



برداشت انرژی ارتعاشی در پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از تشدید فوق هارمونیک

امین یوسف‌پور¹، محمد صفی‌خانی محمودی¹، محمدرضا حائری یزدی^{2*}، آرش بهرامی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 11155-4563، arashb@ut.ac.ir، myazdi@ut.ac.ir

چکیده

عوامل غیرخطی سبب بروز تشدیدهای ثانویه همچون تشدید فوق‌هارمونیک و تشدید زیرهارمونیک در سیستم‌ها می‌شوند. تشدیدهای فوق‌هارمونیک در کسری از فرکانس طبیعی سیستم رخ می‌دهند و می‌توانند پاسخ با دامنه‌ی زیادی را فعال کنند. استفاده از این تشدیدها به دلیل پایین بودن فرکانس آن‌ها برای سیستم‌های برداشت انرژی می‌تواند بسیار مفید باشد. هدف از این پژوهش، بررسی سیستم برداشت انرژی ارتعاشی غیرخطی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک تحت تحریک فوق‌هارمونیک می‌باشد. در مقاله‌ی پیش‌رو معادلات حاکم بر سیستم در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده و حالاتی که فرکانس تحریک خارجی برابر با فرکانس تشدید فوق‌هارمونیک است، بررسی می‌شود. در این حالات جابه‌جایی نوک تیر و میزان ولتاژ خروجی به دست آمده و نشان داده می‌شود که تشدید فوق‌هارمونیک برای بهره‌برداری از سیستم‌های برداشت انرژی غیرخطی مفید است و باعث افزایش انرژی برداشت‌شده در این سیستم‌ها می‌شود. همچنین میزان انرژی به دست آمده در سیستم با پایداری یگانه و سیستم با پایداری دوگانه مقایسه شده است. مشاهده می‌شود سیستم با پایداری دوگانه برای برداشت انرژی مناسب‌تر است. علاوه بر روش مقیاس‌های چندگانه، با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا پاسخ‌های سیستم به دست آمده است. نتایج روش مقیاس‌های چندگانه با نتایج روش حل عددی مقایسه شده است. مشاهده می‌شود نتایج هر دو روش تطابق بسیار خوبی دارند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 بهمن 1396
پذیرش: 15 فروردین 1397
ارائه در سایت: 07 اردیبهشت 1397
کلید واژگان:
برداشت انرژی
پیزومگنتوالاستیک
تشدید فوق‌هارمونیک
روش مقیاس‌های چندگانه

Piezomagnetoelastic vibration energy harvesting with superharmonic resonance

Amin Yousefpour, Mohammad Safikhani Mahmoudi, Mohammad Reza Hairi Yazdi*, Arash Bahrami

Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, myazdi@ut.ac

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 24 January 2018
Accepted 04 April 2018
Available Online 27 April 2018

Keywords:

Energy harvesting
Piezomagnetoelastic
Superharmonic resonance
Method of multiple scales

ABSTRACT

Nonlinearities give rise to secondary resonances such as superharmonic and subharmonic resonances. The superharmonic resonance can activate large-amplitude responses when the excitation frequency is a fraction of the fundamental frequency of the system. These low frequency excitations are very beneficial for energy harvesting systems. This paper presents an analytical investigation of vibrational energy harvesters with superharmonic excitation in a piezomagnetoelastic configuration. A piezomagnetoelastic power generator is assumed to operate in the monostable and bistable modes. Nonlinear differential equations governing the oscillations of the system is solved using the method of multiple scales. System responses to the superharmonic resonance including the cantilever tip displacement and the output voltage are determined. It is found that employing the superharmonic resonance can increase the amount of harvested energy in the system. The root mean square value of the output voltage is obtained for several cases in both monostable and bistable modes. The power generated in monostable and bistable modes is then compared through numerical simulations. It is observed that the bistable mode is more convenient for harvesting energy. In addition, a Runge-Kutta numerical scheme is used to solve the differential equations. It is shown that the perturbation solution is in a close agreement with the numerical solution.

1- مقدمه

آبی بهره برده‌اند. درحالی‌که ما همچنان به این تکنیک‌ها برای تامین بخش زیادی از انرژی خود نیازمندیم، استفاده از روش‌های نوین با توجه به پیشرفت فناوری‌های مختلف برای تامین انرژی موردنیاز سیستم‌ها ضروری به نظر می‌رسد. به‌عنوان نمونه با پیشرفت ساخت قطعات الکترونیکی کم‌مصرف از

استفاده از انرژی‌هایی که در محیط پیرامونی وجود دارد، همواره موضوع مهمی بوده است. انسان‌ها از گذشته تاکنون برای تامین انرژی موردنیاز خود از روش‌های گوناگونی همچون آسیاب‌های بادی، بادبان کشتی‌ها و چرخ‌های

دادند که توان به‌دست آمده در مود اول تیر بسیار بیشتر از مودهای بعدی است.

مسئله‌ی مهم روش استخراج انرژی و تاثیر حالات مختلف شرایط محیطی بر میزان انرژی تولید شده می‌باشد. روش‌های متعارف برداشت انرژی براساس پدیده‌ی تشدید خطی طراحی می‌شوند و در نتیجه مشکلاتی ازجمله حساسیت‌های شدید به عدم قطعیت پهنای باند فرکانسی را به‌همراه دارند. در بررسی سیستم‌های خطی، دستگاه‌ها و ابزارآلات باید به‌گونه‌ای تنظیم شده باشند که فرکانس تحریک منطبق بر فرکانس طبیعی سیستم باشد. لذا عملکرد خوب دستگاه مربوط به یک ناحیه‌ی فرکانسی محدود است که ممکن است در عمل به سهولت به‌دست نیاید. به‌منظور غلبه بر این موضوع، سیستم‌های برداشت انرژی غیرخطی برای افزایش پهنای باند فرکانس طراحی می‌شوند. رویکرد استفاده از روش‌های غیرخطی در طراحی دستگاه‌های برداشت انرژی بسیار نویدبخش و کارآمد است [11]. یانگ و همکاران [12] نمونه‌ای از یک سیستم برداشت انرژی پیزوالکتریک شامل عوامل غیرخطی هندسی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ضریب کوپلینگ غیرخطی ولتاژ خروجی افزایش می‌یابد. جهانی و آقازاده [13] نیز سیستم برداشت انرژی دارای عوامل غیرخطی مختلف از جمله عوامل غیرخطی هندسی، میرایی و مادی را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که افزایش ضریب سفتی غیرخطی سبب افزایش بیشینه‌ی توان تولیدی می‌شود. در نظر گرفتن جملات غیرخطی موجود در معادلات، این امکان را برای ما فراهم می‌کند که در محدوده‌ی وسیع‌تری از نظر فرکانسی، پاسخ ارتعاشی با دامنه‌ی بزرگ دریافت کنیم. لذا محققان زیادی از این ویژگی بهره برده‌اند تا عملیات برداشت انرژی را در طیف فرکانسی گسترده‌تری ممکن سازند [14].

یکی از مزیت‌های سیستم‌های غیرخطی وجود نقاط تعادل چندگانه در این سیستم‌ها است. کرمی و اینمن [15] با استفاده از تئوری اغتشاشات در دامنه‌ی ارتعاشاتی کوچک و انتگرال‌گیری عددی در دامنه‌ی ارتعاشاتی بزرگ سیستم برداشت انرژی با پایداری دوگانه را در حالت تشدید اولیه مورد بررسی قرار دادند.

از جمله مسائلی که برای سیستم‌های برداشت انرژی ارتعاشی وجود دارد، این است که سیستم بتواند در فرکانس‌های پایین انرژی قابل‌توجهی برداشت کند. یکی از مزیت‌های استفاده از سیستم‌های برداشت انرژی غیرخطی این است که در این‌گونه سیستم‌ها علاوه بر فرکانس طبیعی، در فرکانس‌های تشدید فوق‌هارمونیک¹ می‌تواند پاسخ‌هایی با دامنه‌ی زیاد فعال شود. از آنجا که فرکانس طبیعی سیستم معمولاً زیاد است و ارتعاشات موجود در محیط معمولاً فرکانس کمی دارند، استفاده از تحریک فوق‌هارمونیک که کسری از فرکانس طبیعی سیستم است، برای برداشت انرژی می‌تواند بسیار مفید باشد. استفاده از تحریک فوق‌هارمونیک در تحقیقات گذشته تنها در بعضی هندسه‌ها و حالات خاص مانند مکانیزم برداشت انرژی با هندسه‌ی M شکل [16] و برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری دوگانه با استفاده از روش موازنه‌ی هارمونیک‌ها² مورد بررسی قرار گرفته است [17]. در تحقیقات گذشته برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه با استفاده از تشدید فوق‌هارمونیک تاکنون بررسی نشده است. همچنین برداشت انرژی در سیستم پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات³ در

جمله حس‌گرهای بی‌سیم، انتقال‌دهنده‌های داده، کنترل‌کننده‌ها و ایمپلنت‌های پزشکی که تنها چند نمونه از فناوری‌هایی هستند که در سال‌های اخیر با پیشرفت تکنولوژی به توان مصرفی کمتر از میلی وات رسیده‌اند، با استفاده از روش‌های نوین ازجمله برداشت انرژی ارتعاشی هدر رونده در محیط می‌توان انرژی موردنیاز این قطعات کم‌مصرف را تامین کرد [2,1].

