برشی و مرتبه بالای برشی صورت گرفته است. این تئوری‌ها با برخی فرض‌ها بر روی تنش و کرنش در جهت ضخامت به وجود آمده‌اند، نظریه کلاسیک ورق‌های نازک[14] اثر تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی چرخشی را در نظر نمی‌گیرد. در حالی‌که اهمیت تغییر شکل برشی با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق به طور قابل ملاحظه ای افزایش می‌یابد. به طور کلی تئوری‌های صفحه‌ای، تغییر شکل عرضی را نادیده می‌گیرند و عموماً فرضیه تنش صفحه‌ای غالب است. این فرض‌ها ممکن است برای صفحات نازک مناسب باشند، اما ممکن است نتایج خوبی برای صفحات ضخیم با طول به ضخامت کم نداشته باشند. میندلین تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی را با فرض توزیع کرنش برشی ثابت در جهت ضخامت مطرح کرد. ضریب تصحیح برشی به منظور جبران خطای ناشی از تقریب توزیع کرنش برشی غیر یکنواخت در نظر گرفت که نتایج دقیق‌تری نسبت به تئوری کلاسیک ورق دو بعدی به ویژه برای ورق‌های ضخیم به دست آمد. تئوری‌های دو بعدی کاهش یافته مسائل سه‌بعدی با درنظرگرفتن فرضیات خاص در مدل ریاضی و معادلات استخراج شده هستند. استفاده از این فرضیات و ساده‌سازی مسائل، منجر به خطاهایی در نتایج برخی سازه‌ها، خصوصاً سازهای ضخیم و نسبتا ضخیم می‌گردد. از این رو، تئورهای دوبعدی قادر به پیش‌بینی رفتار درست و دقیقی از ورق‌ها، پانل‌ها، استوانه‌ها و پوسته‌های ضخیم و نسبتا ضخیم نیستند. همچنین، نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل سه بعدی مسائل منجر به بینش فیزیکی و واقعی دقیق‌تر می‌شود که با تئوری‌های دو بعدی امکان پذیر نیست. بنابراین، برای درک درست و کامل ویژگی های دینامیکی ورق‌های ضخیم، نظریه الاستیسیته سه بعدی باید مورد استفاده قرار گیرد. مروری بر منابع نشان می‌دهد که بررسی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسته سه‌بعدی خطی و معمولاً برای شرایط مرزی ساده صورت گرفته است [15-20]. هم‌چنین، می‌توان دریافت که ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف و براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی و در نظر گرفتن اثرات تغییر دما و بستر الاستیک روی رفتارهای غیرخطی آن تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است.

[1] Functionally graded materials (FGMs)

مطالعات سه بعدی گذشته در راستای رفتارهای خطی ورق‌های مستطیلی بدون در نظر گرفتن اثرات غیرهندسی مسأله و غالبا برای شرایط مرزی ساده با روش‌های حل تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، رفتار مکانیکی غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی وابسته به دما با شرایط مرزی مختلف براساس براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و یک روش عددی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور، براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی و در نظر گرفتن رابطه کرنش غیرخطی گرین-لاگرانژ، معادلات حاکم سه بعدی و شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل همیلتون به دست می‌آیند. سپس، از روش‌های تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته، گلرکین عددی، گسسته سازی متناوب زمانی و الگوریتم طول کمان برای حل مسائل مربوط به رفتارهای مکانیکی غیرخطی استفاده می‌شود. برای راستی‌آزمایی، فرکانس‌های طبیعی بدست آمده با نتایج موجود در دبیره مقایسه می‌شود. سپس، اثرات نسبت طول به ضخامت، ثابت های وینکلر و پسترناک، اثرات تغییر دما و خطی و شاخص کسر حجمی بر پاسخ فرکانسی و ماکزیمم خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- فرمولبندی ورق مدرج تابعی براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی

در این قسمت، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، معادلات غیرخطی و شرایط مرزی متناظر برای یک ورق مستطیلی مدرج تابعی ارائه می‌شود.

2-1- روابط ساختاری و خواص مادی ورق مستطیلی مدرج تابعی

مطابق شکل 1 یک ورق مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h در سیستم مختصات کارتزین $(0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le h)$ ساخته شده از مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت را در نظر بگیرید که لبه پایین $(z = 0)$ و لبه بالای آن $(z = h)$ به ترتیب با فلز و سرامیک خالص غنی شده است. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی به دلیل تغییر تدریجی کسر حجمی مواد سازنده، به طور پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

بر اساس قانون توانی، کسر حجمی سرامیک V_c و فلز V_m و هم چنین خواص مؤثر P_{eff}، مانند مدول یانگ E، نسبت پواسون ν و ضریب انبساط حرارتی α می توان به صورت روابط (1) محاسبه نمود:

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^k, V_m(z) = 1 - \left(\frac{z}{h}\right)^k$$
$$P_{\mathrm{eff}} = P_c V_c + P_m V_m \quad (1)$$

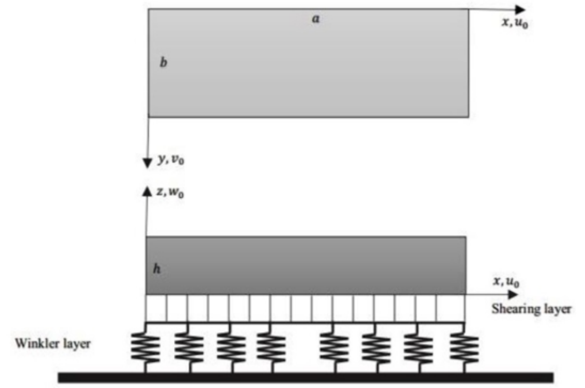


Fig. 1 Schmatic of functionally graded rectangular plate resting on elastic foundation

شکل 1 شکل شماتیک یک ورق مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک

که در آن شاخص‌های m و c به ترتیب به قطعات فلزی و سرامیکی اشاره می‌کنند که ویژگی های مواد پایین و بالای صفحه ورق مستطیلی را نشان می‌دهند. مواد مدرج تابعی معمولا در محیط‌هایی با درجه حرارت بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند که در آن تغییرات قابل توجهی در خواص مواد انتظار می‌رود خواص مواد یک ورق مستطیلی مدرج تابعی به دو حالت مکان و درجه حرارت وابسته است.

بنابراین در نظر گرفتن وابستگی دما برای پیش‌بینی قابل قبول و دقیق رفتار سازه ضروری است. خواص مواد به صورت تابع غیر خطی دمای محیط T (K) با رابطه (2) بیان می‌شود [21]:

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (2)$$

که در آن $T = To + \Delta T\,(z)$ و $T_0 = 300K$ (دمای اتاق) و P_0، P_1، P_2، و P_3 ضریب‌های وابسته به دما هستند که برای مواد تشکیل دهنده منحصر به فرد می‌باشند. این ضرایب برای دو ماده مختلف در جدول 1 قرار داده شده است [22]. از این‌رو، خواص مؤثر مواد نظیر مدول یانگ E، ضریب پواسون ν و چگالی جرمی ρ به صورت روابط (3) بیان می‌گردد:

$$E(z,T) = E_c V_c + E_m V_m, \qquad \nu(z,T) = \nu_c V_c + \nu_m V_m$$
$$\rho(z,T) = \rho_c V_c + \rho_m V_m, \qquad \alpha(z,T) = \alpha_c V_c + \alpha_m V_m \quad (3)$$

2-2- میدان دمایی عرضی در جهت ضخامت

$\Delta T(z)$ به شرایط مرزی حرارتی اعمال شده بستگی دارد. در این مسئله فرض می‌شود که مقادیر دما در سطوح پایین و بالا تغییر می‌کند. در این حالت، توزیع دما در طول ضخامت می‌تواند با حل یک معادله انتقال حرارت ثابت در جهت ضخامت ورق به‌دست آید. معادله انتقال حرارت در جهت ضخامت به صورت رابطه (4) می‌باشد:

$$-\frac{\mathrm{d}}{dz}\left(k(z)\frac{dT}{dz}\right) = 0 \quad (4)$$

با حل معادله بالا برای حالت های افزایش دمای یکنواخت و خطی، تغییرات دما در جهت ضخامت به صورت زیر به دست می‌آید:

2-2-1- افزایش دمای یکنواخت

دمای اولیه ورق مستطیلی T_0 $(T_0 = 300\mathrm{K})$ فرض می‌شود، میدان دمایی به صورت رابطه (5) بیان می‌گردد:

$$T = T_0 + \Delta T \quad (5)$$

که ΔT نشان دهنده‌ی تغییرات دما است.

