



بررسی تحلیلی تنش های ایجاد شده در اثر ارتعاشات تصادفی در اتصالات لحیمی بردهای الکترونیکی

مهدی فکور^{1*}، فرزاد شیرمحمدلی²

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 14395-1561، mfakoor@ut.ac.ir

چکیده

ماهواره ها روی زمین در طی مراحل ساخت و حمل و نقل در محیط پرتاب و در حال عملکرد در فضا تحت انواع بارهای دینامیکی از جمله بارهای ارتعاشی فرکانس بالا و پایین، آکوستیک، شوک و ضربه قرار می گیرند که هر کدام می تواند منبع مهمی در به وجود آمدن تنش بر اجزا ماهواره باشد. اجزای سازنده ماهواره باید به گونه ای طراحی شود که در مواجهه با این محیط ها بتوانند به کار خود ادامه دهند. بهبود طراحی ماهواره در مقابل ضعف هایی که در برابر بارگذاری های مختلف نشان می دهد امری ضروری است و با توجه به این که انجام تست های آزمایشگاهی بسیار زمان بر و هزینه بر است. استفاده از روش های تحلیلی برای بررسی دوام و طول عمر سازه می تواند بسیار کاربردی باشد. بیشتر بارهای اعمالی وارد بر ماهواره در طول عمر کاری آن به صورت بارهای تصادفی است که معمولاً شبه استاتیکی در نظر گرفته می شوند. بردهای الکترونیکی به خصوص اتصالات لحیمی آن ها از اجزای بسیار حساس و حیاتی ماهواره ها هستند که بیشترین آسیب پذیری را از ارتعاشات تصادفی دارند؛ بنابراین بررسی آسیب وارده به آن ها تحت این نوع بارگذاری برای طراحی مناسب بردها اهمیت بسیار زیادی در مدت زمان کارکرد آن ها دارد. در این تحقیق بارهای ارتعاشات تصادفی اعمالی بر بردهای الکترونیکی با بارهای شبه استاتیکی معادل می شود و با مدل سازی برد با استفاده از تئوری ورق های چند لایه، مقدار تنش و شکست اتصالات لحیمی تحت این بارگذاری بررسی می گردد، همچنین اثر پارامترهایی چون مقدار عرض برد و شرایط مرزی برد الکترونیکی بر مقدار تنش اتصالات لحیمی در حل تحلیلی در نظر گرفته خواهد شد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 دی 1396
پذیرش: 25 اسفند 1396
ارائه در سایت: 24 فروردین 1397

کلید واژگان:

برد الکترونیکی
اتصالات لحیمی
ارتعاشات تصادفی
تحلیل تنش

Analytical Investigation of Induced Stresses on Solder Joints of Electronic Boards under Random Vibration

Mahdi Fakoor*, Farzad Shirmohammadi

Faculty of New Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14395-1561, Tehran, Iran, mfakoor@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 January 2018
Accepted 16 March 2018
Available Online 13 April 2018

Keywords:

Electronic board
Solder joint
Random vibration
Stress analysis

ABSTRACT

The satellites on the ground during construction and transportation, in launching stage and operation in space are under various types of dynamic loads, including high and low frequency vibrational loads, acoustics, shock, impact, etc., each of which can be an important source in the creation of stress on the satellite. The satellite components should be designed in such a way that can continue to operate while facing these situations. Electronic boards, in particular their solder joints, are critical components of satellites. Therefore, investigation of damage in design process of boards has great importance. Loading pattern on the satellite during its operation is usually random which considered as quasi-static load. Improvement of the design of the satellite against the weaknesses shown while facing different loads is essential, and given the fact that it is time consuming and costly to carry out laboratory tests, the use of analytical methods for checking the strength and lifetime of the structure can be very useful. In this research, random vibrations environment is equivalent to pseudo-static loads, and using the multilayer plate theory, the stresses in solder joints and failure of joints under this loading will be investigated. Also, the effect of parameters such as electronic board width and the boundary condition of the printed circuit board on the solder joints' stress will be considered in analytical solution.