تامین انرژی از منبع مستقیم مشکلاتی چون سیم‌های اتصال، تعمیر و نگهداری و طول عمر کوتاه منبع انرژی را به‌همراه دارد. از همه مهم‌تر، در برخی کاربردهای حیاتی مثل قلب انسان، استفاده از باتری‌ها و منابع انرژی با توجه به طول عمر محدودشان دشواری‌های زیادی را به‌همراه دارد. این مشکلات و همچنین انگیزه‌ی استفاده از انرژی‌های هدر رونده، تحقیقات اخیر را به سمت برداشت انرژی الکتریکی از محیط سوق داده است [3].

برداشت انرژی به معنی جمع‌آوری و استفاده از انرژی‌های هدر رونده در محیط اطراف است. وسایل و دستگاه‌های برداشت انرژی به‌منظور جمع‌آوری انرژی از محیط اطراف و تبدیل آن به انرژی الکتریکی قابل استفاده طراحی شده‌اند. از جمله انرژی‌هایی که در محیط وجود دارد و هدر می‌روند، انرژی ارتعاشی محیط است. این منابع انرژی نامحدود همواره در محیط اطراف وجود دارند. در میان منابع مختلف انرژی محیطی، برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی به‌دلیل در دسترس بودن، رواج زیادی پیدا کرده است [4]. با توجه به این‌که قطعات الکتریکی نوین نیازمند توان بسیار کمی هستند، برداشت انرژی از محیط امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. با دریافت انرژی موردنیاز از محیط به‌دلیل عدم‌نیاز به شارژ و تعویض باتری، نیاز به مراقبت‌های ویژه از سیستم از بین می‌رود که این خود در کاهش هزینه‌ها بسیار موثر است. سیستم‌های برداشت انرژی ارتعاشی در حال حاضر کاربردهای متنوعی در زمینه‌های مختلف فناوری دارند. به‌عنوان مثال، برای ایمپلنت‌های پزشکی از جمله ضربان‌ساز قلب و محرک‌های نخاعی، در دسترس بودن یک منبع تغذیه قابل اطمینان برای جایگزینی با باتری ضروری است تا ریسک خرابی و نابودی سیستم را برطرف کند [5]. این مقاله بر روی برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی تمرکز دارد. برخی مواردی که می‌توان برای جذب انرژی استفاده کرد ارتعاشات پل‌ها، حرکت تابر خودروها و حتی ضربان قلب انسان می‌باشد.

برداشت انرژی از ارتعاشات مکانیکی توسط مواد پیزوالکتریک، مبدل‌های الکترومغناطیسی و مبدل‌های الکترواستاتیکی انجام می‌شود. تحقیقات زیادی در مورد برداشت انرژی از پیزوالکتریک‌ها صورت گرفته است. بزرگ‌ترین مزیت مواد پیزوالکتریک در برداشت انرژی نسبت به دو روش دیگر چگالی انرژی بالای این مواد و سهولت استفاده از آن‌ها است [6]. شن و همکاران [7] عملکرد سیستم‌های برداشت انرژی با استفاده از انواع مختلف مواد پیزوالکتریک و نحوه‌ی به‌کار بردن آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک که در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است از مواد پیزوالکتریک برای برداشت انرژی استفاده می‌شود.

اومدا و همکاران [8] جزو اولین پژوهشگرانی بودند که روی مسئله برداشت انرژی ارتعاشی مطالعه کردند و مدل پیشنهادی آن‌ها یک مدل گسسته بود که از یک سیستم جرم و فنر و میراکننده تشکیل شده بود. آجیتساریا و همکاران [9] تیر یکسر گیردار با لایه‌های پیزوالکتریک را با فرض تیر اوایلر-برنولی و تیموشینکو بررسی کردند. اصغرزاده و همکاران [10] برداشت انرژی از ارتعاشات تیر دوزنقه‌ای با یک‌لایه‌ی پیزوالکتریک را با استفاده از روش پارامترهای توزیع شده مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان

¹ Superharmonic resonance

² Harmonic balance method

³ Perturbation theory

به‌طور معمول جملات زمانی موده‌های ارتعاشی به‌وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بر سیستم اعمال می‌شوند. معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم شامل تحریک پایه، جملات غیرخطی، میرایی و کوپلینگ الکترومکانیکی است. با استفاده از روش انرژی که برای این سیستم در مراجع [20,15] استفاده شده است و در پیوست نیز آمده است، معادلات حاکم بر سیستم به‌دست می‌آیند. معادله‌ی (1) رفتار سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک را بیان می‌کند.

$$m\ddot{r} + d\dot{r} + Kr + \tilde{b}r^3 + \tilde{\psi}_1 V_1 = F \cos(\omega\tau) \quad (1-a)$$

$$C_0 \dot{V}_1 + \frac{V_1}{R_1} - \tilde{\psi}_2 \dot{r} = 0 \quad (1-b)$$

r جابه‌جایی نوک تیر، τ زمان، m اینرسی معادل سیستم، d ضریب میرایی سیستم، K ضریب سفتی خطی سیستم، $\tilde{b}$ ضریب سفتی غیرخطی سیستم، V_1 ولتاژ خروجی، $\tilde{\psi}_1$ ضریب کوپلینگ ولتاژ خروجی در معادله ارتعاشی، C_0 ظرفیت خازنی ماده پیزوالکتریک، R_1 میزان بار مقاومت مربوط به مدار الکتریکی، $\tilde{\psi}_2$ ضریب کوپلینگ مکانیکی در معادله الکتریکی، F دامنه تحریک خارجی و ω فرکانس تحریک خارجی است.

با توجه به تابع پتانسیل سیستم و مکان قرارگیری آهنرباهای ثابت بر روی پایه، سیستم می‌تواند دارای یک یا چند نقطه تعادل باشد. نکته مهم این‌که در سیستم با پایداری یگانه مقدار K مثبت است و در سیستم با پایداری دوگانه K عددی منفی است.

3- سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه

در حالتی که ضریب K مثبت باشد سیستم دارای یک نقطه تعادل است. درواقع نقطه تعادل صفر، تنها نقطه تعادل پایدار سیستم است و تیر حول این نقطه نوسان خواهد کرد. در این صورت سیستم موجود یک سیستم غیرخطی برداشت انرژی با پایداری یگانه است.

با استفاده از تغییر متغیرهای بیان‌شده در معادله‌ی (2)، معادله‌ی حاکم بر سیستم را بی‌بعد می‌کنیم.

$$t = \tau \sqrt{\frac{|K|}{m}}, u = \frac{r}{b_c}, v = \frac{C_0}{\tilde{\psi}_2 l_p} V_1 \quad (2)$$

با استفاده از کمیت‌های بی‌بعد تعریف شده در معادله‌ی (2)، معادله‌ی بدون بعد حاکم بر سیستم برداشت پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (3) تبدیل می‌شود.