2-2-2- افزایش دمای خطی

با فرض دمای T_b و T_t در پایین و بالای صفحه، میدان دمایی تحت افزایش

جدول 1 ضرایب وابسته به دما مدول الاستیسیته E، نسبت پواسون ν، ضریب انبساط حرارتی α، چگالی ρ $(Si_3N_4/SUS304)$

Table 1 Temperature-dependent coefficients of Young’s modulus E (Pa), Poisson’s ratio ν, thermal expansion coefficient α (1/K), mass density ρ(kg/m^3)

مواد	P_i	E	ν	ρ	α
Si_3N_4	P_{-1}	0	0	0	0
	P_0	348.43e9	0.24	2370	5.8723e-6
	P_1	3.070e-4	0	0	9.095e-4
	P_2	2.16e-7	0	0	0
	P_3	8.946e-11	0	0	0
SUS304	P_{-1}	0	0	0	0
	P_0	201.04e9	0.3262	8166	12.330e-6
	P_1	3.079e-4	-2.002e-4	0	8.086e-4
	P_2	-6.534e-7	3.797e-7	0	0
	P_3	0	0	0	0

دمای خطی در جهت ضخامت ورق به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$T(z) = T_{\mathrm{b}} + \Delta T(z/h) \tag{6}$$

که در آن $\Delta T = T_{\mathrm{t}} - T_{\mathrm{b}}$ و T_{b} برابر دمای اولیه ورق ($T_0 = 300\mathrm{K}$) است.

انرژی کرنشی برای مواد الاستیک خطی و بستر الاستیک را نیز می‌توان به صورت رابطه (7) نوشت [21]:

$$\Pi_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{V}} (\sigma:\varepsilon)dV$$
$$\Pi_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\int_{A} (f_{\mathrm{w}}\mathrm{w}_0)dA \tag{7}$$

که در آن $f_{\mathrm{w}} = k_{\mathrm{w}}w_0 - k_{\mathrm{g}}\nabla^2 w_0$ و V، σ، ε و A به ترتیب به حجم اشغال شده، تنسور تنش، تنسور کرنش و مساحت ورق اشاره می‌کنند.

طبق روابط گرین-لاگرانژ، کرنش‌های غیرخطی به صورت رابطه (8) بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla \mathrm{u} + (\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}} + (\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}}(\nabla \mathrm{u})] \tag{8}$$

که u بیانگر بردار جابجایی است. علاوه بر این، روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش را می‌توان به صورت رابطه (9) بیان کرد:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9}$$

که در آن δ_{ij} نشان‌دهنده‌ی دلتای کرونیکر و $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$ و $\mu = E/[2(1+\nu)]$ ثابت‌های لامه هستند که E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون می‌باشند. با در نظر گرفتن اثرات کرنش‌های حرارتی، رابطه‌ی (11) را می‌توان به صورت رابطه (10) بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sigma_{yz}\\\sigma_{xz}\\\sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{xz}\\\gamma_{xy}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\Delta T(z)\right) \tag{10}$$

که α ضریب انبساط حرارتی است. همچنین، ثابت‌های ظاهر شده در معادله (10) به صورت روابط (11) است:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu,\quad C_{12} = C_{12} = C_{12} = \lambda$$
$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu \tag{11}$$

2-3- تئوری الاستیسیته سه بعدی و استخراج معادلات

با در نظر گرفتن جابجایی‌های u_0، v_0 و w_0 به ترتیب در امتداد محورهای x، y و z، میدان جابه‌جایی ورق را می‌توان به صورت روابط (12) نوشت:

$$u_x = u_0(t,x,y,z),\quad u_y = v_0(t,x,y,z),$$
$$u_z = w_0(t,x,y,z) \tag{12}$$

مطابق رابطه‌ی (8) و میدان جابجایی، مؤلفه‌های غیرخطی کرنش‌ها به صورت روابط (13) بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right),$$
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial z}\right),$$
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \tag{13}$$

لازم به ذکر است که با جایگذاری کرنش‌های بدست آمده در رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (9)، مؤلفه‌های تنش را می‌توان بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بدست آورد.

همچنین، مطابق میدان جابجایی، انرژی جنبشی ورق و کار ناشی از نیروی خارجی را می‌توان به صورت رابطه (14) بیان کرد:

$$\Pi_T = \int_V \rho\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right\}d\mathrm{V}$$
$$\Pi_w = \int_V \mathrm{Fw}_0 dV \tag{14}$$

اصل همیلتون به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\Pi_{\mathrm{T}} - \Pi_{\mathrm{s}} - \Pi_{\mathrm{F}} + \Pi_{\mathrm{w}})dt = 0 \tag{15}$$

جایگذاری کرنش‌های غیرخطی (13) در انرژی پتانسیل کرنشی (7-1)، محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی و جنبشی و سپس استفاده از اصول اساسی حساب تغییرات، معادلات غیرخطی سه بعدی حاکم بر حرکت ورق مستطیلی به صورت روابط (16) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{xz}}{\partial z} + Z_1 = \rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{yz}}{\partial z} + Z_2 = \rho\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{xz}}{\partial x} + Z_3 + F + f_w = \rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{16}$$

که

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\sigma}_{xz}\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\sigma}_{xy}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\sigma}_{yz}\frac{\partial u_i}{\partial y}\right) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\sigma}_{jj}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{17}$$

که $(1,2,3) = (x,y,z)$ و $\bar{\sigma} = \sigma - \sigma^{\mathrm{T}}$.

علاوه بر این، شرایط مرزی را می‌توان به صورت رابطه (18) بیان کرد:

$$\delta \mathrm{u}_k = 0 \text{ یا } \left(\sigma_{\mathrm{kl}} + \sigma_{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)n_l = 0 \tag{18}$$

که $u_1 = u_0$، $u_2 = v_0$ و $u_3 = w_0$.

اکنون، با استفاده از معادلات (10)، (11)، (13) و (16)، معادلات غیر خطی کلاسیک ورق مستطیلی برحسب جابجایی‌ها به صورت روابط (19) بدست می‌آید:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + C_{12}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + C_{13}\frac{\partial w_0}{\partial x\partial z} + C_{55}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial x}\right) + \frac{\partial C_{55}}{\partial z}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+C_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x}\right)\\
&-\sigma_{xx}^T\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+z_1=\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},\\
&C_{12}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+C_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+C_{23}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial z}\\
&+C_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\\
&+C_{44}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial y}\right)\\
&-\sigma_{yy}^T\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+z_2=\rho\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},\\
&C_{13}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial z}+C_{23}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial z}+C_{33}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}+\frac{\partial C_{13}}{\partial z}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&+\frac{\partial C_{23}}{\partial z}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial C_{33}}{\partial z}\frac{\partial w_0}{\partial z}+C_{55}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\\
&+C_{44}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\\
&-\sigma_{zz}^T\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}\right)+z_3+f_e+F=\rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

که در آن z_1، z_2 و z_3 مؤلفه‌های غیرخطی هستند که برای رعایت اختصار در اینجا آورده نمی‌شوند.

