



مدل سازی عددی جریان ورودی به مخزن با بستر خشک با استفاده از الگوریتم پخش موج اصلاح شده

صادق مودی¹، حسین مهدیزاده^{2*}

1- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* بیرجند، صندوق پستی 615/97175، hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

چکیده

در این مقاله از یک مدل پخش موج تغییر یافته گودونو برای مدل سازی سقوط جریان آزاد آب بروی سطح خشک استفاده می گردد. مدل مورد نظر یک مدل خوش توازن بوده و قادر به رفتار کردن مؤلفه های منبع جریان ورودی/خروجی به بستر و همچنین مؤلفه های اصطکاک در داخل تفاوت شارهای مجاور روش حجم محدود می باشد. علاوه بر این، روش مورد نظر از نوعی سرعت تقریبی جدید ریمان برای پخشیدگی بر روی سطح خشک استفاده می نماید. در ابتدا جریان ورودی از کف به مخزن به صورت جت آزاد مورد بررسی قرار می گیرد. سپس ورود جریان آب به حالت سقوط آزاد و از وسط و دو کناره مخزن بر روی سطح خشک شبیه سازی می گردد. جهت مشخص نمودن اعتبار مدل عددی ارائه شده برای فشارهای غیرهیدرواستاتیک، از یک عدد بدون بعد بر اساس سرعت ورودی، طول دهانه و ارتفاع سقوط استفاده گردیده است. نتایج حاصله از روش عددی معرفی شده با نتایج حاصله از نرم افزار استار سی دی که یک نرم افزار تجاری حل معادلات ناویر-استوکس است، مقایسه گردیده است. نتایج عددی نشان می دهد که الگوی عددی شار موج معرفی شده با مؤلفه های تقریبی جدید سرعت، قادر به شبیه سازی سقوط برای سطح خشک برای محدوده معرفی شده عدد بی بعد می باشد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 اسفند 1396

پذیرش: 12 فروردین 1397

ارائه در سایت: 30 فروردین 1397

کلید واژگان:

مدل سازی عددی

الگوریتم پخش موج

معادلات آب های کم عمق

نرم افزار استار سی دی

Numerical Modeling of Water Influx Falling into an Empty Tank using a Modified Wave Propagation Algorithm

Sadegh Moodi¹, Hossein Mahdizadeh^{2*}

1- Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

2- Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

* P.O.B. 615/97175, Birjand, Iran, hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 March 2018
Accepted 01 April 2018
Available Online 19 April 2018

Keywords:

Numerical Modeling
Wave Propagation Algorithm
Shallow Water Equations
STAR-CD software

ABSTRACT

In this paper a modified Godunov-type wave propagation algorithm is utilised for the modelling of falling water wave over a dry bed. The defined numerical model is well-balanced and is capable to treat the influx/efflux source terms and also the friction term within the flux-differencing of the finite volume neighbouring cells. Additionally, the method employs a rather simple HLLE wave speed for the propagation over dry-state. First the efflux flow from the bed of a reservoir is analyzed. Then, the entrance of falling water wave from the middle and edge sides of the reservoir over a dry bottom is simulated. In order to validate the achieved numerical results for the non-hydrostatic pressure situations a dimensionless number based upon the inflow velocity, the slot length and the falling height is introduced. The obtained results of the defined numerical solver are then compared with the numerical prediction of the STAR-CD which is a commercial Navier-Stokes package. The numerical results demonstrate that the introduced flux-wave solver is able to simulate the falling water waves over the dry-state for a given range of the dimensionless number.

می توان پدیده های پیچیده فیزیکی را با دقت قابل قبولی شبیه سازی و بررسی نمود. البته انتخاب روش صحیح مدل سازی و مهارت در ایجاد برنامه های مناسب برای هر پدیده، امری لازم و در برخی موارد بسیار پیچیده می باشد. در پژوهش حاضر به بررسی جریان آب هنگام ورود به یک مخزن با بستر خشک و ابعاد مشخص در سه حالت مختلف پرداخته می شود. هنگام ورود آب به مخزن، حالت های پیچیده ای از جریان رخ می دهد که از نظر مدل سازی

1- مقدمه

یکی از چالش های مهم در علوم مهندسی، بررسی دقیق پدیده های فیزیکی می باشد که این امر با توجه به محدودیت های آزمایشگاهی و هزینه بر بودن آن و همچنین وجود خطا در آزمایش ها، به طور صحیح امکان پذیر نخواهد بود. از مؤثرترین و دقیق ترین روش ها به منظور مدل سازی پدیده های فیزیکی، می توان به مدل سازی عددی اشاره نمود. با استفاده از مدل سازی عددی

هیدرولیکی به دلیل وجود مکانیزم های مختلف جریان بسیار پیچیده است. همچنین پخش جریان آب در مخزن به روی سطح خشک و وجود اصطکاک سطوح و فشار هوا بر این پیچیدگی می افزاید.

در حالت کلی، مدل سازی این گونه جریان ها تنها با حل معادلات ناویر-استوکس و در حالت سه بعدی امکان پذیر می باشد که بسیار پیچیده و زمان بر است. بدین منظور می توان از معادلات آب های کم عمق استفاده نمود. معادلات آب های کم عمق یک سیستم از معادلات هذلولی در حالت بقا می باشند که در تحلیل جریان های با سطح آزاد در شرایطی که عمق جریان در مقابل پهنای آن ناچیز است، مورد استفاده قرار می گیرند. در حالتی که فرض فشار هیدرواستاتیک برای مساله مورد حل صادق باشد، می توان از این معادلات به صورت مناسبی به جای معادلات ناویر-استوکس استفاده نمود.

جواب های عددی بسیار زیادی برای معادلات آب های کم عمق غیر خطی بر پایه روش حجم محدود در طول سال ها گسترش یافته است. کارایی روش های نوع گودونو¹ برای تسخیر موج ایستا با استفاده از حل کننده های ریمان تقریبی اثبات شده است [1,2]. از جمله روش های خوب موازنه شده دیگری که در گذشته پیشنهاد شده اند می توان به حل کننده خوب موازنه شده پیشنهاد شده توسط اودوسه و همکاران [3] اشاره نمود. لیانگ و مارک [4] نیز روش جدیدی تعریف نمودند که یک مجموعه از معادلات حاکم از پیش موازنه شده را با استفاده از حل کننده ریمان [5] حل می نماید.

در اینجا از یک نسخه از الگوریتم پخش موج به نام روش موج شار که در [5] تعریف شده است، استفاده می شود. این روش برای کنترل مؤلفه های منبع در عین حفظ مشخصات باقی بسیار مناسب می باشد. این روش بعدها با استفاده از ترکیبی از حل کننده های ریمان دقیق و تقریبی به منظور برطرف نمودن بعضی محدودیت های روش موج شار گسترش یافت [6].