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + u + \alpha u^3 - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (3-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa u = 0 \quad (3-b)$$

کمیت‌های معادله‌ی (3) در رابطه‌ی (4) بیان شده است.

$$\alpha = \frac{\tilde{b} b_c^2}{|K|}, \mu = \frac{d}{2\sqrt{|K|}}, \chi = \frac{l_p \tilde{\psi}_2}{b_c |K| C_p}, \kappa = \frac{b_c}{l_p} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{R_1 C_0} \sqrt{\frac{m}{|K|}}, \Omega = \omega \sqrt{\frac{m}{|K|}}, f = \frac{F}{b_c |K|}$$

معادله‌ی (3)، معادله‌ی بی‌بعد حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک در حالت پایداری یگانه است. u جابه‌جایی بدون بعد نوک تیر، v ولتاژ بی‌بعد خروجی، μ ضریب بی‌بعد میرایی مکانیکی، b_c نسبتی از ضخامت تیر، l_p طول مشخصه‌ی المان پیزوالکتریک، α ضریب جمله‌ی غیرخطی درجه سه، v ولتاژ خروجی بدون بعد، χ ضریب بدون بعد کوپلینگ پیزوالکتریک در معادله مکانیکی، f دامنه بی‌بعد تحریک خارجی، Ω فرکانس بی‌بعد تحریک خارجی و λ ضریب بی‌بعد کوپلینگ الکتریکی است که با مقاومت الکتریکی رابطه‌ی عکس دارد همچنین κ ضریب بدون بعد کوپلینگ پیزوالکتریک در معادله الکتریکی است. مقدار

حالت تشدید فوق هارمونیک تاکنون در تحقیقات گذشته بررسی نشده و نتایج این سیستم در دو حالت پایداری یگانه و دوگانه با یکدیگر مقایسه نشده است. در این پژوهش برداشت انرژی در پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه با تحریک فوق هارمونیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه¹ بر پایه‌ی تئوری اغتشاشات بررسی شده و میزان انرژی الکتریکی خروجی محاسبه شده است.

در قسمت 2 معادلات کلی حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی بررسی شده و بی‌بعد شده‌اند. سپس در قسمت 3 سیستم با پایداری یگانه مورد بررسی قرار گرفته و معادله‌ی حاکم بر این سیستم‌ها با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه بر پایه‌ی تئوری اغتشاشات حل شده است. نمودار پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی سیستم رسم شده است. همچنین حل عددی با استفاده از روش رانگ-کوتا انجام شده و سپس نتایج هر دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. در قسمت 4 سیستم با پایداری دوگانه مورد بررسی قرار گرفته است و مانند قسمت 3 نتایج با روش مقیاس‌های چندگانه به‌دست آمده و با حل عددی مقایسه شده است. در بخش پیوست نیز معادلات حاکم بر سیستم برداشت انرژی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از روش انرژی به‌دست آمده است.

2- معادلات حاکم بر سیستم

در این قسمت معادلات حاکم بر سیستم برداشت انرژی با پیکره‌بندی پیزومگنتوالاستیک ارائه می‌شود. سیستم برداشت انرژی از تیر یکسر گیردار، آهنرباها و مدار برقی متصل به پیزوالکتریک تشکیل شده است. تیر یکسر گیردار این سیستم همراه با عوامل غیرخطی هندسی اولین بار توسط مون و هلمز [18] مورد بررسی قرار گرفت. در این هندسه از آهنرباهای ثابت جهت غیرخطی‌سازی سیستم استفاده می‌شود، نیروی مغناطیسی بین آهنربای نوک تیر و روی پایه‌ی سیستم باعث به‌وجود آمدن نیروی‌های غیرخطی در سیستم می‌شود. لایه‌های پیزوالکتریک که بر روی تیر قرار دارد انرژی ارتعاشی حاصل از جابه‌جایی تیر را جذب کرده و آن را تبدیل به انرژی الکتریکی می‌کنند. لازم به توجه است که در پژوهش حاضر تمرکز مطالعه بر روی قسمت ارتعاشی تیر است، لذا معادلات مربوط به قسمت الکتریکی ساده‌سازی شده‌اند و تنها ضرایب کمیت‌های الکتریکی در معادلات آمده است.

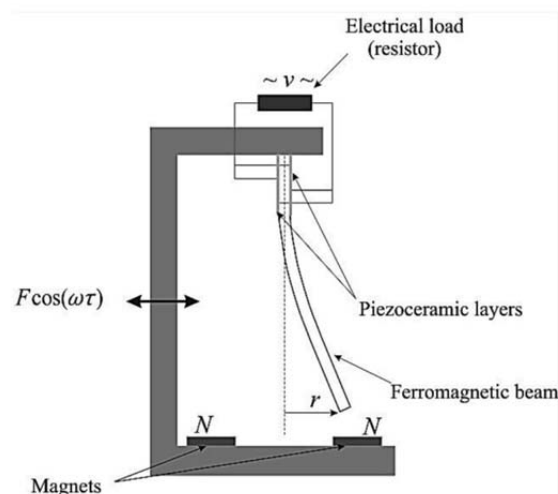


Fig. 1 Piezomagnetoelastic energy harvester mechanism [19]

شکل 1 پیکره‌بندی سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک [19]

¹ Method of multiple scales

سمت صفر میل کند، پاسخ های $x_0(t)$ و $v_0(t)$ پاسخ کلی سیستم را نشان می دهند. مشتقات زمانی به صورت بیان شده در معادله ی (8) هستند [21].

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (8-a)$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad (8-b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0) \quad (8-c)$$

با جایگذاری معادلات (7) و (8) در معادله ی (6) و برابر قرار دادن ضرایب ε^0 و ε^1 معادلات به دو بخش تقسیم می شوند.

قسمتی از معادلات که مربوط به ε^0 است، در معادله ی (9) آمده است.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = f \cos(\Omega t) \quad (9-a)$$

$$D_0 v_0 + \alpha v_0 = -\kappa D_0 u_0 \quad (9-b)$$

قسمت مربوط به ε^1 نیز به صورت بیان شده در معادله ی (10)، است.

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\bar{\mu} D_0 u_0 - \bar{\alpha} u_0^3 + \bar{\chi} v_0 \quad (10-a)$$

$$D_0 v_1 + \lambda v_1 = -D_1 v_0 - \kappa(D_0 u_1 + D_1 u_0) \quad (10-b)$$

پاسخ کلی معادله ی دیفرانسیل (9) در معادله ی (11) بیان شده است.

$$u_0 = A_1 e^{iT_0} + F_1 e^{i\Omega T_0} + cc \quad (11-a)$$

$$v_0 = \frac{-\kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{iT_0} + \frac{-\kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \quad (11-b)$$

مقدار F_1 در معادله ی (12) آمده است.

$$F_1 = \frac{f}{2(1 - \Omega^2)} \quad (12)$$

ضریب A_1 مستقل از T_0 می باشد ولی با نرخ T_1 تغییر می کند. در واقع

A_1 تابعی از T_1 است. با حذف جملات سکولار مقدار ضریب A_1 به دست

می آید [21]. برای بررسی پاسخ به تحریک فوق هارمونیک فرکانس تحریک

سیستم $\omega_n/3 \approx \Omega$ در نظر گرفته می شود و به وسیله ی پارامتر تنظیم در

معادله ی (13) توصیف می شود.

$$3\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma \quad (13)$$

در معادلات بی بعد حاکم بر سیستم که در این قسمت استفاده شده

است، $\omega_n = 1$ می باشد.

مقادیر به دست آمده u_0 و v_0 را در معادله ی (10-a) جایگذاری می کنیم.

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 = & -[2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu} A_1) + 3\bar{\alpha}(A_1 \bar{A}_1 + 2F_1^2)A_1]e^{iT_0} \\ & -[2i\Omega \mu + 3\bar{\alpha}(2A_1 \bar{A}_1 + F_1^2)]F_1 e^{i\Omega T_0} \\ & -\bar{\alpha} A_1^3 e^{3iT_0} - \bar{\alpha} F_1^3 e^{3i\Omega T_0} - 3\bar{\alpha} A_1^2 F_1 e^{i(2+\Omega)T_0} \\ & -3\bar{\alpha} A_1^2 F_1 e^{i(-2+\Omega)T_0} - 3\bar{\alpha} A_1 F_1^2 e^{i(1+2\Omega)T_0} \\ & -3\bar{\alpha} A_1 F_1^2 e^{i(1-2\Omega)T_0} - \frac{\bar{\chi} \kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{iT_0} \\ & + \frac{\bar{\chi} \kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \end{aligned} \quad (14)$$

در معادله ی (14)، $\bar{A}_1$ مزدوج ضریب A_1 است. و در این حالت:

$$3\Omega T_0 = (1 + \varepsilon \sigma)T_0 = T_0 + \varepsilon \sigma T_0 = T_0 + \sigma T_1 \quad (15)$$

سپس ضرایب جملات سکولار برابر صفر قرار داده می شوند. جملات

سکولار، جملاتی هستند که منجر به پاسخی می شوند که دامنه ی آن ها با

گذر زمان به صورت نامحدود رشد می کند. با مساوی صفر قرار دادن ضرایب

جملات سکولار معادله ی مربوط به حذف جملات سکولار به دست می آید که

در معادله ی (16) بیان شده است.

$$\begin{aligned} 2i(\bar{A}_1 + \bar{\mu} A_1) + 3\bar{\alpha}(A_1 \bar{A}_1 + 2F_1^2)A_1 + \frac{\bar{\chi} \kappa A_1 i}{i + \lambda} \\ + \bar{\alpha} F_1^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

با حل معادله ی (16) ضریب A_1 به دست می آید. برای حل معادله ی

(16) ابتدا آن را با استفاده از معادله ی (17) به فرم قطبی بازنویسی می کنیم.

$$A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (17)$$

کمیت های مکانیکی و الکتریکی سیستم که در این پژوهش استفاده شده در جدول 1 آمده است.