1- مقدمه

تست های آزمایشگاهی برای بررسی پارامترهای مختلف برد از جمله محل نصب قطعه الکترونیکی بر آن شرایط تکیه گاهی برد الکترونیکی، نسبت طول به عرض برد الکترونیکی، هندسه اتصالات لحیمی، جنس مواد استفاده شده و... بر استحکام آن می تواند بسیار کاربردی باشد. در این مقاله مدلی تحلیلی

بردهای الکترونیکی از اجزا مهم و حیاتی سامانه های فضایی هستند و در نتیجه باید از استحکام آن ها در مقابل عوامل محیطی اطمینان حاصل کرد. ارائه روش های تحلیلی با توجه به بسیار وقت گیر و هزینه بر بودن انجام

فرض این که برد و قطعه الکترونیکی مانند دو تیر ساده هستند و لایه واسط از تعداد بی‌نهایت فنر کششی و برشی تشکیل شده است، مدلی برای به دست آوردن مقدار تنش اتصالات لحیمی تحت بار کششی و گشتاور خمشی ارائه کرد. از ایرادات مدل کرنل این بود که تنش را در همه نقاط یکسان فرض کرد [12]. دلالة و همکاران مدل جامع‌تری از مدل گولاند و ریسنر ارائه کردند، برد و قطعه الکترونیکی می‌توانند از مواد مختلف ساخته شده باشند. آن‌ها قطعه و برد الکترونیکی را به صورت تیر تیموشنکو مدل کردند. لایه واسط را می‌توان گسترده‌تر در نظر گرفت و لازم نبود که اتصال تک نقطه‌ای در نظر گرفته شود [13]. سوهیر برای پاسخ به تناقضاتی که در تست‌های آزمایشگاهی مشاهده شده بود اقدام به ارائه روشی تحلیلی براساس تئوری چندلایه برای به دست آوردن تنش اتصالات لحیمی کرد. او برد و قطعه الکترونیکی را به صورت یک تیر، اتصالات لحیمی را فنر در نظر گرفت. طبق مدل سوهیر به اتصالات لحیمی فقط نیروی نرمال وارد می‌شد و از نیروی برشی و گشتاور وارد بر اتصالات لحیمی صرف نظر کرد. سوهیر با استفاده از روش خود تنش نرمال در اتصالات لحیمی را تحت بار گشتاور خمشی به دست آورد [14]. بیگ وود و کروکومب در سال 1989 فرض‌هایی شبیه به مدل دلالة در نظر گرفتند. تفاوت مدل آن‌ها با مدل دلالة در این بود که آن‌ها قطعه و برد الکترونیکی را به صورت تیر اوپلر در نظر گرفتند که به روابطی مشابه با روابط دلالة رسیدند [15]. در سال 1994 بارکر و دیگران نیز روشی تحلیلی برای به دست آوردن تنش اتصالات لحیمی را تحت بارگذاری ارتعاش هارمونیک بررسی کردند. مدل آن‌ها تعمیم یافته مدل سوهیر بود. با این تفاوت که آن‌ها در روش خود سفتی خمشی اتصالات لحیمی را نیز در نظر گرفتند. بارکر برای نشان دادن سفتی خمشی اتصالات لحیمی از فنرهای پیچی استفاده کرد. در حل او از تأثیر تنش‌های برشی اتصالات لحیمی صرف نظر شد [16]. در سال 2008 وونگ با استفاده از تئوری ورق‌های چند لایه روشی تقریبی برای به دست آوردن تنش در اتصالات لحیمی تحت ضربه و بار خمشی ارائه کرد. وونگ باور داشت که برای به دست آوردن تنش در اتصالات لحیمی نمی‌توان از تنش‌های برشی و گشتاور وارد بر آن صرف نظر کرد؛ بنابراین او مدل دقیق‌تری برای به دست آوردن تنش در اتصالات لحیمی ارائه کرد. وونگ به این نتیجه رسید که در خمش برد الکترونیکی، تنش ناشی از خمش در اتصال لحیمی بسیار بزرگ‌تر از تنش نرمال اتصال لحیمی است. البته او نیز برد الکترونیکی را به صورت یک بعدی (تیر) مدل کرد و از این واقعیت صرف نظر کرد که بردهای الکترونیکی به صورت ورق هستند. در مدل او اثر شرایط تکیه‌گاهی نیز نادیده گرفته شد. این عوامل می‌توانند بر مقدار تنش اتصالات لحیمی اثرگذار باشند [17]. در سال 2008 یانگ پینگ و همکاران برد الکترونیکی را تحت ضربه مدل کردند و اثر پارامترهای مختلف بر مقدار تنش اتصالات لحیمی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها بیشترین مقدار جابه‌جایی و شتاب برد الکترونیکی را با استفاده از شکل مودهای تیر محاسبه کردند و مقدار تنش در اتصالات را به دست آوردند. همچنین اعلام کردند که مقدار تنش نرمال ناشی از شتاب بسیار کمتر از تنش نرمال ناشی از خمش برد است [18]. در سال 2016 قزاییه و همکاران با استفاده از روش ریتز¹ اولین فرکانس طبیعی و شکل مودهای برد الکترونیکی را تحت ارتعاشات به دست آوردند. ایشان بحرانی‌ترین اتصال لحیمی و مقدار تنش آن را با استفاده از این روش محاسبه کردند [19]. می لینگ وو در سال 2017 روشی را براساس روش سوهیر گسترش داد. او برد الکترونیکی را به صورت دو لایه فرض کرد و تغییرات مکانی هر نقطه را براساس آنالیز نقطه‌ای به دست