ترکیبات مختلفی از شرایط مرزی را می‌توان برای ورق‌های مستطیلی در نظر گرفت. در این مطالعه، شرایط مرزی ساده (SSSS)، شرایط مرزی گیردار (CCCC) و شرایط مرزی دوسر گیردار و دو سر ساده (CSCS) در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌شوند:

- شرایط مرزی SSSS:

لبه‌های $x=0,a$:

$$\sigma_{xx}+\sigma_{xx}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sigma_{xy}\frac{\partial u_0}{\partial y}+\sigma_{xz}\frac{\partial u_0}{\partial z}=0, v_0=w_0=0$$

لبه‌های $y=0,b$:

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xy}\frac{\partial v_0}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v_0}{\partial z}=0, u_0=w_0=0$$

- شرایط مرزی CCCC:

لبه‌های $x=0,a$:

$$u_0=v_0=w_0=0$$

لبه‌های $y=0,b$:

$$u_0=v_0=w_0=0$$

- شرایط مرزی CSCS:

لبه‌های $x=0,a$:

$$u_0=v_0=w_0=0$$

لبه‌های $y=0,b$:

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xy}\frac{\partial v_0}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v_0}{\partial z}=0, u_0=w_0=0$$

3- پروسه حل مسئله ارتعاشات غیرخطی

در این قسمت، نحوه حل معادلات غیرخطی سه بعدی بدست آمده به کمک یک روش عددی توضیح داده خواهد شد. با حذف نیروی F ابتدا، به کمک روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته، معادلات در حوزه مکان گسسته‌سازی می‌شوند. سپس، با حل معادلات خطی و بدست آوردن بردارهای ویژه و استفاده از آن‌ها به عنوان توابع پایه روش گلرکین عددی، معادلات به معادلات معمولی غیرخطی کاهش‌یافته تابع زمان تبدیل می‌شوند. سپس، از روش گسسته‌سازی متناوب زمانی برای گسسته‌سازی معادلات در حوزه زمان استفاده خواهد شد تا آن‌ها تبدیل به معادلات جبری غیرخطی شوند. در انتها، با بهره‌گیری از روش طول کمان، پاسخ فرکانسی سیستم بدست خواهد آمد.

3-1- گسسته‌سازی معادلات در حوزه مکان

طبق روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته [23] و با تعریف تابع $f(x)$ در دامنه‌ی $[x_1,\dots,x_N]$، مشتق مرتبه‌ی r ام تابع $f(x)$ در نقطه x_i به صورت رابطه (20) تعریف می‌شود:

$$\frac{d^r f(x)}{dx^r}=\sum_{j=1}^{N}D_{ij}^{(r)}f(x_j)\tag{20}$$

که $D_{ij}^{(r)}$ ضریب وزنی مشتق مرتبه‌ی r ام تابع $f(x)$ می‌باشد.

روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته را می‌توان به حالت سه بعدی را با استفاده از ضریب تنسوری کرونیکر که با علامت ⊗ نشان داده می‌شود استنتاج کرد و برای تقریب مشتق پاره‌ای تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ که در به ترتیب در فواصل $[x_1,\dots,x_N]$، $[y_1,\dots,y_M]$ و $[z_1,\dots,z_P]$ تعریف می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشتق جزئی مرتبه سوم تابع $f(x,y,z)$ نسبت به x، y و z به صورت رابطه (21) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}=\left(\mathrm{D}_z^{(1)}\otimes\mathrm{D}_y^{(1)}\otimes\mathrm{D}_x^{(1)}\right)\bar{\mathrm{f}}_l.\tag{21}$$

که f_l نشان دهنده بردار ستونی است و $l=1,\dots,\mathrm{P}$ و به صورت رابطه (22) تعریف می‌شود:

$$\bar{\mathrm{f}}_l=\begin{bmatrix}f(x_1,y_1,z_l),\dots,f(x_\mathrm{N},y_1,z_l),f(x_1,y_2,z_l),\dots\\ ,f(x_\mathrm{N},y_2,z_l),\dots,f(x_1,y_\mathrm{M},z_l),\dots,f(x_\mathrm{N},y_M,z_l)\end{bmatrix}^\mathrm{T}\tag{22}$$

که N، M و P به ترتیب نقاط گسسته شده در جهت‌های x، y و z می‌باشند.

طبق روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، توابع سه بعدی $u(x,y,z)$، $v(x,y,z)$ و $w(x,y,z)$ در فواصل $0\le x\le 1$، $0\le y\le 1$ و $0\le z\le 1$ شبکه‌بندی می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
x_i&=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{i-1}{N-1}\pi\right),\quad \mathrm{i}=1,2,3,\dots,N\\
y_j&=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{j-1}{M-1}\pi\right),\quad j=1,2,3,\dots,M\\
\mathrm{z}_k&=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{k-1}{P-1}\pi\right),\quad k=1,2,3,\dots,P
\end{aligned}
\tag{23}
$$

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، فرم گسسته شده معادلات (17) را می‌توان به صورت رابطه (24) نوشت:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}}+\mathrm{KX}+\mathrm{K_{nl}}(\mathrm{X})=0\tag{24}$$

که M و K به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی، $\mathrm{K_{nl}}$ بردار سختی غیرخطی و X بردار جابجایی را نشان می‌دهند. بردار X و ماتریس‌های K و M به صورت روابط (25) تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{X}=\begin{bmatrix}\mathrm{u}_0\\ \mathrm{v}_0\\ \mathrm{w}_0\end{bmatrix},\quad \mathrm{K}=\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{11}&\mathrm{K}_{12}&\mathrm{K}_{13}\\ \mathrm{K}_{21}&\mathrm{K}_{22}&\mathrm{K}_{23}\\ \mathrm{K}_{31}&\mathrm{K}_{32}&\mathrm{K}_{33}\end{bmatrix},\\
&\mathrm{M}=\begin{bmatrix}\mathrm{M}_{11}&0&0\\ 0&\mathrm{M}_{22}&0\\ 0&0&\mathrm{M}_{33}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

که:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_{11}&=\mathrm{C}_{11}\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{I}_y\otimes\mathrm{D}_x^{(2)}+\mathrm{C}_{66}\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{D}_y^{(2)}\otimes\mathrm{I}_x\\
&\quad+\mathrm{C}_{55}\mathrm{D}_z^{(2)}\otimes\mathrm{I}_x\otimes\mathrm{I}_y+\mathrm{C}_{55,z}\mathrm{D}_z^{(1)}\otimes\mathrm{I}_x\otimes\mathrm{I}_y-\sigma_{xx}^\mathrm{T}\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{I}_y\otimes\mathrm{D}_x^{(2)},\\
\mathrm{K}_{12}&=(\mathrm{C}_{12}+\mathrm{C}_{66})\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{D}_x^{(1)}\otimes\mathrm{D}_y^{(1)}-\sigma_{xx}^\mathrm{T}\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{D}_y^{(2)}\otimes\mathrm{I}_x\\
\mathrm{K}_{21}&=(\mathrm{C}_{12}+\mathrm{C}_{66})\mathrm{I}_z\otimes\mathrm{D}_x^{(1)}\otimes\mathrm{D}_y^{(1)}-\sigma_{yy}^\mathrm{T}\mathrm{D}_x^{(2)}\otimes\mathrm{I}_y\otimes\mathrm{I}_z,\\
\mathrm{K}_{13}&=(\mathrm{C}_{13}+\mathrm{C}_{55})\mathrm{D}_z^{(1)}\otimes\mathrm{I}_y\otimes\mathrm{D}_x^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$+C_{55,z}I_z\otimes I_y\otimes D_x^{(1)} - \sigma_{xx}^{T}I_x\otimes I_y\otimes D_z^{(2)},$$
$$K_{22} = C_{22}I_z\otimes D_y^{(2)}\otimes I_x + C_{66}I_z\otimes I_y\otimes D_x^{(2)}$$
$$+C_{44}D_z^{(2)}\otimes I_y\otimes I_x + C_{44,z}D_z^{(1)}\otimes I_y\otimes I_x - \sigma_{yy}^{T}I_x\otimes D_y^{(2)}\otimes I_z,$$
$$K_{23} = (C_{23} + C_{44})D_z^{(1)}\otimes D_y^{(1)}\otimes I_x$$
$$+C_{44,z}I_z\otimes D_y^{(1)}\otimes I_x - \sigma_{yy}^{T}I_x\otimes I_y\otimes D_z^{(2)},$$
$$K_{31} = (C_{13} + C_{55})D_z^{(1)}\otimes D_x^{(1)}\otimes I_x$$
$$+C_{13,z}I_z\otimes I_y\otimes D_x^{(1)} - \sigma_{zz}^{T}D_x^{(2)}\otimes I_x\otimes I_y,$$
$$K_{32} = (C_{23} + C_{44})D_z^{(1)}\otimes D_y^{(1)}\otimes I_x$$
$$+C_{23,z}I_z\otimes D_y^{(1)}\otimes I_x - \sigma_{zz}^{T}I_x\otimes D_y^{(2)}\otimes I_z,$$
$$K_{33} = C_{33}D_z^{(2)}\otimes I_y\otimes I_x + C_{55}I_z\otimes I_y\otimes D_x^{(2)}$$
$$+C_{44}I_z\otimes D_y^{(2)}\otimes I_x + C_{33,z}D_z^{(1)}\otimes I_y\otimes I_x - \sigma_{zz}^{T}I_x\otimes I_y\otimes D_z^{(2)},$$
$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = \rho I_z\otimes I_y\otimes I_x \tag{26}$$

که $\otimes$ بیانگر ضرب تنسور کرونیکر، ρ بیانگر چگالی، D اوپراتور مشتق گیری، Cثابت‌های مسأله و I تانسورهای واحد می‌باشند. لازم به ذکر است که برای رعایت اختصار، مؤلفه‌های بردارهای جابجایی و مؤلفه‌های غیرخطی و همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی آورده نمی‌شوند.