بورداریاس و همکاران در سال 2007 روش جدیدی برای شبیه سازی جریان های مختلط و پدیده های مرتبط با آن با استفاده از روش های حجم محدود ارائه نمودند [7]. در سال 2010 مهدیزاده و همکاران، جریان خروجی از شبکه فاضلاب اشباع و پخش آن روی سطح خشک و تر و برهم کنش آن با جریان سیلاب را با استفاده از معادلات آب های کم عمق یک بعدی مدل سازی نمودند. آن ها یک سرعت اصلاح شده برای موج به منظور ایجاد قابلیت شبیه سازی روی سطح خشک یا تقریباً خشک ارائه و نتایج حاصل را با نتایج معادلات ناویر-استوکس مقایسه نمودند [8]. آن ها در سال 2012 روش آب های کم عمق را به حالت دوبعدی شامل مؤلفه های منبع برای لوله ها به صورت ورودی یا خروجی، اصطکاک بستر و گرادیان عمق سنجی گسترش داده و حل کننده شبکه لوله را با جریان سطح آزاد ترکیب نمودند. همچنین پخش جریان ناشی از شکست سد دوبعدی روی سطح خشک و برهم کنش آن با دبی خروجی از مجرای ورودی را مدل سازی نمودند [9]. کِسروانی و همکاران در سال 2015 با استفاده از معادلات آب های کم عمق با عمق متوسط، جریان سیلاب را مدل سازی نمودند که در آن جریان آب خروجی از مجرا به روی سطح زمین به عنوان یک مؤلفه منبع اضافی در نظر گرفته شد. آن ها از یک روش تسخیر موج ایستای حجم محدود برای حل معادلات آب های کم عمق بر روی یک شبکه دوبعدی غیر یکنواخت مطابق مدل فیزیکی استفاده و نتایج عددی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند [10]. حقیقی و همکاران در سال 2016، به مقایسه دو روش لَیس-بولتزمن² و کِرَنک-
¹ Godunov-type methods
² HLL
³ Lattice-Boltzmann

نیکلسون⁴ محلی تغییر یافته برای حل معادلات غیر خطی و یک بعدی برگر⁵ در حالت گذار پرداختند [11]. معادلات برگر، یک نوع ساده شده از معادلات ناویر-استوکس می باشند. آن ها همچنین در سال 2017، از روش عددی تفاضل محدود به منظور حل معادلات حاکم بر شرایط اولیه و مرزی استفاده کردند. سپس با جایگذاری محاسبات انجام شده در معادلات اصلی، به شبیه سازی جریان میکروپلار در رگ گرفته شده مخروطی نامتقارن پرداختند [12]. در همان سال، مودی و همکاران جریان آب ورودی به یک مخزن با بستر مرطوب را بررسی کردند. آن ها با استفاده از یک الگوریتم پخش موج اصلاح شده و معادلات آب های کم عمق، این جریان را به صورت عددی مدل سازی نموده و نتایج را با خروجی های نرم افزار استار سی دی⁶ مقایسه کردند [13]. همچنین مهدیزاده و همکاران با استفاده از معادلات آب های کم عمق و روش [5] ال ال سی به مدل سازی برخورد دو جریان سیلاب در یک مقطع مستطیلی پرداخته و نتایج را با نتایج معادلات ناویر-استوکس مقایسه نمودند [14]. سپس برزگران و همکاران با استفاده از یک روش حجم محدود نوع گودونو و معادلات آب های کم عمق و معادلات رسوب، به مدل سازی رسوب بستر پرداخته و خروجی حل خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند [15].

هدف اصلی در مقاله حاضر مدل سازی یک بعدی جریان در داخل مخزن در سه حالت می باشد به طوری که با صرف وقت و هزینه بسیار کمتر، همخوانی قابل قبولی میان نتایج آن با نتایج معادلات پیچیده ناویر-استوکس در حالت سه بعدی برقرار باشد. طبق اطلاعات نویسندگان این مقاله، تاکنون معادلات آب های کم عمق با مدلی که قابلیت شبیه سازی جریان را به صورت سقوط آزاد بر روی یک سطح خشک داشته باشد، ارائه نگردیده است. تفاوت این پژوهش با مقاله ارائه شده در [13] این است که در آن مقاله، پخش جریان آب در یک مخزن با بستر مرطوب ارائه شده است. این در حالی است که مشکل اصلی در مدل سازی این گونه جریان ها، در مواجهه با بستر خشک می باشد چرا که تعریف بستر خشک با ارتفاع آب صفر امکان پذیر نبوده و باعث واگرایی مدل می گردد. از دیگر نوآوری های این پژوهش این است که برای هر کدام از حالت ها، یک عدد بدون بعد بر اساس ارتفاع سقوط، اندازه دهانه ورودی و سرعت جریان ورودی به مخزن تعریف شده است که شرایط اعتبار مدل حاضر را برای فشارهای غیر هیدرواستاتیک نشان می دهد. برای این منظور آزمایش های مختلفی با تغییر این پارامترها توسط نویسندگان انجام شده است که نتیجه آن ها، معرفی یک محدوده برای عدد بی بعد می باشد به طوری که اگر مشخصات یک مخزن بعد از محاسبه بر طبق فرمول ارائه شده برای عدد بی بعد، در این بازه قرار بگیرد، مطابقت بیشتری میان نتایج نرم افزاری حل معادلات ناویر-استوکس و برنامه کامپیوتری نوشته شده بر اساس معادلات آب های کم عمق به دست خواهد آمد. به منظور واری نتایج به دست آمده در این تحلیل، از نرم افزار استار سی دی استفاده شد که یک حل کننده معادلات ناویر-استوکس می باشد. لازم به ذکر است برای مدل سازی جریان آزاد توسط معادلات ناویر-استوکس و در روش حجم محدود از الگوریتم واد⁷ استفاده می گردد. به طور کلی روش مذکور یک تکنیک برای مدل سازی مسائل دارای سطح آزاد یا سطح مشترک سیال-سیال می باشد. علاوه بر این در اینجا برای مدل سازی جریان سطح آزاد بر روی بستر خشک، از سرعت های [5] ال ال ای استفاده گردیده است که نسبت به سرعت های

⁴ Crank-Nicolson⁵ Burger⁶ STAR-CD⁷ VOF (Volume of Fluid)

ارائه شده در [9] از سادگی بیشتر و زمان محاسباتی کمتری برای مسائل مرتبط با سقوط برخوردار می باشد.

در ادامه این مقاله، ابتدا به معرفی معادلات آب های کم عمق و الگوریتم پخش موج پرداخته می شود. سپس روش های اِچ ال ال ای¹ و موج شار مورد بررسی قرار می گیرند. در انتها نیز سه حالت ورود آب به مخزن بررسی گردیده و نتایج ارائه می شوند.

2- معادلات آب های کم عمق

به طور کلی معادلات آب های کم عمق، بقای جرم و مومنوم را بیان می نمایند. شکل ناهمگن این معادلات را می توان به صورت زیر نوشت [1,2]:

$$U_t + F(U)_x = S, \quad (1\text{-الف})$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (1\text{-ب})$$

که U بردار مجهولات، $F(U)$ بردار شار، S بردار مؤلفه های منبع، ϕ_1 و ϕ_2 مؤلفه های منبع در معادلات پیوستگی و مومنوم، g شتاب ثقلی، u سرعت افقی در عمق متوسط و h و p به ترتیب عمق کلی آب و چگالی آب می باشند.