برای به دست آوردن مقدار تنش و اثر پارامترهای مختلف بر مقدار تنش در اتصالات لحیمی تحت ارتعاشات تصادفی ارائه خواهد شد. تحقیقات پیشین انجام شده در این زمینه به دو قسمت اصلی تقسیم شده است: قسمت اول تحقیقاتی که بر ارتعاشات ورق انجام شده است. لیوویتز در سال 1975 ورق ایزوتروپ با شرایط تکیه‌گاهی مختلف تحت بارگذاری ارتعاش اکوستیک را بررسی و شکل مودهای این مسأله استخراج کرد [1]. الیشاکوف در سال 1977 ورق ارتوتروپ با شرایط تکیه‌گاهی مختلف تحت بارگذاری ارتعاش تصادفی را برای به دست آوردن پاسخ بررسی کرد. او از شکل مودهای تقریبی استفاده کرد که شرایط مرزی را ارضا می‌کردند. از ایرادات کار این بود که شکل مودهای استخراج شده توابع مقادیر ویژه را ارضا نمی‌کردند [2]. در سال 1983 میانو و اوپانگ برای بررسی ورق ایزوتروپ از توابع سری فوریه که شرایط مرزی را ارضا می‌کردند، برای تخمین پاسخ ورق تحت ارتعاش تصادفی بهره بردند. روش آن‌ها برای مرتبه‌های بالاتر پاسخ نمی‌داد که باید پارامترهای بیشتری را در روش خود در نظر می‌گرفتند [3]. در سال 1944 مایمون نیز یک روش تحلیلی برای ارزیابی پاسخ تصادفی سازه‌های معین و نامعین تحت ارتعاشات تصادفی ارائه کرد. برای این که روش مایمون پاسخ مطلوبی ارائه دهد نیازمند روش‌های تحلیلی دقیق برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها بود که در آن زمان ارائه نشده بودند؛ بنابراین او برای به دست آوردن نتایج از بسط تیلور و روش‌های عددی استفاده کرد [4]. در سال 2000 هوانگ و همکاران ارتعاش ورق ایزوتروپ تحت ارتعاش تصادفی تحریک از پایه بررسی کردند. آن‌ها یک ورق ساده را با شرایط تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفتند. ساده‌سازی‌های زیاد از ایرادات روش آن‌ها بود که از دقت پاسخ می‌کاست [5]. در سال 2009 ژینگ و لیو توانستند برای نخستین بار برای ورق ارتوتروپ با شرایط تکیه‌گاهی مختلف شکل مودهای دقیق ارائه دهند [6]. در سال 2012 ایرانی و سازش تیر با سطح مقطع متغیر را تحت ارتعاشات تصادفی بررسی کردند، پاسخ و تحریک سیستم را برحسب شکل مودهای سیستم به دست آوردند و انحراف معیار جابه‌جایی برای هر نقطه از تیر را به دست آورده و با استفاده از آن تنش و قابلیت اطمینان را برای تیر محاسبه کردند [7]. در سال 2013 حاجی‌حسینلو و همکاران ایرادات جزئی در شکل مودهای ژانگ و لیو یافتند و آن را اصلاح کردند، همچنین با ساده‌سازی‌هایی شکل مودهای ژانگ و لیو را برای ورق ایزوتروپ نیز به دست آوردند. تابع پاسخ فرکانسی برای ورق ایزوتروپ را برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف ارائه کردند [8]. در سال 2017 چن و همکاران ورق ایزوتروپ مستطیلی را با شرایط مرزی مختلف تحت ارتعاشات تصادفی بررسی و شکل مودهای این ورق‌ها را ارائه کردند [9].