2-3- نحوه‌ی اعمال روش گلرکین عددی

با صرف‌نظر کردن از ترم غیرخطی K_{nl} از معادله‌ی (26) و در نظر گرفتن پاسخ سیستم به صورت $X=\tilde{X}e^{i\omega t}$ (ω بیانگر فرکانس طبیعی ورق است) و سپس جایگذاری آن در معادله (15)، رابطه (27) به‌دست می‌آید:

$$K\tilde{X} = \omega^2 M\tilde{X}, \quad \tilde{X} = \left\{\tilde{u}_0^T, \tilde{v}_0^T, \tilde{w}_0{}^T\right\}^T \tag{27}$$

حال، با اعمال شرایط مرزی گسسته شده در مؤلفه‌های مرتبط ماتریس‌های سفتی و جرمی و سپس حل مسأله مقدار ویژه، فرکانس طبیعی خطی و تابع شکل برای مودهای مختلف ورق مستطیلی با شرایط مرزی متفاوت به دست می‌آید. با انتخاب k شکل مود اول، پاسخ تقریبی سیستم به صورت رابطه (28) بیان می‌شود:

$$X = \Phi q \tag{28}$$

که Φ تابع پایه گلرکین و q بردار مختصات تعمیم‌یافته کاهش‌یافته است.

با قرار دادن رابطه (28) در (24)، باقیمانده به صورت رابطه (29) به‌دست می‌آید:

$$R = M\Phi\ddot{q} + K\Phi q + K_{nl}(\Phi q) \tag{29}$$

با تعریف یک اوپراتور ماتریسی به صورت $G = \Phi^T S$، روش گلرکین شامل ضرب باقیمانده R در توابع پایه و انتگرال‌گیری در دامنه مکان هم‌زمان قابل انجام است. قابل ذکر است که S بیانگر اوپراتور انتگرال است که با استفاده از تربیع دیفرانسیلی و سری تیلور به دست می‌آید [24]. با انجام روند توضیح داده شده، معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تابع زمان معروف به معادلات دافینگ به صورت رابطه (30) حاصل می‌شوند:

$$\tilde{M}\ddot{q} + \tilde{K}q + \tilde{K}_{nl}(\Phi q) = 0 \tag{30}$$

که:

$$\tilde{M} = GM\Phi, \qquad \tilde{K} = GK\Phi, \qquad \tilde{K}_{nl}(\Phi q) = GK_{nl}(\Phi q) \tag{31}$$

حال، با تعریف $\tau = t/T$ که $T = 2\pi/\omega$ می‌باشد، معادله‌ی (30) را می‌توان به صورت رابطه (32) بیان نمود:

$$\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \tilde{M}\ddot{q} + \tilde{K}q + \tilde{K}_{nl}(\Phi q) = 0 \tag{32}$$

3-3- روش گسسته سازی متناوب زمانی در حوزه زمان

مشتق‌های نسبت به زمان ظاهر شده در معادله (32) را می‌توان با استفاده از یک اپراتور مشتق‌گیر در حوزه زمان گسسته نمود. این اپراتور را می‌توان با در نظر گرفتن مشتقات تابع متناوب سینوسی به عنوان تابع پایه تعریف نمود و با در نظر گرفتن $\bar{\tau} = \tau/T$ و $\Omega = 2\pi/T$ معادله به رابطه (33) تبدیل می‌شود:

$$\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \tilde{M}\ddot{q} + \tilde{K}q + \tilde{K}_{nl}(q) = 0 \tag{33}$$

که علامت نقطه نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به $\bar{\tau}$ می‌باشد، علاوه براین گسسته سازی q در حوزه زمان به صورت رابطه (34) نوشته می‌شود:

$$Q_{3m\times N_t} = \left[q_{u\,1\times N_t}^{1};\ldots;q_{u\,1\times N_t}^{m};q_{v\,1\times N_t}^{1};\ldots;q_{v\,1\times N_t}^{m};q_{w\,1\times N_t}^{1};\ldots;q_{w\,1\times N_t}^{m}\right] \tag{34}$$

N_t معرف نقاط گسسته شده در دامنه زمانی می‌باشد و $q(\bar{\tau}_i)$ مقدار گره $q(\bar{\tau})$ در نقطه $\bar{\tau}_i$ به صورت رابطه (35) تعریف می‌شود:

$$\tau_i^* = \frac{i}{N_t}, \quad 0 < \tau_i^* \le 1, \qquad i = 1,2,\ldots,N_t = 2k \tag{35}$$

معادله (32) را می‌توان به صورت رابطه (36) بیان کرد:

$$\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2 \tilde{M}QD_\tau^{(2)^T} + \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\tilde{C}QD_\tau^{(1)^T} + \tilde{K}Q + \tilde{K}_{nl}(Q) = 0 \tag{36}$$

$D_\tau^{()}$ نماد اوپراتور ماتریسی مشتق زمانی است که فرمول صریح آن به صورت رابطه (37) می‌باشد:

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{i1} = (-1)^{i-1}\cot\dfrac{\pi(i-1)}{N_t} \\ a_{1j} = (-1)^{N_t-j+1}\cot\dfrac{\pi(N_t-j+1)}{N_t} \\ a_{(i+1)(j+1)} = a_{ij} \end{cases}, i,j = 2,3,4,\ldots,N_t,$$
$$D_\tau^{(1)} = 2\pi[a_{ij}],$$
$$\begin{cases} b_{11} = -\dfrac{N_t{}^2}{12} - \dfrac{1}{6} \\ b_{i1} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{2\sin^2\frac{\pi(i-1)}{N_t}} \\ b_{1j} = \dfrac{(-1)^{N_t-j+1}}{2\sin^2\frac{\pi(N_t-j+1)}{N_t}} \\ b_{(i+1)(j+1)} = b_{ij} \end{cases}, \qquad i,j = 2,3,4,\ldots,N_t,$$
$$D_\tau^{(2)} = (2\pi)^2[b_{ij}] \tag{37}$$

که $D_{\tau^*}^{(1)}$ و $D_{\tau^*}^{(2)}$ ماتریس های توپلیتس هستند.

با در نظر گرفتن رابطه $(B^T \otimes A)vec(X) = vec(AXB)$، کهA و B ثابت های ماتریسی هستند. $vec(X)$ فرم برداری ماتریس X و علامت $\otimes$ ضرب کرونیکر می‌باشد (پیوست) .با استفاده از این روابط، فرم برداری معادله‌ی (36) به صورت رابطه (38) بیان می‌شود:

$$\left(\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2\left(D_\tau^{(2)} \otimes \tilde{M}\right) + \left(I_{\tau^*} \otimes \tilde{K}\right)\right)vec(Q)$$
$$+vec\left(\tilde{K}_{nl}(\Phi Q)\right) = 0 \tag{38}$$

معادله (38) بیانگر دسته معادلات غیرخطی پارامتری است که می‌تواند به صورت رابطه (39) نوشته شود:

$$H(vec(Q), \omega) = 0 \tag{39}$$

با در نظر گرفتن فرکانس خطی و تابع شکل مود، پاسخ ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی را می‌توان با استفاده از روش طول کمان [25] در شرایط مرزی مختلف را پیش‌بینی نمود.