مؤلفه های منبع در معادله (1-ب) به صورت زیر نوشته می شوند [1,2]:

$$\phi_1 = \omega, \quad (2\text{-الف})$$

$$\phi_2 = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} - \omega u_{bed}, \quad (2\text{-ب})$$

که z_b تراز بستر و u_{bed} سرعت افقی در بستر است. هم چنین τ_{fx} تنش برشی بستر در جهت افقی می باشد که عبارت است از: $\tau_{fx} = C_f \rho u |u|/2$ و در آن C_f ضریب اصطکاک بستر و u مانند قبل، سرعت در عمق متوسط می باشد. باید توجه داشت که سرعت محلی افقی در بستر، u_{bed} در سطح جامد و در محل خروج جت، صفر می باشد. بنابراین مؤلفه منبع مومنوم $-\omega u_{bed}$ ، صفر خواهد بود. همان طور که ملاحظه می گردد، در روابط مربوط به آب های کم عمق و مؤلفه منبع، $g = 9.8066 \text{ m/s}^2$ به عنوان شتاب در راستای جاذبه عمل می نماید. این بدان معناست که شتاب ثقلی هم در معادله پیوستگی و هم در معادله مومنوم لحاظ می شود که تأثیر آن در موارد مربوط به سقوط آزاد بیشتر مشهود است. به منظور مطالعه دبی خروجی، اطمینان از منفی نشدن عمق و حفظ دقت مدل تحت تأثیر برهم کنش حفره ها، ضروری می باشد.

همان طور که گفته شد، در این پژوهش از الگوریتم پخش موج اصلاح شده استفاده شده است. مزیت این روش در مواجهه با پخش بر روی بستر خشک می باشد. هم چنین این روش مؤلفه های منبع ورودی/خروجی را به سادگی با معادلات پیوستگی ترکیب می نماید.

3- الگوریتم پخش موج و روش های نوع گودونو

الگوریتم پخش موج برای نخستین بار توسط لُوک معرفی شد [16,17]. این الگوریتم در مساله ریمان برای محاسبه مجهولات در گام بعدی از روش های حجم محدود نوع گودونو استفاده می نماید. تنها تفاوت میان الگوریتم پخش موج لُوک و روش اصلی گودونو این است که در روش لُوک، موج های ظاهر شده در جواب های ریمان، دوباره در سلول های مجاور میانگین گیری می شوند در حالی که روش اصلی گودونو از داده های شار در سطح مشترک

برای حل سیستم معادلات 1، شکل اصلاح شده ی الگوریتم پخش موج نوع گودونو استفاده می شود که توسط لُوک مطرح شد [1]:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta U_{i-1/2} + A^- \Delta U_{i+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}) \quad (3)$$

که در آن U_i^n متوسط بردار مجهولات در زمان $t = n\Delta t$ در روش حجم محدود می باشد. مقدار جدید بردار مجهولات در گام زمانی بعدی است. $A^+ \Delta U_{i\pm 1/2}$ نوسانات راست و چپ رونده در جهت x می باشند که با حل مساله ریمان در $x_{i\pm 1/2}$ به دست می آیند. درواقع مؤلفه $A^+ \Delta U_{i-1/2}$ بیانگر به روزرسانی درجه اول گودونو برای موج های راست رونده از مساله ریمان در گوشه $i - 1/2$ می باشد. $A^- \Delta U_{i+1/2}$ نیز به روزرسانی درجه اول گودونو برای موج های چپ رونده در گوشه $i + 1/2$ را نشان می دهد. $\bar{F}_{i\pm 1/2}$ نیز مؤلفه های اصلاح شار می باشند که باعث ایجاد دقت مرتبه دوم می گردند و با حل مساله ریمان در سطح مشترک سلول $x_{i\pm 1/2}$ به دست می آیند. نوسانات راست و چپ رونده را می توان به صورت موج های غیرخطی وارد شونده به سلول $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ به صورت زیر تعریف نمود:

$$A^- \Delta U_{i+1/2} = \sum_{k: S_{k,i-1/2} < 0} \xi_{k,i-1/2}, \quad A^+ \Delta U_{i-1/2} = \sum_{k: S_{k,i-1/2} > 0} \xi_{k,i-1/2} \quad (4)$$

که $\xi_{k,i-1/2} = S_{k,i-1/2} W_{k,i-1/2}$ شار برای هریک از m موج متغیرهای بقا می باشد. $W_{k,i-1/2}$ که $k=1,2,3,\dots,m$ و سرعت موج $S_{k,i-1/2}$ ، برخاسته از سطح مشترک سلول، $i - 1/2$ می باشند. امواج متغیرهای بقا $W_{k,i-1/2}$ را می توان با ضرب ضریب بردار ویژه $\alpha_{k,i-1/2}$ در بردار ویژه به صورت $W_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$ به دست آورد. بنابراین موج شار به شکل $\xi_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} S_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$ درمی آید.

شارهای اصلاحی به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |S_{k,i-1/2}| \right) \xi_{k,i-1/2}. \quad (5)$$

که $\xi_{k,i-1/2}$ شار محدود شده با استفاده از محدودکننده های TVD می باشد [18,19]. m تعداد موج ها است که برای معادلات آب های کم عمق یک بعدی برابر با 2 است. I نیز نشان دهنده ماتریس همانی است. برای جزئیات بیشتر به [2,20] مراجعه شود.

حل کننده های ریمان تقریبی مانند روش اِچ ال ال ای [21] و روش موج شار توضیح داده شده در [8]، به منظور حل الگوریتم پخش موج استفاده شده اند [2,22]. این روش به منظور اعمال مؤلفه های منبع در معادله پیوستگی با سرعت های اصلاح شده به منظور ارتقای کارایی بر روی سطوح خشک یا تقریباً خشک مورد استفاده قرار گرفته است.