اگر عوامل غیرخطی و کوپلینگ قسمت های الکتریکی وجود نداشته

باشد، سیستم به یک ارتعاش کننده ی هارمونیک خطی تبدیل خواهد شد.

"شکل 2" نمودار انرژی پتانسیل سیستم با پایداری یگانه را نشان می دهد.

همان طور که در "شکل 2" مشخص است، در این حالت نقطه ی جابه جایی

صفر، نقطه ی تعادل پایدار سیستم است.

برای حل معادله ی حاکم بر سیستم با استفاده از روش مقیاس های

چندگانه، ابتدا معادلات حاکم بر سیستم را مقیاس سازی می کنیم. در روش

تئوری اغتشاشات برای بررسی تشدید فوق هارمونیک ناشی از جملات

غیرخطی مرتبه ی سه مقیاس سازی می بایست به گونه ای صورت گیرد که

جملات میرایی و عوامل غیرخطی و کوپلینگ الکتریکی در نهایت در یک

معادله ظاهر شوند و نیرو در معادله ای با یک مرتبه بالاتر ظاهر شود [15]. به

این منظور معادلات حاکم بر سیستم را با استفاده از روابط معادله ی (5)

مقیاس سازی می کنیم.

$$\mu = \varepsilon \bar{\mu}, \alpha = \varepsilon \bar{\alpha}, \chi = \varepsilon \bar{\chi} \quad (5)$$

در مقیاس سازی معادلات حاکم بر سیستم ε یک پارامتر قراردادی و

فرضی است که به معادله اضافه می شود تا مسئله ی غیرخطی به درجات

مختلف تقسیم شود و قابل حل باشد. معادله ی بدون بعد سیستم

پیزوالکتریک برداشت انرژی با پایداری یگانه به همراه عوامل غیرخطی درجه

سه پس از مقیاس سازی در معادله ی (6) بیان شده است.

$$\ddot{u} + \varepsilon 2\bar{\mu} \dot{u} + u + \varepsilon \bar{\alpha} u^3 - \varepsilon \bar{\chi} v = f \cos(\Omega t) \quad (6-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{u} = 0 \quad (6-b)$$

برای به دست آوردن جابه جایی نوک تیر و مقدار ولتاژ خروجی معادله ی

(6) حل می شود. در روش مقیاس های چندگانه ابتدا پاسخ به صورت توان های

ε بسط داده می شوند.

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (7-a)$$

$$v = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (7-b)$$

$$T_n = \varepsilon^n t$$

به T_n مقیاس های مختلف زمانی را نمایش می دهد. زمانی که ε به

جدول 1 کمیت های مدل استفاده شده [19]

Table 1. Parameters of the reference model [19]

مقدار پارامتر	پارامتر
0.005	μ
0.05	χ
0.5	κ
0.05	λ

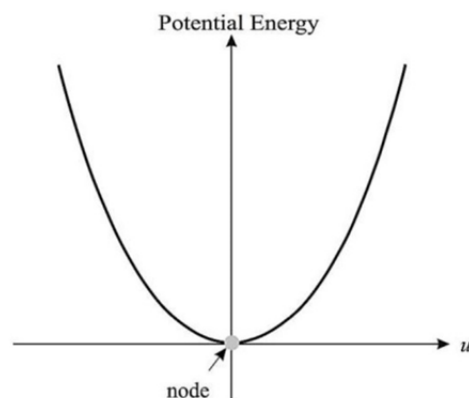


Fig. 2 Potential energy function for mono-stable mode

شکل 2 نمودار انرژی پتانسیل سیستم برداشت انرژی ارتعاشی با پایداری یگانه

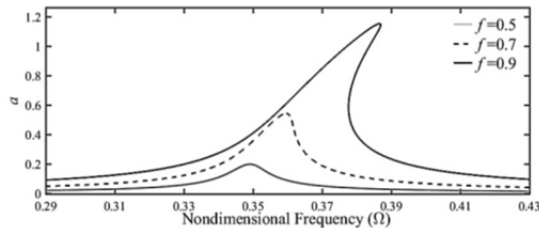


Fig. 4 Frequency response of the superharmonic resonance for the monostable energy harvesting system with different excitation amplitudes

شکل 4 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری یگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با دامنه تحریک متفاوت

غیرخطی سیستم، میزان بیشینه‌ی دامنه افزایش می‌یابد، لذا افزایش ضریب سفتی غیرخطی سبب افزایش انرژی برداشت‌شده می‌شود. "شکل 4" نمودار پاسخ فرکانسی برای حالات مختلف با میزان دامنه‌ی تحریک ورودی متفاوت را نشان می‌دهد. در این حالت $\alpha = 0.05$ در نظر گرفته شده است. مقدار دامنه‌ی a برای حالتی که دامنه‌ی تحریک خارجی متفاوت است، به‌دست آمده است. همان‌طور که در "شکل 4" نشان داده شده است با افزایش دامنه تحریک خارجی میزان بیشینه‌ی دامنه‌ی پاسخ افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال در حالتی که $f = 0.9$ است میزان بیشینه‌ی a برابر با 1.17 است.

معادله‌ی (23) پاسخ کلی سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق هارمونیک نشان می‌دهد.

$$u = a \cos(t + \beta) + 2F_1 \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (23-a)$$

$$v = \frac{\kappa a}{1 + \lambda^2} [\lambda \sin(t + \beta) - \cos(t + \beta)] + \frac{2\kappa F_1 \Omega}{\Omega^2 + \lambda^2} [\lambda \sin(\Omega t) - \Omega \cos(\Omega t)] + O(\varepsilon) \quad (23-b)$$

"شکل 5-a" پاسخ زمانی جابه‌جایی نوک تیر در حالت ماندگار به تحریک فوق‌هارمونیک را نشان می‌دهد. مقدار ضریب $\alpha = 0.05$ و $f = 0.7$ در نظر گرفته شده است. حل عددی سیستم با استفاده از حل معادله‌ی (3) توسط روش رانگ-کوتا مرتبه‌ی چهار انجام شده است.

حل عددی ابتدا دارای یک حالت گذرا است و پس از مدتی به حالت ماندگار می‌رسد. در "شکل 5" پاسخ حالت ماندگار رسم شده است. در این شکل نتایج حل عددی و حل با روش مقیاس‌های چندگانه در حالات ماندگار مقایسه شده است. تطابق نتایج هر دو روش درستی حل با روش مقیاس‌های چندگانه را نشان می‌دهد. "شکل 5-b" ولتاژ خروجی سیستم را نشان می‌دهد که با استفاده از معادله‌ی (23-b) رسم شده است. مقدار مؤثر² ولتاژ به‌دست آمده از سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه و با شرایط بررسی شده در این پژوهش برابر با 0.3143 است. همچنین روش حل عددی و حل مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار گرفته است و همان‌طور که در "شکل 5" مشخص است نتایج هر دو روش با یکدیگر تطابق بسیار خوبی دارند.

4- سیستم برداشت انرژی با پایداری دوگانه

در این قسمت انرژی برداشت‌شده از ارتعاشات سیستم پیزومگنتوالاستیک حالتی که دارای دو نقطه‌ی تعادل پایدار است بررسی می‌شود. در این حالت تابع پتانسیل سیستم به‌دلیل تغییر مکان آهنرباها تغییر کرده است و آهنرباها به‌گونه‌ای قرار گرفته‌اند که سیستم دارای دو نقطه‌ی تعادل پایدار می‌باشد. در این حالت نقطه‌ی صفر نقطه‌ی تعادل ناپایدار سیستم است.