4- حل مسئله خمش غیرخطی

برای حل مسأله خمش غیرخطی، ممان جرمی در معادله (24) حذف می‌شود و نیروی F به صورت یکنواخت به سطح ورق اعمال می‌گردد. بنابراین معادله خمش غیرخطی استاتیکی به صورت رابطه (40) به دست می‌آید:

$$\mathrm{KX} + \mathrm{K_{nl}}(\mathrm{X}) = \mathrm{F} \tag{40}$$

ابتدا با صرف‌نظر کردن از ترم غیرخطی، شکل مودهای مختلف ورق مستطیلی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف به دست می‌آید. سپس با در نظر گرفتن حل خطی و حدس اولیه، از الگوریتم طول کمان برای پیش‌بینی رفتار خطی غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی استفاده می‌گردد.

5- نتایج و بحث

در این قسمت، براساس مدل غیرخطی سه‌بعدی ارائه شده برای ورق‌های مدرج تابعی و همچنین روش عددی ارائه شده، اثر پارامترهای مختلف بر رفتار مکانیکی غیرخطی سیستم بررسی خواهد شد.

ابتدا، برای نشان دادن همگرایی پاسخ‌های بدست آمده، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\left(\overline{\omega} = \frac{\omega b^2}{\pi^2 h}\sqrt{12(1-\nu^2)\rho_c/E_c}\right)$ مودهای اول و دوم یک ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده به ازای مقادیر مختلف گره‌های در نظر گرفته شده، در جدول 2 آورده شده است و با مقادیر داده شده در مرجع [26] مقایسه شده است. فرض شده است که ورق از آلومینیوم با مدول الاستیسیته $E_m = 70\ \mathrm{GPa}$ و چگالی $\rho_m = 2702\ \mathrm{kg/m^3}$ و آلومینا با مدول الاستیسیته $E_c = 380\ \mathrm{GPa}$ و چگالی $\rho_c = 3800\ \mathrm{kg/m^3}$ ساخته شده است. همچنین، نسبت پواسون $\nu = 0.3$، طول و عرض ورق $a = b = 10\mathrm{m}$، نسبت طول به ضخامت $\mathrm{a}/h = 10$ و شاخص کسر حجمی $k = 1$ در نظر گرفته شده است. ملاحظه می‌شود که تطابق خوبی بین نتایج حاضر با نتایج مرجع [26] برقرار است. علاوه بر این، نتایج به ازای مقادیر گره‌های بزرگ‌تر از $(M, N, P) = (13,13,13)$ همگرا می‌شوند. ضرایب بستر الاسیتیک به صورت زیر بی‌بعد می‌گردند:

$$K_w = k_w a^4/D^c, \qquad K_g = k_g b^2/D^c \tag{41}$$

که در آن $D^c = E^c h^3/12(1-\nu^2)$.

علاوه بر این، برای بررسی صحت نتایج ارائه شده، با صرف‌نظر از ترم‌های غیرخطی، پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد $\left(\widetilde{\omega} = \omega h\sqrt{2(1+\nu)\rho/E}\right)$ یک ورق مربعی همگن با شرایط مرزی ساده بدست آمده در تحلیل حاضر با مقادیر تخمین زده شده توسط مدل‌ها بر اساس تئوری‌های کلاسیک[1]، مرتبه‌اول برشی[2] و مرتبه سه برشی[3] ارائه شده در مرجع [27] مقایسه شده است. (مطابق جدول 3) برای این مقایسه، مدول یانگ و چگالی جرمی به ترتیب $E = 70\ \mathrm{GPa}$ و $\rho = 1\ \mathrm{kg/m^3}$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 10$ فرض شده است.

صحت سنجی نتایج ناشی از اثرات تغییر دما و بستر الاستیک به ترتیب در جدول‌های 4 و 5 مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل تطابق قابل قبولی با نتایج موجود در دبیره دارند.

مقایسه نتایج عددی حاصل از تئوری دو بعدی تغییر شکل مرتبه اول برشی با تئوری سه بعدی در جدول 6 نشان می‌دهد که با افزایش نسبت طول به ضخامت اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو تئوری کم می‌گردد.

اما، در نسبت‌های پایین طول به ضخامت، میزان اختلاف بیش‌تر می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که تفاوت پیش‌بینی رفتار مکانیکی توسط دو تئوری به

[1] CT
[2] FSDT
[3] TSDT

جدول 2 بررسی همگرایی فرکانس‌های طبیعی

Table 2 Convergence test of natural frequency

شماره مود	تعداد گره‌ها (N=M=P) 7	11	13	15	مرجع[26]
1	1.4826	1.4821	1.4820	1.4820	1.4818
2	3.5605	3.5592	3.5588	3.5586	3.5586

جدول 3 مقایسه پارامتر فرکانس طبیعی ورق مربعی همگن با شرایط مرزی ساده

Table 3 Comparison of the natural frequency parameter of simply supported square homogenous plate

CPT [27]	FSDT [27]	TSDT [27]	کار حاضر
0.0963	0.0930	0.0935	0.0932

جدول 4 مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی گیردار و گیردار-ساده ورق مربعی مدرج تابعی $Si_3N_4/SUS304$ تحت افزایش دمای یکنواخت

Table 4 Comparisons of natural frequencies for CCCC and CSCS $Si_3N_4/SUS304$ FG square plates subjected to uniform temperature rise ($a/h = 10, k = 2, T_0 = 300\mathrm{K}$).

شماره مود/شرایط مرزی		ΔT = 0 [21]	0 [22]	0 کار حاضر	300 [21]	300 [22]	300 کار حاضر
CCCC	1	4.17	4.11	4.12	3.72	3.66	3.60
	2	7.94	7.89	7.85	7.30	7.25	7.14
		[22]		کار حاضر	[22]		کار حاضر
CSCS	1	3.36		3.37	2.89		2.82
	2	6.21		6.20	5.56		5.45

جدول 5 مقایسه فرکانس بی بعد طبیعی برای ورق مربعی مدرج تابعی Al_2O_3 به ازای ضرایب الاستیک وینکلر- پسترناک مختلف

Table 5 Comparisons non-dimensional fundamental natural frequency for SSSS boundary Al_2O_3 isotropic square plate corresponding to different Winkler–Pasternak elastic foundations

Kw,Kg	a/h = 1000 [28]	1000 کار حاضر	5 [28]	5 کار حاضر
0,0	19.74	19.74	17.51	17.54
1e2,1e1	26.21	26.21	24.31	24.34
1e3,1e2	57.99	57.60	56.04	56.10

جدول 6 مقایسه فرکانس و خمش بی بعد خطی ورق مربعی مدرج تابعی Al/Al_2O_3 با تئوری دوبعدی مرتبه اول برشی

Table 6 Comparisons non-dimensional fundamental frequency and dimensionless deflection Al/Al_2O_3 FG square plate with two dimensional FSDT

ارتعاشات		شرایط مرزی	k = 1 کار حاضر	1 [29]	1 %	10 کار حاضر	10 [29]	10 %
a/h	5	گیردار	6.395	6.331	0.99	4.813	4.950	2.83
	10		7.653	7.628	0.33	6.077	6.198	2
	5	ساده	4.097	4.075	0.56	3.242	3.306	1.98
	10		4.425	4.411	0.34	3.601	3.651	1.29
خمش		شرایط مرزی	k = 1 کار حاضر	1 [29]	1 %	10 کار حاضر	10 [29]	10 %
a/h	4	ساده	0.728	0.729	0.08	1.409	1.319	6.44
	10		0.589	0.589	0	1.031	0.996	3.37
	100		0.563	0.563	0	0.959	0.936	2.45

مواد تشکیل دهنده سازه نیز وابسته است. به طوری که برای مواد نرم‌تر تفاوت پیش‌بینی رفتار مکانیکی وسط دو تئوری بیش‌تر می‌شود و رفتار خمشی این تفاوت را بهتر نشان می‌دهد. بنابراین با توجه به نتایج، برای نسبت‌های طول به ضخامت کمتر از 10، تئوری سه بعدی نتایج دقیق‌تر پیش‌بینی می‌کند.