4- روش اِچ ال ال ای برای معادلات آب های کم عمق

روش اِچ ال ال ای برای اولین بار توسط اینفلد تعریف شد [21]. این روش

¹ HLLC

بقای مومنوم حضور داشتند و بنابراین در تفاضل شار شرکت داده می شدند. مهدیزاده [24] این روش را به منظور کنترل مؤلفه های منبع در معادله پیوستگی، ارتقا داد. برای معادلات آب های کم عمق ناهمگن، مؤلفه های منبع شامل مؤلفه منبع خروجی در سطح مشترک $i - 1/2$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$S_{i-1/2} = \left[-\frac{\omega_{i-1/2}}{\rho} - gh_{i-1/2} \frac{\Delta z_b}{\Delta x} \right], \quad (12)$$

که $h_{i-1/2} = (h_i + h_{i-1})$ و $\omega_{i-1/2}$ سرعت ورودی/خروجی در سطح مشترک سلول می باشد. مؤلفه $-gh_{i-1/2} \Delta z_b / \Delta x$ نشان دهنده خطای عمق سنجی می باشد که در معادله (1-الف) تعریف شده است. Δz_b در معادله (12) به طور تقریبی برابر $(z_{bi} - z_{b_{i-1}})$ و Δx طول سلول می باشد. در روش موج شار، مؤلفه های منبع را می توان در تفاضل شار سلول های مجاور برای محاسبه ساختار موج سهیم نمود. به منظور محاسبه موج های شار در هر سطح مشترک سلول بایستی بر اساس مؤلفه های ورودی/خروجی و مؤلفه های منبع در معادله مومنوم، ضرایب مربوطه به دست آیند. با جایگزینی شارها و مؤلفه منبع، موج های شار و ضرایب به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{bmatrix} h_i u_i - h_{i-1} u_{i-1} - \Delta x \omega_{i-1/2} \\ \left(h_i u_i^2 + \frac{1}{2} g h_i^2 \right) - \left(h_{i-1} u_{i-1}^2 + \frac{1}{2} g h_{i-1}^2 \right) \\ + \Delta x \frac{\tau_{fx}}{\rho} + \frac{1}{2} g (h_{i+1} + h_i) (z_{bi} - z_{b_{i-1}}) \end{bmatrix} = \beta_{1,i-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ S_{1,i-1/2} \end{bmatrix} + \beta_{2,i-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ S_{2,i-1/2} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

ضرایب $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ به شکل زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \beta_{1,i-1/2} &= \frac{SHLE2,i-1/2 \Gamma_1 - \Gamma_2}{SHLE2,i-1/2 - SHLE1,i-1/2}, \\ \beta_{2,i-1/2} &= \frac{-SHLE2,i-1/2 \Gamma_1 + \Gamma_2}{SHLE2,i-1/2 - SHLE1,i-1/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

که

$$\Gamma_1 = h_i u_i - h_{i-1} u_{i-1} - \Delta x \omega_{i-1/2}, \quad (15\text{-الف})$$

$$\Gamma_2 = \left(h_i u_i^2 + \frac{1}{2} g h_i^2 \right) - \left(h_{i-1} u_{i-1}^2 + \frac{1}{2} g h_{i-1}^2 \right) + \Delta x \frac{\tau_{fx}}{\rho} + \frac{1}{2} g (h_{i+1} + h_i) (z_{bi} - z_{b_{i-1}}) \quad (15\text{-ب})$$

مقدار $\Delta x \omega_{i-1/2}$ بسته به علامت $\omega_{i-1/2}$ دبی ورودی یا خروجی نامیده می شود. پس از بدست آوردن ضرایب $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ می توان نوسانات راست و چپ رونده را محاسبه نمود.

توجه به این نکته ضروری است که معادلات آب های کم عمق بر اساس فرض فشار هیدرواستاتیک و چشم پوشی از شتاب عمودی بدست می آیند. قابلیت این تقریب به اعداد محلی تعیین شده بستگی دارد و در نهایت با نتایج یک حل کننده معادلات ناویر-استوکس با محاسبه فشار دینامیک، مقایسه می شود.

7- شرایط مرزی

یکی از مزیت های الگوریتم پخش موج این است که شرایط مرزی را می توان به سادگی برای بسیاری از مسائل، مشخص نمود. الگوریتم پخش موج با مؤلفه های اصلاحی به علت وجود محدود کننده ها، یک الگوی پنج گرهی دارد و بنابراین بایستی در مرزها دو سلول مجازی¹ تعریف نمود. در واقع وجود یک یا دو سلول مجازی، برای روش عددی معرفی شده، قابلیت ایجاد جریان ورودی و

به سادگی از تجزیه موج های شار به امواج به شکل زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} U_i - U_{i-1} &= W_{1,i-1/2} + W_{2,i-1/2} \\ F(U_i) - F(U_{i-1}) &= S_{1,i-1/2} W_{1,i-1/2} \\ &\quad + S_{2,i-1/2} W_{2,i-1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

با جابه جایی طرفین روابط بالا امواج $W_{1,i-1/2}$ و $W_{2,i-1/2}$ به دست می آیند که می توان آن ها را به طور مستقیم برای محاسبه نوسانات در روش گودونو استفاده نمود. سرعت امواج در روش اچ ال ای با مقایسه سرعت مشخصه و سرعت رو محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} S_{1,i-1/2} &= \min(u_{i-1} - \sqrt{gh_{i-1}}, S_{Roe1}) \\ S_{2,i-1/2} &= \max(u_i + \sqrt{gh_i}, S_{Roe2}) \end{aligned} \quad (7)$$

که سرعت های رو برای سطح مشترک سلول $i - 1/2$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} S_{Roe1,i-1/2} &= \tilde{u}_{i-1/2} - \sqrt{g \tilde{h}_{i-1/2}} \\ S_{Roe2,i-1/2} &= \tilde{u}_{i-1/2} + \sqrt{g \tilde{h}_{i-1/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

که

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\sqrt{h_{i-1}} u_{i-1} + \sqrt{h_i} u_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}} \\ \tilde{h} &= \frac{1}{2} (h_{i-1} + h_i) \end{aligned} \quad (9)$$

روش اچ ال ای یک روش عمق مثبت می باشد که می تواند برای معادلات آب های کم عمق همگن مورد استفاده قرار بگیرد. مشکل حل کننده اچ ال ای این است که این روش یک روش موازنه شده نمی باشد. به طور مشخص برای معادلات آب های کم عمق حالت پایدار، این روش نتایج غیر ثابت ایجاد می کند. لذا باید اصلاحات بیشتری برای ایجاد دقت بیشتر انجام گیرد. برای جزئیات بیشتر به [21,23] مراجعه گردد.

5- روش موج شار برای معادلات آب های کم عمق

روش موج شار تعریف شده در [5] به ما اجازه حل برای شارهای پخش موج را می دهد و با استفاده از فرمول های تفاضل شار به دست می آید:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = \sum_{k: S_{k,i-1/2}}^{M_w} \xi_{k,i-1/2} \quad (10)$$

در روش موج شار، $\xi_{k,i-1/2}$ به بردارهای ویژه تجزیه می شود. بنابراین برای معادلات آب های کم عمق یک بعدی داریم:

$$\begin{aligned} F(U_i) - F(U_{i-1}) &= \alpha_{1,i-1/2} S_{1,i-1/2} T_{1,i-1/2} \\ &\quad + \alpha_{2,i-1/2} S_{2,i-1/2} T_{2,i-1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

که $T_{1,i-1/2}$ و $T_{2,i-1/2}$ بردارهای ویژه برای موج های چپ و راست سطح مشترک سلول $i - 1/2$ می باشند. تنها تفاوت میان این روش و حل کننده اصلاح شده اچ ال ای این است که برای روش موج شار فقط موج های شار برای محاسبه موج W در نظر گرفته می شوند و موج های شار به ترکیب خطی بردارهای ویژه تجزیه می شوند. روش موج شار به طور تقریبی، بقایی می باشد. تنها مشکل برای این روش در حالت های با سطح خشک یا تقریباً خشک می باشد که سرعت های رو، جواب های غیر فیزیکی می دهند. که مشکل در برخی حالت ها با انتخاب سرعت اینفلد قابل حل می باشد. به منظور غلبه کامل بر این مشکل از سرعت پیشنهاد شده توسط مهدیزاده [9] استفاده می شود که ترکیبی از سرعت های ریمان تقریبی و دقیق می باشد.