در این حالت معادله‌ی (16) به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (18) تبدیل می‌شود.

$$i\dot{a} e^{i\beta} - a\beta' e^{i\beta} + i\alpha\bar{\mu} e^{i\beta} + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) a e^{i\beta} + \frac{\bar{\chi}\kappa\bar{\alpha} e^{i\beta} (i\lambda + 1)}{2(1 + \lambda^2)} + \bar{\alpha} F_1^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (18)$$

پس از جداسازی بخش حقیقی و موهومی، معادله‌ی (21) به دو معادله تبدیل می‌شود.

$$a' = -a\bar{\mu} - \frac{\bar{\chi}\kappa a \lambda}{2(1 + \lambda^2)} - \bar{\alpha} F_1^3 \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (19-a)$$

$$a\beta' = 3\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \frac{1}{2}a + \frac{\bar{\chi}\kappa a}{2(1 + \lambda^2)} + \bar{\alpha} F_1^3 \cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (19-b)$$

سپس از تغییر متغیر معادله‌ی (20) استفاده می‌کنیم.

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (20)$$

برای به‌دست آوردن پاسخ حالت ماندگار¹ سیستم تغییرات α و β صفر قرار داده می‌شود و معادله‌ی (19) در حالت ماندگار به معادله‌ی (21) تبدیل می‌شود.

$$a\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa a \lambda}{2(1 + \lambda^2)} = -\bar{\alpha} F_1^3 \sin(\gamma) \quad (21-a)$$

$$a\sigma + 3\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \frac{1}{2}a + \frac{\bar{\chi}\kappa a}{2(1 + \lambda^2)} = -\bar{\alpha} F_1^3 \cos(\gamma) \quad (21-b)$$

پاسخ حالت ماندگار معادله‌ی (19) با حل معادله‌ی (21) به‌دست می‌آید.

$$\sigma = + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1 + \lambda^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\alpha} F_1^3}{a} \right)^2 - \left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1 + \lambda^2)} \right)^2} + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \left(\frac{1}{4}a^2 + 2F_1^2 \right) \quad (22)$$

معادله‌ی (22)، معادله‌ی پاسخ فرکانسی حالت ماندگار سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق‌هارمونیک نشان می‌دهد. با استفاده از معادله‌ی (22) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی در "شکل‌های 3 و 4" در نزدیکی فرکانس تشدید فوق‌هارمونیک رسم شده است. "شکل 3" نمودار پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی با پایداری یگانه را در حالت تشدید فوق‌هارمونیک با میزان ضریب سفتی غیرخطی متفاوت نمایش می‌دهد. همان‌طور که در نمودار مشخص است، در نزدیکی فرکانس فوق‌هارمونیک میزان a افزایش زیادی دارد به‌عنوان مثال در حالتی که ضریب $\alpha = 0.05$ است، بیشینه‌ی دامنه‌ی a برابر با 0.53 است. همچنین همان‌طور که در "شکل 3" نشان داده شده است، با افزایش ضریب سفتی

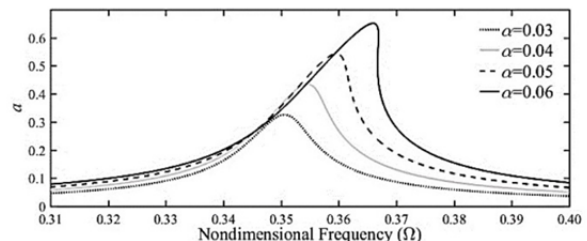


Fig. 3 Frequency response of the superharmonic resonance for the monostable energy harvesting system with different nonlinear stiffness coefficients

شکل 3 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری یگانه در حالت تشدید فوق‌هارمونیک با ضرایب سفتی غیرخطی متفاوت

² Root mean square

¹ Steady state

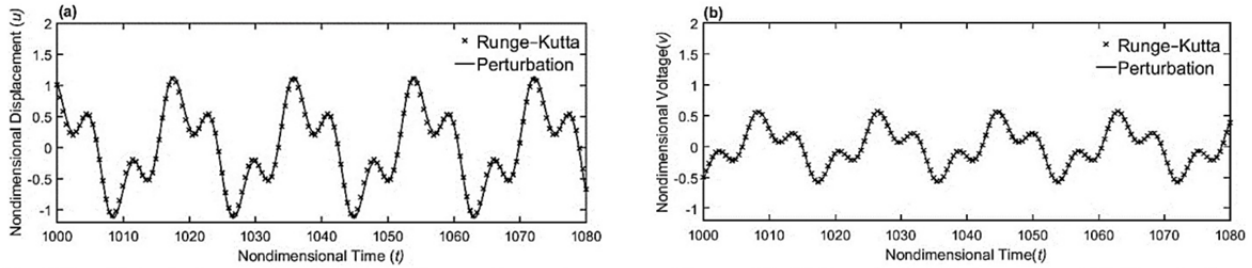


Fig. 5 Time history in the mono-stable mode for the super-harmonic resonance ($\Omega \approx \omega_n/3$): (a) dimensionless displacement and (b) dimensionless voltage

شکل 5 پاسخ زمانی در حالت پایداری یگانه به فرکانس تحریک فوق هارمونیک ($\Omega \approx \omega_n/3$): (a) جابه جایی بی بعد (b) ولتاژ بی بعد

x جابه جایی نوک تیر از نقطه ی تعادل پایدار سیستم است. در این حالت تابع پتانسیل آهنرباها به گونه ای تغییر کرده است که میزان ضریب جمله ی غیرخطی درجه سه کاهش یافته است. سپس معادلات حاکم بر سیستم را مقیاس سازی می کنیم. هدف از این قسمت بررسی رفتار سیستم در حالت تشدید فوق هارمونیک است که از عوامل غیرخطی درجه دو ناشی می شود لذا با استفاده از مرجع [21] و با توجه به این نکته که میزان ضریب α_b کاهش یافته است معادلات را با استفاده از رابطه ی (26) مقیاس سازی می کنیم.

$$\mu = \varepsilon \bar{\mu}, \chi = \varepsilon \bar{\chi}, \alpha_b = \varepsilon^2 \bar{\alpha}_b \quad (26)$$

در حالت پایداری دوگانه معادلات مقیاس سازی شده در معادله ی (27)

آمده است [16].

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \bar{\mu} \dot{x} + x + \frac{3}{2}\varepsilon \sqrt{\bar{\alpha}_b} x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \bar{\alpha}_b x^3 - \varepsilon \bar{\chi} v = f \cos(\Omega t) \quad (27-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{x} = 0 \quad (27-b)$$

و پاسخ به صورت توان های ε بسط داده می شوند.

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (28-a)$$

$$v = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (28-b)$$

قسمتی از معادلات که مربوط به ε^0 است در معادله ی (29) آمده است.

$$D_0^2 x_0 + x_0 = f \cos(\Omega t) \quad (29-a)$$

$$D_0 v_0 + \lambda v_0 = -\kappa D_0 x_0 \quad (29-b)$$

قسمت مربوط به ε^1 نیز به صورت بیان شده در معادله ی (30)، است.

$$D_0 D_1^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\bar{\mu} D_0 x_0 - \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} x_0^2 + \bar{\chi} v_0 \quad (30-a)$$

$$D_0 v_1 + \lambda v_1 = -D_1 v_0 - \kappa(D_0 x_1 + D_1 x_0) \quad (30-b)$$

پاسخ معادله ی (29) در معادله ی (31) بیان شده است.

$$x_0 = A_1 e^{i\Omega T_0} + F_1 e^{i\Omega T_0} + cc \quad (31-a)$$

$$v_0 = \frac{-\kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{i\Omega T_0} + \frac{-\kappa F_1 i \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \quad (31-b)$$

$$F_1 = \frac{f}{2(1 - \Omega^2)} \quad (31-c)$$

حال مقادیر به دست آمده x_0 و v_0 را در معادله ی (30-a) جایگذاری

می کنیم.

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 = & -[2i(\dot{A}_1 + \bar{\mu} A_1)]e^{i\Omega T_0} - 2i\Omega \bar{\mu} F_1 e^{i\Omega T_0} \\ & + \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1^2 e^{2i\Omega T_0} - \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1^2 e^{2i\Omega T_0} - \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1 \bar{A}_1 \\ & - \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1^2 - 3\sqrt{\bar{\alpha}_b} F_1 \bar{A}_1 e^{i(\Omega-1)T_0} \\ & - 3\sqrt{\bar{\alpha}_b} A_1 F_1 e^{i(\Omega+1)T_0} + \frac{\bar{\chi} \kappa A_1 i}{i + \lambda} e^{i\Omega T_0} \\ & + \frac{i \bar{\chi} \kappa F_1 \Omega}{i \Omega + \lambda} e^{i\Omega T_0} + cc \end{aligned} \quad (32)$$

در این حالت فرکانس تحریک سیستم به صورت $\Omega \approx \omega_n/2$ در نظر

گرفته می شود و به وسیله ی پارامتر تنظیم توصیف می شود.