پس از بررسی صحت نتایج ارائه شده، اثر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی غیرخطی و خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی CCCC، CSCS و SSSS پرداخته می‌شود. بدین منظور، منحنی‌های پاسخ فرکانسی به صورت ماکزیمم دامنه ارتعاشی بی‌بعد[1] برحسب ضریب فرکانسی بی‌بعد و نتایج غیرخطی خمش ورق مستطیلی به صورت نیرو-ماکزیمم خمش غیرخطی ارائه می‌شوند. همچنین، فرکانس‌های خطی بی‌بعد متناظر با هر منحنی در شکل‌ها آورده شده است. لازم به ذکر است که پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (42) تعریف می‌شوند:

$$(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{h}\right),(u_0,v_0,w_0) \rightarrow \left(\frac{u_0}{h},\frac{v_0}{h},\frac{w_0}{h}\right),$$
$$\eta=\frac{a}{h},\ \ \kappa=\frac{a}{b},\ \ \omega_{\mathrm{L}}=\omega a\sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{c}}}{E_{\mathrm{c}}}}. \qquad (42)$$

در شکل 2 به بررسی اثر نسبت طول به ضخامت بر پاسخ فرکانسی غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی گیردار-ساده پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که ورق مدرج تابعی یک رفتار سفت شوندگی غیرخطی از خود نشان می‌دهد. این بدین معنی است که با افزایش دامنه ارتعاشی، نسبت فرکانس غیرخطی سیستم افزایش می‌یابد. هم‌چنین، نشان داده شده است که با افزایش نسبت طول به ضخامت، فرکانس خطی و نسبت فرکانس غیرخطی کاهش می‌یابد. این بدین معنی است که با افزایش نسبت طول به ضخامت، از اثرات غیرخطی هندسی کاسته می‌شود.

هم‌چنین، این شکل اهمیت استفاده از مدل‌های غیرخطی برای تحلیل ارتعاشی ورق‌های مدرج تابعی ضخیم و نسبتاً ضخیم را یادآور می‌شود. از طرفی دیگر، چون برای ورق‌های ضخیم، مدل‌های دو بعدی دارای جواب‌های قابل اعتماد نیستند، اهمیت مدل غیرخطی سه‌بعدی و روش حل ارائه شده در مطالعه حاضر برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

در جدول 7 نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و هم چنین فرکانس غیرخطی سیستم در دامنه $w_{\max}=0.505$ برای شرایط مرزی چهار لبه ساده آورده شده است و نشان می‌دهد که با افزایش شاخص کسر حجمی و افزایش درصد حجمی آلومینیم نسبت به آلومینا، فرکانس‌های خطی و غیرخطی سیستم کاهش می‌یابند. هم‌چنین، اهمیت در نظر گرفتن پارامترهای غیرخطی را بیان می‌کند که در دامنه مشخص شده، تفاوت نتایج پیش‌بینی شده توسط دو مدل خطی و غیرخطی بیش از 30 درصد می‌باشد که با افزایش دما این تفاوت نتایج پیش‌بینی شده افزایش می‌یابد.

شکل‌های 3 و 4 به ترتیب چگونگی تغییرات ماکزیمم دامنه ارتعاشی

جدول 7 مقایسه تغییرات فرکانس‌های خطی و غیرخطی با تغییر شاخص کسر حجمی $(\eta=10, K_w=K_g=0, \Delta T=0)$

Table 7 Comparison of variations of linear and nonlinear frequencies by changing the volume fraction index $(\eta=10, K_w=K_g=0, \Delta T=0)$

مواد	فرکانس خطی	فرکانس غیرخطی	تغییر نتایج با در نظر گرفتن اثر غیرخطی(%)
Alumina	0.578	0.8473	31.78
k=0.2	0.527	0.79024	33.31
k=0.6	0.478	0.7276	34.30
k=2	0.401	0.6159	34.89
k=20	0.346	0.4847	28.62
Aluminum	0.341	0.4765	30.16

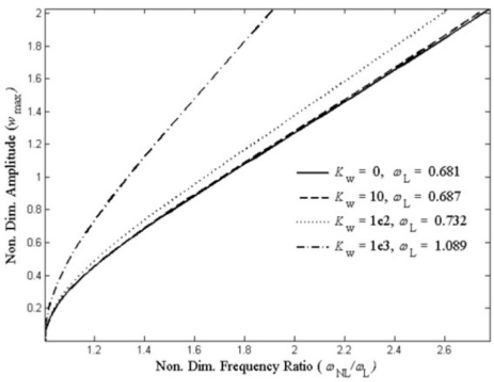


Fig. 3 Nonlinear frequency response curves for various values of K_w for Al/Al_2O_3 FG rectangular plate $(k=0.8, K_g=0, \eta=12, \Delta T=0)$

شکل 3 منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی به ازای مقادیر K_w برای ورق مستطیلی مدرج تابعی Al/Al_2O_3 $(k=0.8, K_g=0, \eta=12, \Delta T=0)$

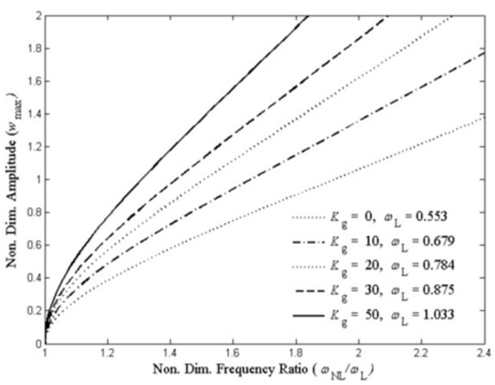


Fig. 4 Nonlinear frequency response curves of Al/Al_2O_3 FG rectangular plate for various values of K_g $(k=0.8, K_w=0, \eta=12, \Delta T=0)$

شکل 4 منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی Al/Al_2O_3 به ازای مقادیر K_g $(k=0.8,\ K_w=0,\ \eta=12, \Delta T=0)$

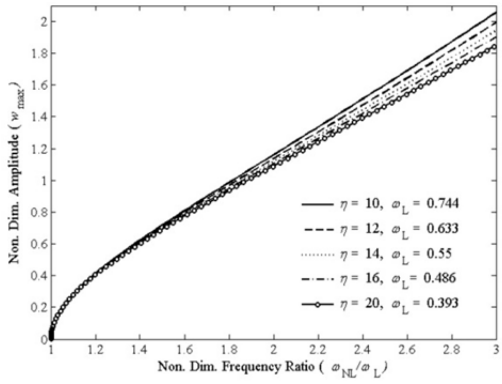


Fig. 2 Nonlinear frequency response curves for various values of length-to-thickness ratios η, Al/Al_2O_3 FG rectangular plate (k=0.2, k_w=k_g=0, ΔT=0)

شکل 2 منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی به ازای مقادیر مختلف ضریب طول به ضخامت η ورق مدرج تابعی Al/Al_2O_3 $(k=0.2, K_w=K_g=0, \Delta T=0)$

[1] Non. Dim. Amplitude; $w_{\max}$

برحسب نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای ضرایب مختلف وینکلر و لایه برشی به ترتیب در شرایط مرزی گیردار و گیردار-ساده را نشان می‌دهد.

با توجه به نمودارهای رسم شده می‌توان نتیجه گرفت که هر دو پایه وینکلر و پسترناک سفتی ورق مستطیلی مدرج تابعی را افزایش و نسبت فرکانس غیرخطی به خطی را کاهش می‌دهند، با این حال، اثر لایه برشی (پسترناک) در فرکانس اصلی بی‌بعد و نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی در مقایسه با اثر پایه وینکلر قابل توجه است.

شکل 5 به بررسی اثر شاخص کسر حجمی بر پاسخ فرکانسی غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی کاملا گیردار پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص حجمی که بیانگر استفاده بیشتر از مواد آلومینیومی نسبت به آلومینا است، سفتی خطی ورق کاهش یاقته و در پی آن، فرکانس طبیعی به طور مداوم کاهش می‌یابد ولی نسبت فرکانسی ممکن است کاهش یا افزایش یابد.

شکل 6 به بررسی اثرات افزایش تغییر دمای یکنواخت ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی کاملا گیردار می‌پردازد. مشاهده می‌شود که با افزایش دما از سفتی خطی سیستم کاسته شده است بنابراین افزایش دما به ترتیب منجر به کاهش و افزایش فرکانس خطی و نسبت فرکانس غیر خطی می‌شود.