6- لحاظ نمودن مؤلفه های منبع در روش موج شار

در الگوریتم های پخش موج گذشته [1,5]، مؤلفه های منبع تنها در معادلات

¹ Ghost Cell

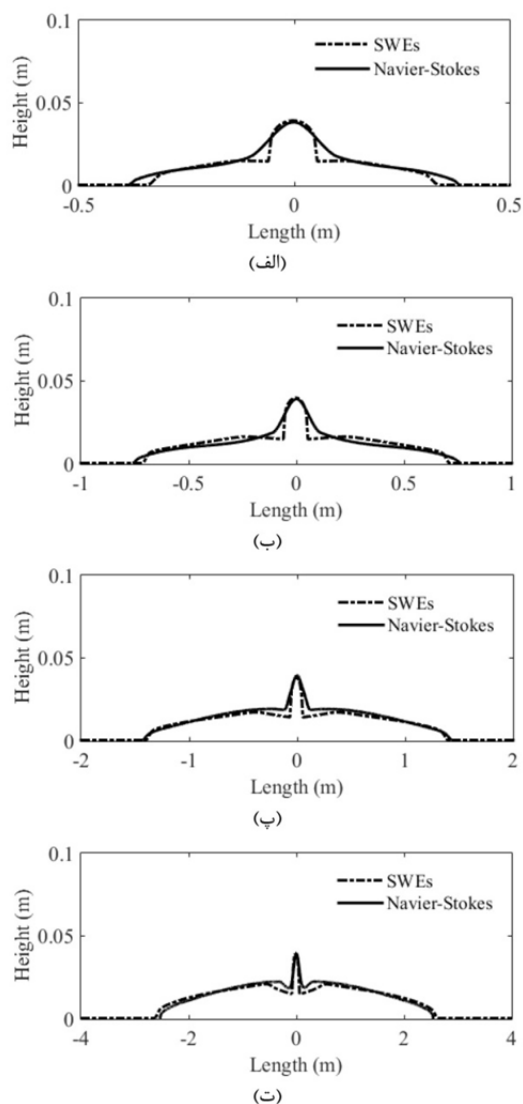


Fig. 1 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from middle and bottom of the bed for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 1 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر -

استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از کف و وسط در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه



Fig. 2 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from middle and bottom of the bed with 0.2m/s speed at 0.5s

شکل 2 نتیجه حاصل از نرم افزار استار سی دی برای ورود آب به مخزن از پایین و وسط با سرعت 0.2 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه

رابطه زیر محاسبه و در جدول 1 ارائه شده است.

$$NORM = \frac{\sqrt{\sum (Y_{Navier-Stokes} - Y_{Shallow\ water})^2}}{n} \quad (18)$$

خروجی به محدوده محاسباتی و همچنین دیوار را فراهم می نماید. با برون یابی مرتبه صفر شرایط مرزی و با برابر قرار دادن U_0 و U_1 به صورت معادله (16)، می توان به شرایط مرزی غیر بازتابی رسید [25]. این به ما اطمینان می دهد که هیچ موجی در حل مساله ریمان ایجاد نمی گردد. با انعکاس داده های داخلی در مرز، یک دیوار مرزی یکپارچه مدل می شود.

$$h_0 = h_1, \quad h_{-1} = h_2 \\ (hu)_0 = (hu)_1, \quad (hu)_{-1} = (hu)_2 \quad (16)$$

8- شرایط پایداری

عدد کورانت برای الگوریتم پخش موج یک بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Cr = \max(s_{k,i-1/2}) \Delta t / \Delta x \quad (17)$$

به منظور تضمین پایداری مدل، این عدد باید کمتر یا مساوی یک باشد که البته این شرط لازم بوده و کافی نیست.

9- نتایج عددی

در اینجا به بررسی سه حالت کلی جریان آب در یک مخزن مستطیلی روباز پرداخته می شود که نتایج عددی حاصل از آن ها با نتایج حاصل از حل معادلات ناویر-استوکس در حالت سه بعدی -بدست آمده از نرم افزار استار سی دی- مقایسه می گردد. جریان در این نرم افزار، سطح آزاد بوده و همان طور که در بخش مقدمه ذکر شد، برای تسخیر این سطح آزاد، از روش حجم سیال (و اف) استفاده می شود. طبق تعریف، هنگامی که سلول خالی باشد یعنی هیچ سیالی در آن نباشد، $VOF = 0$ و در زمان پر بودن سلول، $VOF = 1$ است. هنگامی که سطح مشترک سیال در سلول وجود داشته باشد، $0 < VOF < 1$ می باشد و بنابراین، این مقدار برای هوا و آب به ترتیب برابر صفر و یک و برای سطح مشترک برابر با $VOF = 0.5$ تعریف می شود. همچنین از شرایط مرزی غیر لغزشی در مرزهای جامد و مدل آشفتگی $k-\epsilon$ با عدد رینولدز بالا استفاده شده است.

به منظور برقراری پایداری، برای همه حالت های مورد بررسی، عدد کورانت برابر $Cr=0.5$ می باشد. همچنین برای اجتناب از نتایج غیر فیزیکی، از شرایط آنتروپی هارتن [26] به همراه الگوریتم پخش موج استفاده شده است.

9-1- جریان ورودی به مخزن از کف و وسط

در این حالت جریان آب با سرعت 0.2 متر بر ثانیه از کف مخزن و از فاصله ی بین 0.05 تا 0.05 متر وارد می شود. در این مساله، عدد خروجی¹ با رابطه $EN = V/\sqrt{gl}$ تعریف شده است که در آن، V سرعت خروجی، g شتاب ثقلی و l طول دهانه می باشد که برای این حالت، به صورت $EN = 0.202$ محاسبه می شود. تعداد سلول های مورد استفاده و ضریب اصطکاک به ترتیب برابر 512 و $C_f = 0.012$ در نظر گرفته شده اند. زمان اجرای مدل با پردازنده core i7-3770 و 8 گیگابایت رم، برای معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 46.46 و 569.80 ثانیه می باشد.

شکل های (1-الف)، (1-ب)، (1-پ) و (1-ت) مقایسه نتایج حل با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای عمق و حرکت سیال در مخزن در زمان های مختلف را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می گردد، جت آب از دهانه ورودی به مخزن وارد شده و به صورت متقارن از دهانه دور می شود. در 0.5 ثانیه تفاوت اندکی در نتایج معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس در میزان حرکت جبهه ی آب وجود دارد که این اختلاف در زمان های بالاتر به حداقل می رسد. همچنین مقدار نرم خطا از

¹ Efflux Number

مختلفی مورد آزمایش قرار گرفتند که به طور کلی در صورتی که $0.13 \leq TMIN \leq 0.36$ باشد، مطابقت مناسبی میان نتایج برقرار خواهد بود.