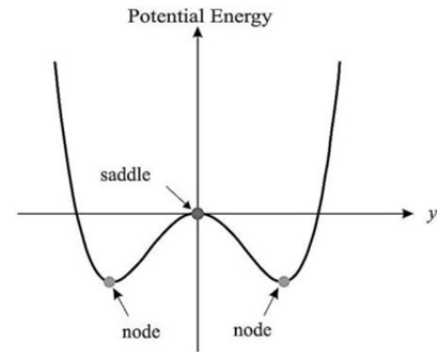


Fig. 6 Potential energy function for bistable mode

شکل 6 نمودار انرژی پتانسیل سیستم برداشت انرژی ارتعاشی با پایداری دوگانه

"شکل 6" نمودار انرژی پتانسیل سیستم با پایداری دوگانه را نشان می دهد. همان طور که در شکل مشخص است در این حالت سیستم دارای سه نقطه ی تعادل است که نقطه ی جابه جایی صفر نقطه ی تعادل ناپایدار است و دو نقطه ی دیگر، نقاط تعادل پایدار سیستم می باشند. در این حالت ضریب سفتی غیرخطی سیستم با استفاده از α_b نشان داده شده است. در سیستم با پایداری دوگانه که در این قسمت بررسی می شود فاصله و شدت آهنرباها به گونه ای تغییر یافته که مقدار ضریب α_b کمتر از ضریب غیرخطی در سیستم با پایداری یگانه است. معادله ی بی بعد حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با پایداری دوگانه در معادله ی (24) آمده است [15].

$$\ddot{y} + 2\mu \dot{y} - \frac{\gamma}{2}(1 - \alpha_b y^2) - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (24-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{y} = 0 \quad (24-b)$$

معادله ی (24)، معادله ی حاکم بر سیستم برداشت انرژی غیرخطی با پایداری دوگانه که با استفاده از دولا یه ی پیروالکتریک بر روی سطوح بالا و پایین تیر برداشت انرژی صورت می گیرد را نشان می دهد. این سیستم با توجه به میزان دامنه ی تحریک ورودی می تواند سه نوع رفتار داشته باشد. اگر دامنه ی نیروی ورودی بسیار زیاد یا بسیار کم باشد، پاسخ سیستم تناوبی خواهد بود و اگر دامنه ی تحریک ورودی متوسط باشد، نتایج آشوبناک خواهد شد و در این صورت پاسخ غیرقابل پیش بینی است [22].

در این قسمت فرض می شود که دامنه تحریک خارجی کم است و سپس پاسخ سیستم با پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات به دست می آید. برای حل معادلات سیستم ابتدا مبدأ را به یکی از نقاط تعادل پایدار استاتیکی سیستم جابه جا می کنیم. معادلات حاکم بر سیستم پیرومگنتوالاستیک در حالت پایداری دوگانه در نزدیکی نقاط تعادل استاتیکی در معادله ی (25) آمده است.

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + x + \frac{3}{2}\sqrt{\bar{\alpha}_b} x^2 + \frac{1}{2}\alpha_b x^3 - \chi v = f \cos(\Omega t) \quad (25-a)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{x} = 0 \quad (25-b)$$

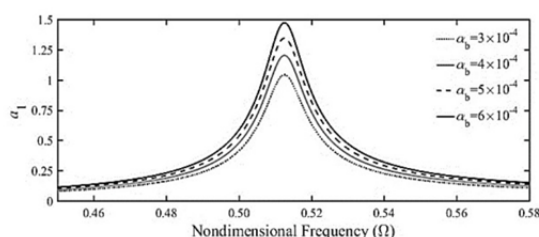


Fig. 7 Frequency response of the superharmonic resonance for the bistable energy harvesting system with different nonlinear stiffness coefficients

شکل 7 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با ضرایب سفتی غیرخطی متفاوت

"شکل 8" نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک را با دامنه‌های تحریک ورودی مختلف نشان می‌دهد. در این حالت ضریب سفتی غیرخطی سیستم برابر با 5×10^{-4} در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در "شکل 8" مشخص است، با افزایش دامنه تحریک خارجی میزان بیشینه‌ی دامنه a_1 افزایش می‌یابد. "شکل 9-a" پاسخ حالت ماندگار جابه‌جایی نوک تیر به تحریک فوق هارمونیک در حالتی که $f = 0.7$ و $\alpha_b = 5 \times 10^{-4}$ است را نشان می‌دهد. در این شکل نتایج حل عددی و نتایج حل با روش مقیاس‌های چندگانه در حالات ماندگار مقایسه شده است. برای به‌دست آوردن پاسخ سیستم با روش حل عددی معادله‌ی (25) توسط روش رانگ-کوتا حل شده است. مقایسه‌ی حل عددی و حل تئوری اغتشاشات درستی نتایج را نشان می‌دهد.

در "شکل 9-b" ولتاژ خروجی سیستم پیزومگنتوالاستیک با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با روش حل عددی و حل مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار موثر ولتاژ خروجی برای سیستم برداشت انرژی با شرایط بیان شده در این قسمت برابر با 0.5422 است.

در جدول 2 مقادیر مختلف ولتاژ خروجی از سیستم برداشت انرژی با استفاده از تشدید فوق هارمونیک و در حالات پایداری یگانه و دوگانه بیان شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص است، مقدار موثر و بیشینه‌ی ولتاژ به‌دست آمده از سیستم در حالت پایداری دوگانه بیشتر از انرژی برداشت شده در حالت پایداری یگانه است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی سیستم برداشت انرژی غیرخطی با هندسه‌ی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از تشدید فوق هارمونیک در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه پرداخته شد. فرکانس تشدید فوق هارمونیک کسری از فرکانس طبیعی سیستم است. تحریک‌های خارجی که در محیط پیرامونی وجود دارند اکثراً دارای فرکانس پایینی می‌باشند به همین دلیل احتمال وقوع

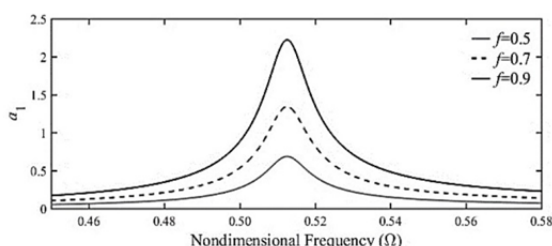


Fig. 8 Frequency response of the superharmonic resonance for the bistable energy harvesting system with different excitation amplitudes

شکل 8 نمودار پاسخ فرکانسی سیستم با پایداری دوگانه در حالت تشدید فوق هارمونیک با دامنه تحریک متفاوت

$$2\Omega = \omega_n + \varepsilon\sigma \quad (33)$$

در معادلات بی‌بعدی که در این قسمت استفاده شده، $\omega_n = 1$ است. با در نظر گرفتن تحریک فوق هارمونیک در سیستم با پایداری دوگانه معادله‌ی (34) برقرار است.

$$2\Omega T_0 = (1 + \varepsilon\sigma)T_0 = T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = T_0 + \sigma T_1 \quad (34)$$

در حالت تشدید فوق هارمونیک ضرایب جملات سکولار به‌صورت معادله‌ی (35) است.

$$2i(\dot{A}_1 + \bar{\mu}A_1) + \frac{\bar{\chi}\kappa A_1 i}{i + \lambda} + \frac{3}{2}\sqrt{\alpha_b}F_1^2 e^{i\sigma T_1} \quad (35)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب جملات سکولار مقدار ضریب A_1 محاسبه می‌شود.

$$2i(\dot{A}_1 + \bar{\mu}A_1) + \frac{\bar{\chi}\kappa A_1 i}{i + \lambda} + \frac{3}{2}\sqrt{\alpha_b}F_1^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (36)$$

معادله‌ی (36) یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول است که پاسخ آن در معادله‌ی (37) آمده است.

$$A_1 = a_0 e^{-(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)})T_1} + \frac{3i\sqrt{\alpha_b}F_1^2}{4(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)} + i\sigma)} e^{i\sigma T_1} \quad (37)$$

و در این حالت با گذشت زمان مقدار $a_0 e^{-(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)})T_1}$ به سمت صفر میل می‌کند و پاسخ حالت ماندگار معادله‌ی (37) به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (38) است.

$$A_1 = \frac{3i\sqrt{\alpha_b}F_1^2}{4(\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(i+\lambda)} + i\sigma)} e^{i\sigma T_1} \quad (38)$$