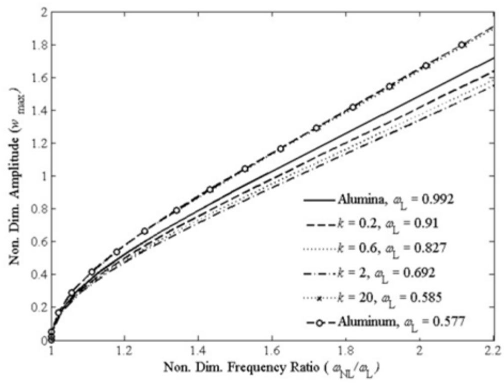


Fig. 5 Nonlinear frequency response curves for various volume fraction indexes Al/Al_2O_3 FG rectangular plate ($\eta = 10, K_w = K_g = 0, \Delta T = 0$)

شکل 5 منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی به ازای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی k ورق مستطیلی مدرج تابعی Al/Al_2O_3 ($\eta = 10, K_w = K_g = 0, \Delta T = 0$)

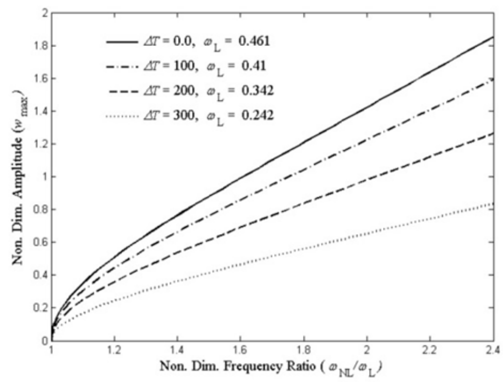


Fig. 6 Effect of various uniform temperature rises on the nonlinear frequency response curves of $Si_3N_4/SUS304$ FG square plates ($k = 2, \eta = 12, T_0 = 300K$)

شکل 6 اثر افزایش دمای یکنواخت مختلف بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی ورق مربعی مدرج تابعی $Si_3N_4/SUS304$ ($k = 2, \eta = 12, T_0 = 300K$)

بررسی اثر شاخص کسر حجمی بر ماکزیمم خمش خطی و غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی در شرایط ساده-گیردار در شکل 7 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص حجمی که منجر به افزایش نسبت ترکیب کامپوزیتی آلومینیوم نسبت به آلومینا می‌شود، سفتی ورق کاهش یاقته و در پی آن، ماکزیمم خمش غیرخطی سیستم افزایش یافته است. علاوه بر این، مقایسه بین رفتارهای خطی و غیرخطی با افزایش بار عمال شده بر ورق، اهمیت مدل غیرخطی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال در $k = 0$ و بار اعمال شده $f_0 = 0.4837$، مدل خطی $w_{max} = 1.195$ و مدل غیرخطی $w_{max} = 0.8523$ را برای خمش ورق پیش‌بینی می‌کنند و نشان از تغییر 43 درصدی در نتیجه است. هم‌چنین نمودار نشان می‌دهد که با افزایش بار این اختلاف بیش‌تر می‌شود.

شکل 8 تغییرات رفتار خمش غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی را در مقابل افزایش دما به صورت یکنواخت در دو حالت مواد وابسته به دما و عدم وابستگی مواد به دما را در شرایط مرزی گیردار-ساده نشان می‌دهد.

مشاهده می‌شود که با افزایش دما سفتی سیستم کاهش یافته و به ازای بار مشخص خمش سیستم بیش‌تر می‌گردد.

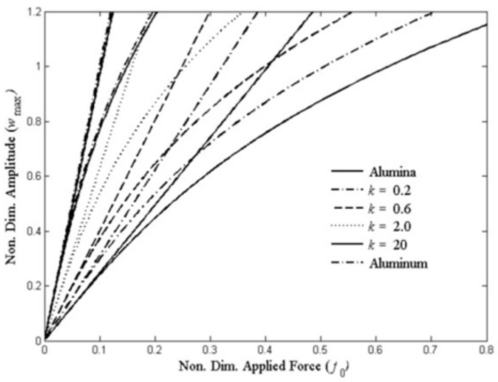


Fig. 7 Linear and nonlinear deflection curves of Al/Al_2O_3 FG rectangular plate for various volume fraction indexes ($a = b = 10h, K_w = K_g = 0, \Delta T = 0$)

شکل 7 منحنی‌های خمش خطی و غیرخطی ورق مستطیلی Al/Al_2O_3 به ازای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی ($a = b = 10h, K_w = K_g = 0, \Delta T = 0$)

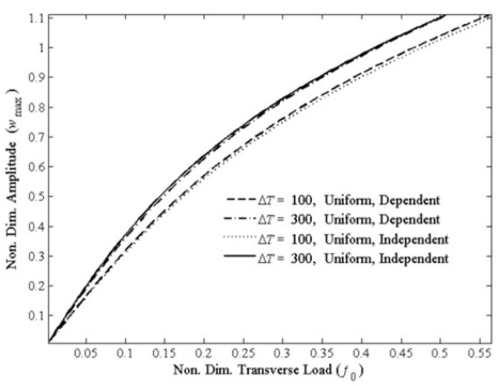


Fig. 8 Comparison nonlinear bending curves for temperature-dependent and independent materials of $Si_3N_4/SUS304$ FG square plates at uniform rise temperature ($K_w = K_g = 0, a = b = 10h, T_0 = 300K$)

شکل 8 مقایسه منحنی‌های خمش غیرخطی برای مواد وابسته و عدم وابسته به دما ورق مدرج تابعی $Si_3N_4/SUS304$ با افزایش دمای یکنواخت ($K_w = K_g = 0, a = b = 10h, T_0 = 300K, k = 1$)

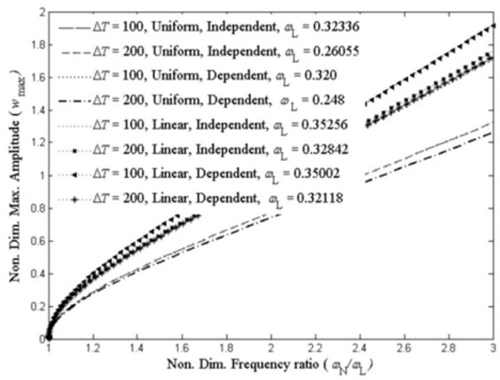
مقایسه تأثیر افزایش دمای یکنواخت و خطی روی رفتار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی وابسته به دما در شکل 9 نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که در دمای بالاتر اختلاف رفتار فرکانسی سیستم در دو حالت افزایش دما بیشتر می‌گردد. در نمودار فرکانس خطی- افزایش دما مشاهده می‌شود که برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی سیستم در دماهای پایین در نظر گرفتن مواد وابسته به دما تفاوت چندانی با مواد عدم وابسته به دما ندارد. اما با افزایش دما تفاوت قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد و ضرورت در نظر گرفتن مواد به صورت وابسته به دما را نمایان می‌کند.

6- نتیجه گیری

در این تحقیق، با استفاده از یک مدل غیرخطی مبتنی بر تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و بهره‌گیری از یک روش عددی سودمند، رفتار مکانیکی غیرخطی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی وابسته به دما روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، با در نظر گرفتن رابطه کرنش غیرخطی گرین-لاگرانژ، اثرات غیرخطی هندسی در محاسبات منظور شد. پس از بدست آوردن انرژی‌های کرنشی و جنبشی، کار ناشی از نیروی خارجی، انرژی های ناشی از بستر الاستیک و تغییرات دما، از اصل همیلتون برای بدست آوردن معادلات حاکم غیرخطی سه بعدی و شرایط مرزی متناظر استفاده شد. برای حل مسائل مربوط به رفتار غیرخطی سیستم، از روش‌های تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته، گلرکین عددی، گسسته‌سازی متناوب زمانی و الگوریتم طول کمان بهره گرفته شد. پس از راستی‌آزمایی نتایج، پارامترهای مختلفی مانند اثرات نسبت طول به ضخامت، ثابت های وینکلر و پسترناک، تغییرات یکنواخت و خطی دما و شاخص کسر حجمی بر پاسخ فرکانسی و ماکزیمم خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت.