3-9- جریان ورودی از دو گوشه مخزن

در این حالت آب با سرعت 1 متر بر ثانیه از دو گوشه مخزن هرکدام به فاصله

جدول 2 نرم خطای مقایسه معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از وسط و بالا

Table 2 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for the case of water entrance from middle and top of the tank

نرم خطا	تعداد نقاط	زمان (ثانیه)
8.4277×10^{-4}	188	0.5
3.2011×10^{-4}	3301	1
2.3044×10^{-4}	5581	2
1.4896×10^{-4}	9801	4

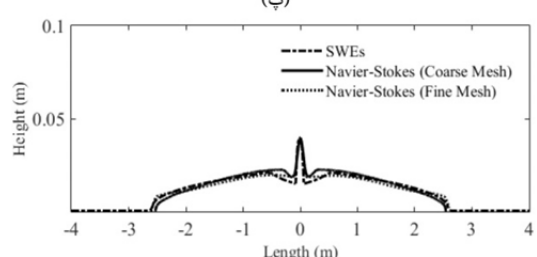
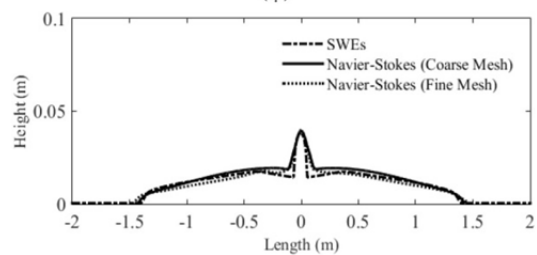
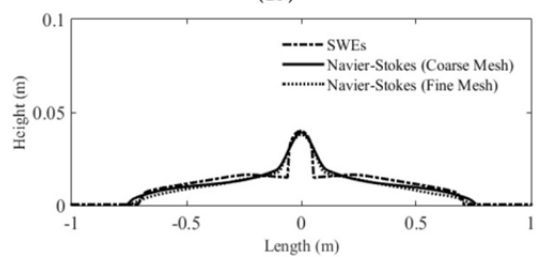
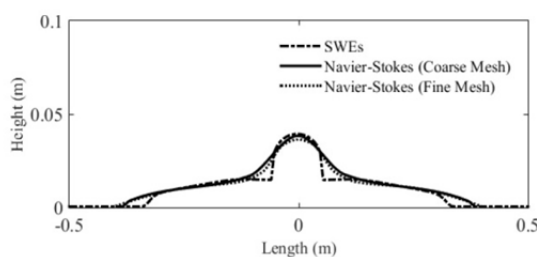


Fig. 3 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for section 9-1 case study using the refined mesh

شکل 3 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای مساله بخش 9-1 با مش ریزتر

جدول 1 نرم خطای مقایسه معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از وسط و کف

Table 1 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for middle bed efflux

نرم خطا	تعداد نقاط	زمان (ثانیه)
1.2445×10^{-4}	769	0.5
8.1635×10^{-5}	1521	1
5.2174×10^{-5}	2861	2
3.2236×10^{-5}	5082	4

که در آن Navier-Stokes ارتفاع آب در مدل نرم افزار استار سی دی، Shallow water ارتفاع آب در مدل آب کم عمق و n تعداد نقاط می باشد. همان طور که در شکل و جدول 1 مشاهده می شود، نتایج بدست آمده از نرم افزار با نتایج حاصل از معادلات آب های کم عمق به طور مناسبی مطابقت دارند.

به منظور دستیابی به بهترین عدد برای EN، مدل های مختلفی با $EN = 0.303$ ، $EN = 0.505$ و $EN = 1.01$ آزمایش گردید. با توجه به نتایج می توان گفت در صورتی که $EN < 0.5$ باشد، در همه زمان ها مطابقت محسوسی میان نتایج آب های کم عمق و ناویر-استوکس برقرار می باشد در حالی که برای زمان های خیلی طولانی، $EN > 0.5$ مناسب تر است.

برای اثبات استقلال مدل از شبکه، این بار همین مساله با شبکه های ریزتر¹ با ابعاد $1 \times 40 \times 2000$ مورد بررسی قرار گرفته و حرکت آب به صورت متناظر برای زمان های 0.5، 1، 2 و 4 ثانیه در شکل 3 رسم شده است و نتایج آن با نتایج مدل $1 \times 20 \times 1600$ قبلی و معادلات آب های کم عمق مقایسه گردیده اند.

همان طور که در شکل مشاهده می شود، نتایج بدست آمده با مقدار سلول های ریزتر، تفاوتی را با مش شبکه درشت تر ایجاد نمی نماید که نشان دهنده مستقل بودن نتایج حل کننده معادلات ناویر-استوکس از شبکه می باشد.

9-2- جریان ورودی به مخزن از بالا و وسط

در این حالت، جریان با سرعت 1 متر بر ثانیه در فاصله بین -0.05 تا 0.05 از وسط و بالای مخزن با ارتفاع 0.2 متر، وارد می شود. در اینجا نیز عدد بی بعد ورودی از بالا و وسط² طبق فرمول $TMIN = Vl/h\sqrt{hg}$ تعریف می شود که l و g مانند قبل و h ارتفاع سقوط یعنی ارتفاع مخزن می باشد. طبق مشخصات این مساله $TMIN = 0.357$ است. همچنین تعداد سلول های مورد استفاده و ضریب اصطکاک به ترتیب برابر 512 و $C_f = 0.01$ می باشند. زمان اجرای مدل برای معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 54.87 و 451.61 ثانیه می باشد.

شکل های (4-الف)، (4-ب)، (4-پ) و (4-ت) مقایسه پروفیل سطح آب³ حاصل از حل با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس در زمان های مختلف را نشان می دهند. همان طور که مشاهده می گردد، در 0.5 ثانیه اختلافی در حدود 0.15 متر در میزان پیشروی جبهه های آب وجود دارد که می تواند ناشی از شتاب ثقلی در اثر سقوط باشد. همچنین در جدول 2 مقادیر نرم خطا و تعداد نقاط برای زمان های مختلف آورده شده است.

در این حالت نیز با تغییر در مقادیر پارامترهای l و h ، V

¹ Fine Mesh

² Top Middle Influx Number

³ Water Surface Profile

می باشد که در اینجا دو برابر یعنی مجموع هر دو دهانه بوده و بنابراین ضریب 2 به منظور جبران آن، به مخرج فرمول اضافه شده است. بنابراین مقدار این رابطه برای مساله با مشخصات فوق، برابر با $TEIN = 0.357$ می باشد. همچنین تعداد سلول های استفاده شده و ضریب اصطکاک به ترتیب 800 و $C_f = 0.004$ است. زمان اجرای مدل برای معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 90.61 و 2065.95 ثانیه می باشد.