معادله‌ی (38) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی را در حالت ماندگار نشان می‌دهد. و در نهایت پاسخ حالت ماندگار سیستم با پایداری دوگانه با استفاده از روش تئوری اغتشاشات در معادله‌ی (39) بیان شده است.

$$x = a_1 \sin(2\Omega t - \gamma) + \frac{f}{1 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (39-a)$$

$$a_1 = \frac{3\sqrt{\alpha_b}f^2}{8(1 - \Omega^2)^2 \left((\bar{\mu} + \frac{\bar{\chi}\kappa\lambda}{2(1+\lambda^2)})^2 + (\sigma - \frac{\bar{\chi}\kappa}{2(1+\lambda^2)})^2 \right)^{1/2}} \quad (39-b)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2\sigma(1 + \lambda^2) - \bar{\chi}\kappa}{2\bar{\mu}(1 + \lambda^2) + \bar{\chi}\kappa\lambda} \right) \quad (39-c)$$

میزان ولتاژ خروجی در رابطه‌ی (40) آمده است.

$$v = a_2 [4\Omega \sin(2\Omega t - \gamma) + 2\lambda \cos(2\Omega t - \gamma)] + a_3 [\Omega \cos(\Omega t) - \lambda \sin(\Omega t)] + O(\varepsilon) \quad (40-a)$$

$$a_2 = \frac{-a_1 \kappa \Omega}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)} \quad (40-b)$$

$$a_3 = \frac{f \kappa \Omega}{(\Omega^2 - 1)(\lambda^2 + \Omega^2)} \quad (40-c)$$

با استفاده از معادله‌ی (38) پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی در "شکل‌های 7 و 8" رسم شده است. "شکل 7" پاسخ فرکانسی سیستم برداشت انرژی را در حالت تشدید فوق هارمونیک با پایداری دوگانه نشان می‌دهد در واقع در این شکل میزان دامنه‌ی a_1 رسم شده است. در این حالت دامنه تحریک خارجی f برابر 0.7 در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در نمودار مشخص است در نزدیکی فرکانس فوق هارمونیک میزان a_1 افزایش زیادی دارد و سبب افزایش انرژی برداشت شده خواهد شد. همچنین با توجه به نمودار "شکل 7" مشاهده می‌شود که در سیستم با پایداری دوگانه نیز با افزایش ضریب سفتی غیرخطی سیستم، میزان بیشینه‌ی دامنه افزایش می‌یابد و در نتیجه انرژی الکتریکی به‌دست آمده از سیستم افزایش خواهد یافت.

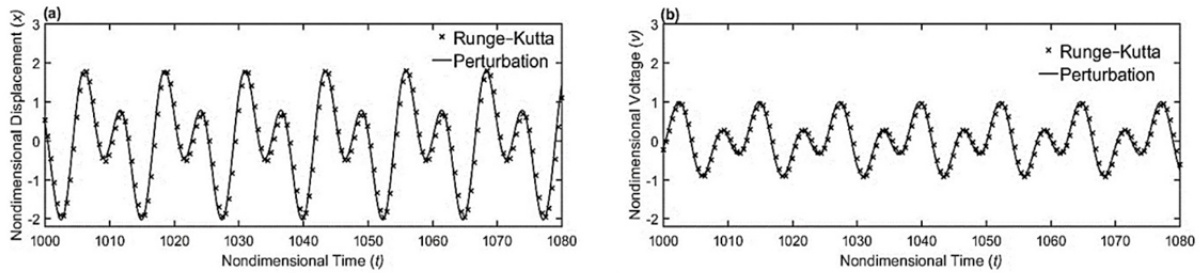


Fig. 9 Time history in the bistable mode for the superharmonic resonance ($\Omega \approx \omega_n/2$): (a) dimensionless displacement and (b) dimensionless voltage

شکل 9 پاسخ زمانی در حالت پایداری دوگانه به فرکانس تحریک فوق هارمونیک ($\Omega \approx \omega_n/2$) (a) جابه‌جایی بی‌بعد (b) ولتاژ بی‌بعد

جدول 2 مقایسه ولتاژ خروجی

Table 2 Comparison of the output voltage

تحریک خارجی	بیشینه‌ی مقدار ولتاژ خروجی با روش مقیاس چندگانه	مقدار موثر ولتاژ خروجی با روش مقیاس چندگانه	مقدار موثر ولتاژ خروجی با روش حل عددی
تحریک فوق هارمونیک در حالت پایداری یگانه $\Omega \approx \omega_n/3$	0.5795	0.3143	0.3048
تحریک فوق هارمونیک در حالت پایداری دوگانه $\Omega \approx \omega_n/2$	0.9932	0.5422	0.5343

$$w(x, t) = \phi(x)r(t) \quad (42)$$

شکل $\phi(x)$ مود اول تیر یکسر گیردار با تغییر در سطح مقطع و جرمی در نوک تیر است. انتگرال‌های معادله‌ی (43) برای بیان بهتر معادلات در ادامه تعریف شده است.

$$\begin{aligned} \Phi_{20}^L &= \int_0^L \phi(x)^2 dx, \quad \Phi_{20}^{L_1} = \int_0^{L_1} \phi(x)^2 dx, \\ \Phi_{22}^L &= \int_0^L \phi''(x)^2 dx, \quad \Phi_{22}^{L_1} = \int_0^{L_1} \phi''(x)^2 dx \\ \Phi_{10}^L &= \int_{10}^L \phi(x) dx, \quad \Phi_{10}^{L_1} = \int_{10}^{L_1} \phi(x) dx \\ \Phi_{12}^{L_1} &= \int_0^{L_1} \phi''(x) dx \end{aligned} \quad (43)$$

L طول تیر و L_1 طول المان پیزوالکتریک است. انرژی الکتریکی و

پتانسیل این سیستم در معادله‌ی (44) آمده است.

$$W_e - V = \iiint -\frac{1}{2} c_{ij} S_i S_j + e_{ij} E_i S_j + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j - G(w_{end}(t)) \quad (44)$$

c_{ij} ضریب سفتی، e_{ij} ثابت پیزوالکتریک، E_i بردار میدان الکتریکی، S_i کرنش خطی درونی تیر که بر اثر خمش موجود در آن به وجود می‌آید، ϵ_{ij} ثابت ذخیره‌سازی پیزوالکتریک در کرنش صفر و $G(w_{end}(t))$ پتانسیل مغناطیسی آهنرباهای ثابت است که به صورت تجربی به دست آمده است. نیروی مغناطیسی به صورتی که در معادله‌ی (45) بیان شده در نظر گرفته می‌شود.

$$f = -a_m w_{end} + b_m w_{end}^3 \quad (45)$$

a_m و b_m ضرایب نیروی مغناطیسی می‌باشند که با توجه به میزان فاصله و شدت آهنرباها روی پایه تغییر می‌کنند. در نتیجه پتانسیل مغناطیسی سیستم به صورتی که در معادله‌ی (46) آمده است، می‌باشد.

$$G(w_{end}(t)) = -\frac{a_m}{2} w_{end}^2 + \frac{b_m}{4} w_{end}^4 \quad (46)$$

مدول یانگ تیر به صورت Y_s و مدول یانگ پیزوالکتریک به صورت Y_p نمایش داده شده است. گشتاور دوم سطح تیر با I_s و گشتاور دوم سطح المان پیزوالکتریک با I_p نمایش داده می‌شود. پس از ساده‌سازی معادله‌ی

تشدید فوق هارمونیک نسبت به تشدید اولیه بسیار بیشتر است و از این رو بررسی تحریک فوق هارمونیک بسیار با اهمیت است.

در این مقاله پاسخ سیستم به تحریک فوق هارمونیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمد. به منظور اعتبارسنجی، مقایسه‌ی بین روش نیمه تحلیلی و حل عددی برای حالات مختلف در حالت ماندگار ارائه شد و نشان داده شد که حل نیمه تحلیلی دارای دقت مناسبی است.

جابه‌جایی نوک تیر و ولتاژ خروجی سیستم در دو حالت پایداری یگانه و پایداری دوگانه در برابر تحریک فوق هارمونیک به دست آمد. همچنین مقدار موثر ولتاژ در حالات مختلف محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از تشدید فوق هارمونیک برای سیستم‌های برداشت انرژی بسیار مفید است. همچنین میزان انرژی برداشت شده در سیستم با پایداری دوگانه بیشتر از سیستم با پایداری یگانه است و در نتیجه استفاده از سیستم‌هایی با پایداری چندگانه برای برداشت انرژی با فرکانس تحریک فوق هارمونیک پیشنهاد می‌شود.