نشان داده شد که استفاده از مواد سرامیکی باعث سفتی بیشتر سیستم می‌شوند در حالی‌که برای فرکانس‌های پایین‌تر میتوان از مواد آلومینینومی استفاده کرد، با کاهش نسبت طول به ضخامت، به اثرات غیرخطی هندسی به خصوص برای ورق با شرایط ساده افزوده می‌شود. هم چنین، با افزایش طول به ضخامت سفتی خطی سیستم و ماکزیمم خمش غیرخطی سیستم به ترتیب کاهش و افزایش پیدا می‌کند. هم‌چنین، اهمیت بستر الاستیک روی کنترل رفتار فرکانسی سیستم مشخص می‌شود. این نکته از این لحاظ حائز اهمیت است که برای ورق‌های ضخیم، مدل‌های دو بعدی دارای جواب‌های قابل اعتماد نیستند. از این رو، اهمیت مدل غیرخطی سه‌بعدی و روش حل ارائه شده در مطالعه حاضر برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی بسیار قابل توجه می‌باشد.



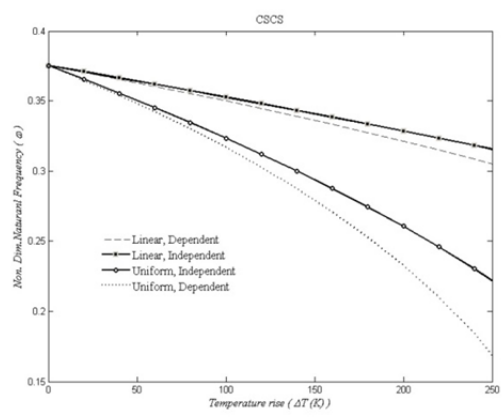


Fig. 9 Comparison of uniform and linear temperature rises on the linear and nonlinear frequency response curves of $Si_3N_4/SUS304$ FG square plates for temperature-dependent and independent materials ($k = 2, \eta = 12, T_0 = 300$K)

شکل 9 مقایسه افزایش دمای یکنواخت و خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی خطی و غیرخطی ورق مدرج تابعی $Si_3N_4/SUS304$ برای مواد وابسته و عدم وابسته به دما $(k = 2, \eta = 12, T_0 = 300K)$

7- فهرست علایم

a	طول ورق (m)
b	عرض ورق (m)
h	ضخامت ورق(m)
u	جابجایی در جهت x محور مختصات(m)
v	جابجایی در جهت y محور مختصات(m)
w	جابجایی در جهت z محور مختصات(m)
k	شاخص کسر حجمی
E_m	مدول الاستیسیته فلز(pa)
E_c	مدول الاستیسیته سرامیک(pa)
M	ماتریس جرم(kg)
K	ماتریس سفتی
K_{nl}	ماتریس سفتی غیرخطی
F	نیروی خارجی توزیع شده
ΔT	افزایش دما
K_w	ثابت پسترناک
K_g	ثابت وینکلر
X	بردار جابجایی(m)
V	حجم(m^3)
T	دوره تناوب زمانی(s)
M	تعداد نقاط گسسته شده در جهت x
N	تعداد نقاط گسسته شده در جهت y
P	تعداد نقاط گسسته شده در جهت z
t	زمان(s)
R	باقیمانده وزنی
S	اوپراتور انتگرال
D	اوپراتور مشتق
ϕ	تابع پایه گلرکین
q	بردار مختصات کاهش یافته

G	اوپراتور ماتریسی

علایم یونانی

μ	مدول برشی
λ	ثابت لامه
ρ_m	چگالی فلز (kgm^{-3})
ρ_c	چگالی سرامیک (kgm^{-3})
τ	زمان(بی بعد)
ν	نسبت پواسون
σ	تانسور تنش
ε	تانسور کرنش
η	نسبت طول به ضخامت
ω_L	فرکانس خطی
ω_{NL}	فرکانس غیرخطی
Π_T	انرژی جنبشی
Π_S	انرژی کرنشی
Π_F	انرژی ناشی از بستر الاستیک
Π_W	کار نیروی خارجی
Π^T	انرژی ناشی از افزایش دما

8- پیوست: ضرب های هادامارد و کرونیکر

تعریف 1: با در نظر گرفتن $A = [A_{ij}]_{N\times M}$ و $B = [B_{ij}]_{N\times M}$، ضرب هادامارد این ماتریس‌ها به صورت روبه رو می‌باشد: $A \circ B = [A_{ij}B_{ij}]_{N\times M}$

تعریف 2: اگر A یک ماتریس m در n و B یک ماتریس p در q باشد آنگاه حاصل ضرب کرونیکر ماتریس A و B به یک ماتریس mp در nq و صورت زیر نشان می‌دهند:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp\times nq}$$

9- مراجع

[1] M. Koizumi, FGM activities in Japan, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 28, No. 1, pp. 1-4, 1997.
[2] J. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 47, No. 1-3, pp. 663-684, 2000.
[3] J. Yang, H.-S. Shen, Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates, *Composite Structures,* Vol. 54, No. 4, pp. 497-508, 2001.
[4] Z.-Q. Cheng, S. Kitipornchai, Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates, *Journal of engineering mechanics,* Vol. 125, No. 11, pp. 1293-1297, 1999.
[5] R. Batra, J. Jin, Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 282, No. 1, pp. 509-516, 2005.
[6] L. Qian, R. Batra, L. Chen, Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 35, No. 6, pp. 685-697, 2004.
[7] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite structures,* Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008.
[8] M. Alizadeh, A. Alibeigloo, Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using three dimensional theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 10, 2015.
[9] H. Zafarmand, M. Kadkhodayan, Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates using graded finite element method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 228, No. 8, pp. 1275-1285, 2014.
[10] E. A. Shahrbabaki, A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015. (in Persian فارسی)
[11] Sh. Hosseini- Hashemi, H. Akhavan, M. Fadaee, Exact Closed-form Free Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Functionally Graded Plates with Two Bonded Piezoelectric Layers, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 11, No. 3, pp. 57-74, 2011. (in Persian فارسی)
[12] R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, M. Kermajani, S. Amirabdollahian, Exact solutions for free vibration of lévy-type rectangular nanoplates via nonlocal third-order plate theory, *Modares Mechanical Engineering Journal,* Vol. 14, No. 7, pp. 122-130, 2014. (in Persian فارسی)
[13] A. BAKHSHESHY, K. KHORSHIDI, Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Nanoplates in Thermal Environment Based on the Modified Couple Stress Theory, *Modares Mechanical Engineering Journal,* Vol. 14, pp. 323-330, 2015. (in Persian فارسی)
[14] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*: McGraw-hill, 1959.
[15] S. S. Vel, R. Batra, Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 272, No. 3, pp. 703-730, 2004.
[16] Z. Zhong, E. Shang, Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 40, No. 20, pp. 5335-5352, 2003.
[17] Z. Zhong, T. Yu, Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate, *Smart materials and structures,* Vol. 15, No. 5, pp. 1404, 2006.
[18] R. K. Bhangale, N. Ganesan, Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 294, No. 4, pp. 1016-1038, 2006.
[19] M. Arefi, G. Rahimi, Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity, *Acta Mechanica,* Vol. 223, No. 1, pp. 63-79, 2012.
[20] M. Arefi, A. M. Zenkour, A simplified shear and normal deformations nonlocal theory for bending of functionally graded piezomagnetic sandwich nanobeams in magneto-thermo-electric environment, *Journal of Sandwich Structures & Materials,* Vol. 18, No. 5, pp. 624-651, 2016.
[21] Q. Li, V. Iu, K. Kou, Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 324, No. 3, pp. 733-750, 2009.
[22] J. Yang, H.-S. Shen, Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 255, No. 3, pp. 579-602, 2002.
[23] C. Shu, *Mathematical Fundamentals of Differential Quadrature Method: Linear Vector Space Analysis and Function Approximation*, in: *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Eds., pp. 1-24: Springer, 2000.
[24] R. Ansari, M. F. Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, M. Darabi, Nonlinear vibrations of functionally graded Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Composite Structures,* Vol. 114, pp. 124-134, 2014.
[25] S. Ibrahim, B. Patel, Y. Nath, Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams, *International journal of non-linear mechanics,* Vol. 44, No. 10, pp. 1073-1084, 2009.
[26] R. Ansari, A. Shahabodini, M. F. Shojaei, Nonlocal three-dimensional theory of elasticity with application to free vibration of functionally graded nanoplates on elastic foundations, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 76, pp. 70-81, 2016.
[27] R. Aghababaei, J. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009.
[28] H. A. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* Vol. 6, No. 2, pp. 113-121, 2010.
[29] H.-T. Thai, D.-H. Choi, A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates, *Composite Structures,* Vol. 101, pp. 332-340, 2013.