شکل های (6-الف)، (6-ب)، (6-پ) و (6-ت) نتایج مقایسه حل با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس و جدول 3 نرم خطا و تعداد نقاط را در زمان های مختلف نشان می دهد. حالت های مختلفی با اعداد بدون بعد متفاوت، مدل سازی گردیدند و طبق نتایج، در صورتی که $0.13 \leq TEIN \leq 0.36$ باشد، همخوانی قابل قبولی میان نتایج وجود خواهد داشت.

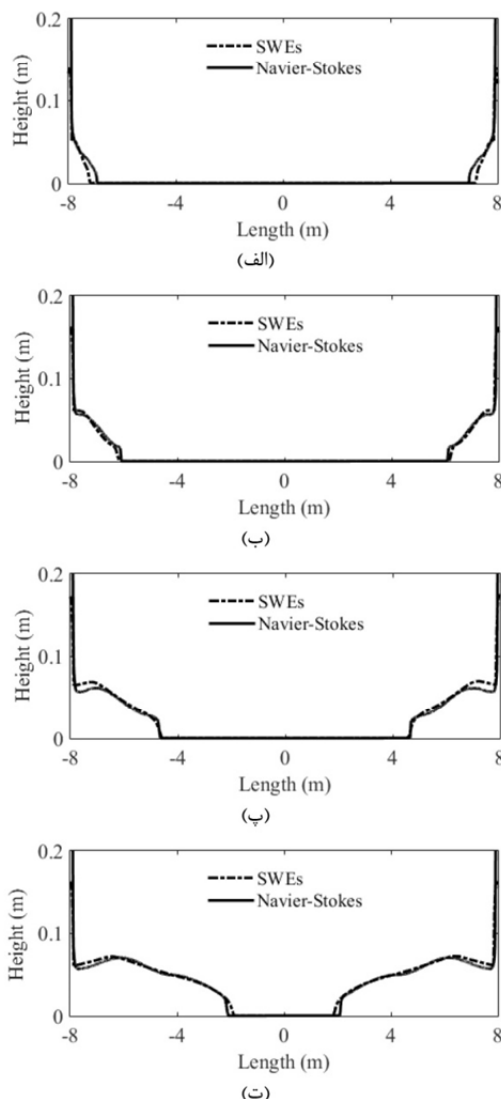


Fig. 6 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from top edges for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 6 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از بالا و کناره ها در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه

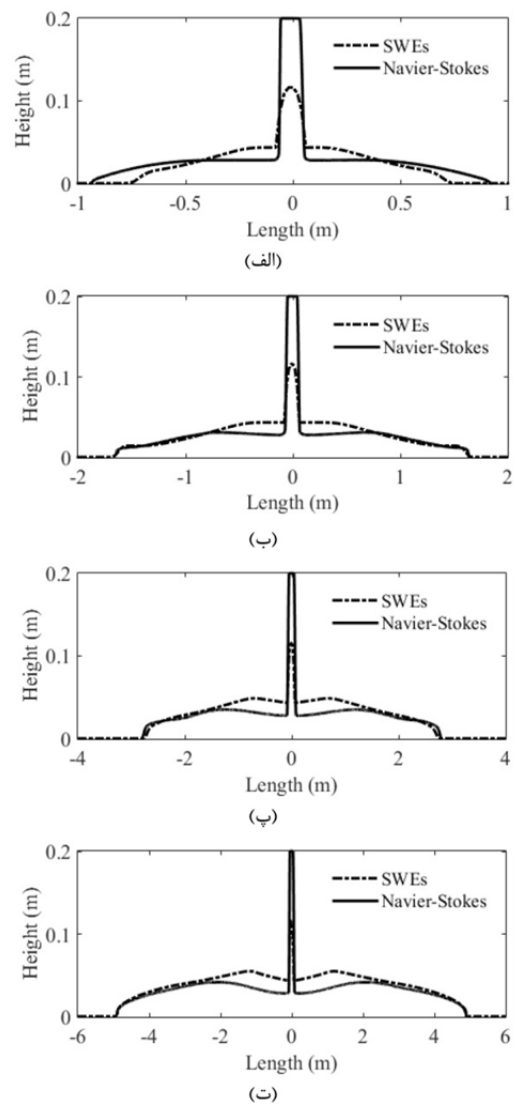


Fig. 4 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from middle and top for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 4 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از بالا و وسط در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه



Fig. 5 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from middle and top of the tank with 1m/s speed at 0.5s

شکل 5 نتیجه حاصل از نرم افزار استار سی دی برای ورود آب به مخزن از بالا و وسط با سرعت 1 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه

0.1 متر یعنی از 8- تا 7.9- و از 7.9 تا 8 متر از ارتفاع 0.2 متری وارد می گردد. عدد ورودی از بالا و گوشه¹ به صورت فرمول $TEIN = vl/2h\sqrt{hg}$ تعریف می شود و تفاوت آن با TMIN در پارامتر l

¹ Top Edges Influx Number

آب های کم عمق در نظر گرفته نشده است و این موضوع با تغییر در اصطکاک به صورت مطلوبی حل گردید.

از دیگر عوامل بروز خطا بایستی به عبارات لزجت و فشار غیر هیدرواستاتیک در نرم افزار استار سی دی اشاره نمود که ماهیت معادلات آن با معادلات آب های کم عمق یکسان نمی باشند. اما آنچه در سیلاب حائز اهمیت است، مدل سازی موج پیش رونده¹ بر روی سطح خشک می باشد که در این مورد، نتایج حاصله از مدل آب کم عمق با نرم افزار استار سی دی حتی برای شرایطی که عدد بی بعد معرفی شده معتبر نمی باشد، کاملاً مشابه است.

اشاره به این نکته نیز ضروری به نظر می رسد که در مدل آب های کم عمق، برای عمق آب پیش فرض در مخزن نمی توان مقدار دقیق صفر را در نظر گرفت و بایستی همیشه یک مقدار کم و نزدیک به صفر فرض نمود ولی به طور کلی این سطوح، خشک در نظر گرفته می شوند. بعلاوه این مدل، توانایی مدل سازی حالتی که آب از ارتفاع سقوط می کند را ندارد و این حالت را به صورت ورودی از کف مدل سازی می نماید. چراکه در آن از یک روش عمق مثبت استفاده شده است.

در مجموع با توجه به بررسی های انجام شده از روی شکل ها و جداول مربوط به نرم خطا، نتایج حاصل به طور مطلوبی با یکدیگر تطابق دارند. از مزیت های استفاده از معادلات آب های کم عمق می توان به سرعت بالای حل و سادگی نسبت به معادلات چند بعدی ناویر-استوکس اشاره نمود که این امر با ذکر زمان اجرای هر مدل در بخش مربوطه، واضح است. این در حالی است که با کوچک تر نمودن گام زمانی، مکانی یا خطای قابل قبول، این زمان به طور قابل توجهی افزایش می یابد.