6- پیوست

در این قسمت معادله‌ی حاکم بر سیستم برداشت انرژی پیزومگنتوالاستیک با استفاده از روش انرژی به دست می‌آید. انرژی‌های مختلف سیستم پیزومگنتوالاستیک شامل: انرژی پتانسیل الاستیک تیر و انرژی مغناطیسی آهنرباها (V)، انرژی الکتریکی ذخیره شده در پیزوالکتریک (W_e)، انرژی جنبشی موجود در تیر و جرم انتهایی آن (T)، انرژی پتانسیل مغناطیسی بین آهنرباها (G) و انرژی‌های تلف شونده به وسیله‌ی مقاومت‌ها و میراگرها می‌باشد. جابه‌جایی تیر و راستای اتصال تیر و پیزوالکتریک به عنوان مختصات برای سیستم در معادلات استفاده شده است [15].

با استفاده از روش بیان شده در مرجع [20] لاگرانژین سیستم در معادله‌ی (41) آمده است.

$$L_g = T - V + W_e \quad (41)$$

جابه‌جایی هر نقطه در هر زمان به صورت بیان شده در معادله‌ی (42) در نظر گرفته می‌شود.

7- مراجع

- [1] S. Gregori, Y. Li, H. Li, J. Liu, et al., 2.45 GHz power and data transmission for a low-power autonomous sensors platform, *Proceedings of the International Symposium on Low Power Electronics and Design*, Newport Beach, USA, August 9-11, 2004.
- [2] Y. Hou, Y. Zhou, L. Yang, Q. Li, et al., Flexible ionic diodes for low-frequency mechanical energy harvesting, *Advanced Energy Materials*, Vol. 7, No. 5, pp. 1983-1989, 2017.
- [3] S. P. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. G. Jones, et al., A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 1257-1265, 2007.
- [4] R. L. Harne, K. W. Wang, A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 23001-23012, 2013.
- [5] L. Beker, A. Benet, A. T. Meybodi, B. Eovino, et al., Energy harvesting from cerebrospinal fluid pressure fluctuations for self-powered neural implants, *Biomedical Microdevices*, Vol. 19, No. 2, pp. 31-39, 2017.
- [6] S. Roundy, On the effectiveness of vibration-based energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 16, No. 10, pp. 809-823, 2005.
- [7] D. Shen, S. Y. Choe, D. J. Kim, Analysis of piezoelectric materials for energy harvesting devices under high-g vibrations, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 46, No. 10R, pp. 6755-6760, 2007.
- [8] M. Umeda, K. Nakamura, S. Ueha, Analysis of the transformation of mechanical impact energy to electric energy using piezoelectric vibrator, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 35, No. 5S, pp. 3267-3273, 1996.
- [9] J. Ajitsaria, S. Y. Choe, D. Shen, D. J. Kim, Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 2, pp. 447-454, 2007.
- [10] M. Asgharzadeh, K. Jahani, A. Kianpoor, M. H. Sadeghi, Energy harvesting investigation from unimorph trapezoidal beam vibrations using distributed parameters method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 96-102, 2015. (in Persian)
- [11] M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, D. Dane Quinn, On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 66, No. 4, pp. 801-823, 2014.
- [12] Z. Yang, Y. Zhu, J. Zu, Theoretical and experimental investigation of a nonlinear compressive-mode energy harvester with high power output under weak excitations, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 25028-25041, 2015.
- [13] K. Jahani, P. Aghazadeh, Investigating the performance of piezoelectric energy harvester including geometrical damping and material nonlinearities with the method of multiple scales, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 354-360, 2016. (in Persian)
- [14] S. Roundy, P. K. Wright, J. Rabaey, A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes, *Computer Communications*, Vol. 26, No. 11, pp. 1131-1144, 2003.
- [15] M. A. Karami, D. J. Inman, Equivalent damping and frequency change for linear and nonlinear hybrid vibrational energy harvesting systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 23, pp. 5583-5597, 2011.
- [16] S. Leadenham, A. Erturk, Nonlinear M-shaped broadband piezoelectric energy harvester for very low base accelerations: primary and secondary resonances, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, No. 5, pp. 55021-55034, 2015.
- [17] R. L. Harne, K. W. Wang, On the fundamental and superharmonic effects in bistable energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 25, No. 8, pp. 937-950, 2014.
- [18] F. C. Moon, P. J. Holmes, A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 65, No. 2, pp. 275-296, 1979.
- [19] A. Erturk, D. J. Inman, *Piezoelectric Energy Harvesting*, pp. 233-271, New York: Wiley, 2011.
- [20] A. Preumont, *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, pp. 112-167, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [21] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 161-203, New York: Wiley, 1979.
- [22] M. A. Karami, P. S. Varoto, D. J. Inman, Analytical approximation and experimental study of bi-stable hybrid nonlinear energy harvesting system, *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Washington, USA, August 28-31, 2011.
- (44)، انرژی الکتریکی و پتانسیل سیستم به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (47) تبدیل می‌شود.
- $$W_e - V = -\frac{b_m \phi(L)^4}{4} r(t)^4 - \left\{ -\frac{a_m \phi(L)^2}{2} + \frac{1}{2} Y_s I_s \Phi_{22}^L + Y_p I_p \Phi_{22}^{L_1} \right\} r(t)^2 + \frac{2A_p Z_p \Phi_{22}^{L_1} e_{13}}{h_p} \dot{\lambda}_1(t) r(t) + \frac{\epsilon_{33} A_p L_1}{h_p^2} \dot{\lambda}_1(t) \quad (47)$$
- $\lambda_1(t)$ شار اتصال پیزوالکتریک، A_p سطح مقطع پیزوالکتریک، h_p ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک و Z_p فاصله‌ی پیزوالکتریک تا تار خشی است. انرژی جنبشی سیستم در معادله‌ی (48) آمده است.
- $$T = \left[\frac{1}{2} \rho_s A_s \Phi_{20}^L + \rho_p A_p \Phi_{20}^{L_1} + \frac{1}{2} M_{tip} \phi(L)^2 \right] \dot{r}(t)^2 + [\rho_s A_s \Phi_{10}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{10}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)] \dot{R}(t) \dot{r}(t) + \frac{1}{2} [M_{tip} + M_s + 2M_p] \dot{R}(t)^2 \quad (48)$$
- R جابه‌جایی پایه‌ی سیستم، A_s سطح مقطع تیر الاستیک، ρ_s چگالی تیر استیل و ρ_p چگالی پیزوالکتریک می‌باشد. جرم تیر M_s ، جرم پیزوالکتریک M_p و جرم آهنربای متصل به نوک تیر با M_{tip} نشان داده شده است.
- $$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial u} = d \dot{r} \quad (49-a)$$
- $$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial \lambda_1} = -\frac{\dot{\lambda}}{R_1} \quad (49-b)$$
- میرایی سیستم مکانیکی با d نمایش داده شده است. پس از انجام مشتق‌ها در معادله‌ی (49) معادله‌ی حاکم بر سیستم به‌صورت بیان شده در معادله‌ی (50) حاصل می‌شود [15].
- $$m \ddot{r} + d \dot{r} + K r + \bar{b} r^3 + \bar{\psi}_1 V_1 = -\bar{m} \ddot{R}(\tau) \quad (50-a)$$
- $$\dot{V}_1 + \frac{V_1}{R_1 C_0} - \frac{\bar{\psi}_2}{C_0} \dot{r} = 0 \quad (50-b)$$
- ضرایب معادله‌ی (50) در رابطه‌ی (51) بیان شده است.
- $$m = \rho_s A_s \Phi_{20}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{20}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)^2$$
- $$\bar{m} = \rho_s A_s \Phi_{10}^L + 2\rho_p A_p \Phi_{10}^{L_1} + M_{tip} \phi(L)$$
- $$K = -a_m \phi(L)^2 + Y_s I_s \Phi_{22}^L + 2Y_p I_p \Phi_{22}^{L_1}$$
- $$\bar{b} = b_m \phi(L)^4, C_0 = \frac{\epsilon_{33} A_p L_1}{h_p^2}$$
- $$\bar{\psi}_1 = -\frac{2A_p Z_p \Phi_{22}^{L_1} e_{13}}{h_p}, \bar{\psi}_2 = m \bar{\psi}_1 \quad (51)$$
- تحریک خارجی به‌صورت هارمونیک که در معادله‌ی (52) بیان شده، در نظر گرفته می‌شود.
- $$\bar{m} \ddot{R}(t) = F \cos(\omega \tau) \quad (52)$$