11- مراجع

- [1] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, pp. 64-312, Cambridge: Cambridge university press, 2002.
- [2] E. F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, pp. 15-253, Michigan: John Wiley, 2001.
- [3] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, B. Perthame, A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 6, pp. 2050-2065, 2004.
- [4] Q. Liang, F. Marche, Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms, *Advances in Water Resources*, Vol. 32, No. 6, pp. 873-884, 2009.
- [5] D. S. Bale, R. J. LeVeque, S. Mitran, J. A. Rossmann, A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 3, pp. 955-978, 2003.
- [6] D. L. George, Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 6, pp. 3089-3113, 2008.
- [7] C. Bourdarias, S. Gerbi, A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 209, No. 1, pp. 109-131, 2007.
- [8] H. Mahdizadeh, P. K. Stansby, B. D. Rogers, On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 66, No. 10, pp. 1295-1314, 2011.
- [9] H. Mahdizadeh, P. K. Stansby, B. D. Rogers, Flood wave modeling based on a two-dimensional modified wave propagation algorithm coupled to a full-pipe network solver, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 138, No. 3, pp. 247-259, 2011.
- [10] G. Kesserwani, S. Lee, M. Rubinato, J. Shucksmith, Experimental and numerical validation of shallow water flow around a surcharging manhole, *Urban Drainage Modelling*, Vol. 1, pp. 145-154, 2015.
- [11] A. R. Haghighi, Sh. Pakrou, Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional nonlinear Burgers' equation, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, Vol. 7, No. 5, pp. 459-466, 2016.
- [12] A. R. Haghighi, A. Shadipour, M. Shahbazi Asl, Numerical simulation of micropolar fluid flow through an asymmetric tapered stenosis artery, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 12, pp. 33-41, 2017. (in Persian فارسی)

¹ Front Wave



Fig. 7 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from top edges of the tank with 1m/s speed at 0.5s (zoomed screen at right corner)

شکل 7 نتیجه حاصل از نرم افزار استار سی دی برای ورود آب به مخزن از بالا و گوشه با سرعت 1 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه (بزرگنمایی شده برای گوشه سمت راست)

جدول 3 نرم خطای مقایسه معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از گوشه ها و بالای مخزن

Table 3 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for the case of water entrance from top edges of the tank

زمان (ثانیه)	تعداد نقاط	نرم خطا
0.5	15841	4.5046×10^{-5}
1	15841	4.0816×10^{-5}
2	15841	4.3851×10^{-5}
4	15841	4.4365×10^{-5}

10- نتیجه گیری

مدل سازی عددی یکی از مؤثرترین روش ها به منظور فهم و بررسی دقیق و صحیح پدیده ها در علوم مهندسی می باشد. همچنین در علوم مربوط به سیالات نظیر عمران و مکانیک، ضرورت مدل سازی عددی به علت وجود پیچیدگی های بسیار زیاد و کمبود امکانات لازم، بیشتر احساس می گردد. در پژوهش حاضر، به مقایسه مدل سازی مخزن با ابعاد مشخص در سه حالت با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس پرداخته شد. در هر حالت، یک عدد بدون بعد و یک محدوده برای آن تعریف شد به طوری که اگر مشخصات مخزن دلخواه با استفاده از فرمول معرفی شده برای عدد بی بعد، در این محدوده قرار بگیرد، مطابقت بهتری میان نتایج دو مدل برقرار خواهد شد.

همان طور که در قسمت مقدمه این مقاله ذکر گردیده است، تاکنون هیچ توسعه ای از معادلات آب کم عمق برای سقوط جریان آزاد معرفی نگردیده است و مدل های معرفی شده صرفاً برای پخش جریان سیال بر روی سطح خشک بیان گردیده و بحث سقوط در آن ها به علت ماهیت پیچیده آن برای مدل آب کم عمق بررسی نشده است. به همین دلیل نتایج آزمایشگاهی یا مدل دیگر از معادلات ناویر-استوکس و آب کم عمق که بحث سقوط بر روی سطح خشک را مدل نماید، موجود نبوده است. درواقع، هدف در اینجا استفاده از معادلات آب های کم عمق یک بعدی که بسیار ساده تر و ارزان تر از نظر محاسباتی نسبت به معادلات ناویر-استوکس می باشند، برای مدل سازی سقوط جریان آزاد بر روی سطح خشک است.

در حالت های ورود آب به مخزن از بالا، بررسی نتایج معادلات ناویر-استوکس از زمانی که آب به کف کانال می رسد آغاز شد چراکه با توجه به برنامه نوشته شده بر اساس معادلات آب های کم عمق، مبدأ شروع حرکت آب از کف کانال می باشد. همچنین در حل معادلات ناویر-استوکس که توسط نرم افزار استار سی دی صورت گرفت، آب از ارتفاع 0.2 متری و با شتاب جاذبه 9.8066 سقوط کرده و بنابراین دارای یک شتاب اولیه بعد از رسیدن به کف کانال و شروع حرکت خواهد بود درحالی که شرایط سقوط در حل معادلات

- [19] A. Harten, J. M. Hyman, Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, No. 2, pp. 235-269, 1983.
- [20] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, pp. 124-512, Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] B. Einfeldt, On Godunov-type methods for gas dynamics, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 25, No. 2, pp. 294-318, 1988.
- [22] R. J. LeVeque, D. L. George, High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states, *Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup*, Vol. 10, pp. 43-73, 2008.
- [23] B. Einfeldt, C.-D. Munz, P. L. Roe, B. Sjögren, On Godunov-type methods near low densities, *Journal of Computational Physics*, Vol. 92, No. 2, pp. 273-295, 1991.
- [24] H. Mahdizadeh, *Modelling of Flood Waves Based on Wave Propagation: Algorithms with Bed Efflux and Influx Including a Coupled-Pipe Network Solver*, Thesis, University of Manchester, 2011.
- [25] R. J. LeVeque, Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm, *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, No. 1, pp. 346-365, 1998.
- [26] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No. 3, pp. 357-393, 1983.
- [13] S. Moodi, H. Mahdizadeh, M. Azhdary Moghaddam, Numerical Modelling of Water Entrance into a Wet Tank Using a Modified Wave Propagation Algorithm, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 4, pp. 168-176, 2017. (in Persian فارسی)
- [14] H. Mahdizadeh, H. Cheharbidi, S. Moodi, Numerical Modelling of Flood Waves Propagation in Sewer Networks using One- and Two-Dimensional Modified HLLC Method, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 7, pp. 273-282, 2017. (in Persian فارسی)
- [15] M. Barzgaran, H. Mahdizadeh, S. Pouresmaeil, A Weakly Coupled Scheme for Modelling Bedload Sediment Transport Using an Augmented Riemann Solver, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 406-416, 2017. (in Persian فارسی)
- [16] R. J. LeVeque, *High Resolution Finite Volume Methods on Arbitrary Grids via Wave Propagation, Upwind and High-Resolution Schemes*, Eds., pp. 491-518; Springer, 1988.
- [17] R. J. LeVeque, Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 2, pp. 327-353, 1997.
- [18] P. K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, No. 5, pp. 995-1011, 1984.