قسمت دوم تحقیقاتی را شامل می‌شود که در آن با ساده‌سازی‌های بسیار تلاش شده است مقدار تنش در اتصالات لحیمی به دست آید. در سال 1938 ولکرسن اتصال برشی یک نقطه‌ای را با هدف به دست آوردن تنش برشی در اتصالات لحیمی بررسی کرد. در روش ولکرسن برد و قطعه الکترونیکی فقط کشش صفحه‌ای تحمل می‌کنند و دچار انحنای تغییر شکل نمی‌شوند، همچنین در مدل ولکرسن اتصال لحیمی فقط تنش کششی تحمل می‌کنند [10]. در سال 1944 گولاند و ریسنر همان مدل ولکرسن را مورد بررسی قرار دادند، ولی با این تفاوت که قطعه و برد الکترونیکی می‌تواند انحنا را تحمل کند. ایشان قطعه و برد الکترونیکی را به صورت تیر ساده در نظر گرفتند. مدل آن‌ها سبب افزایش دقت در محاسبات نسبت به مدل ولکرسن شد. از ایرادات مدل آن‌ها این است که قطعه و برد الکترونیکی باید از یک جنس باشند هر چند می‌تواند ضخامت متفاوت داشته باشند [11]. کرنل با

¹ Ritz

$$w_b(t) = e^{-i\omega t}, p(t) = -\rho \ddot{w}_b(t) \rightarrow p(t) = \rho \omega^2 e^{-i\omega t} \quad (12)$$

با جای‌گذاری رابطه (12) در رابطه (11)، رابطه (11) به صورت روابط (14,13) خواهد بود.

$$\ddot{q}_{mn}(t) + \beta_{mn}\dot{q}_{mn}(t) + \omega^2 q_{mn}(t) = \frac{\rho \omega^2 I_{mn}}{m_{mn}} e^{-i\omega t} \quad (13)$$

$$I_{mn} = \int_R \psi_{mn}(x, y) dx dy \quad (14)$$

با حل رابطه (13) مقدار q به صورت روابط (16,15) به دست می‌آید.

$$q_{mn}(t) = H_{mn}(\omega) I_{mn} e^{-i\omega t} \quad (15)$$

$$H_{mn}(\omega) = \frac{\rho \omega^2}{m_{mn}(-\omega^2 + \beta_{mn}i\omega + \omega_{mn}^2)} \quad (16)$$

حال با جای‌گذاری رابطه (15) در رابطه (4) پاسخ تابع ارتعاش ورق به صورت رابطه (17) خواهد بود.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) q_{mn}(t) \rightarrow w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) H_{mn}(\omega) I_{mn} e^{-i\omega t} \quad (17)$$

حال با توجه به این‌که پاسخ سیستم برابر با حاصل‌ضرب ورودی سیستم در تابع پاسخ فرکانسی است، تابع پاسخ فرکانسی یک ورق ایزوتروپ به صورت رابطه (18) است [8].

$$H_w(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) H_{mn}(\omega) I_{mn} \quad (18)$$

تابع پاسخ فرکانسی با استفاده از ورودی تابع هارمونیک به دست آمد، ولی با توجه به این‌که تابع پاسخ فرکانسی به مشخصات فیزیکی سیستم بستگی دارد می‌توان از این تابع برای بارهای ورودی تصادفی نیز استفاده کرد. با استفاده از روابط ارتعاش تصادفی مقادیر انحراف معیار جابه‌جایی و شتاب در هر نقطه از ورق به صورت روابط (20,19) به دست می‌آید [8].

$$E[w^2(x, y)] = \int_0^{\infty} |H_w(x, y, \omega)|^2 S_{w_b}(\omega) d\omega \quad (19)$$

$$E[\ddot{w}_a^2(x, y)] = \int_0^{\infty} \omega^4 |H_w(x, y, \omega)|^2 S_{w_b}(\omega) d\omega \quad (20)$$

3- تنش در اتصالات

با استفاده از روابط قسمت پیشین مقدار انحراف معیار جابه‌جایی و شتاب ورق در هر نقطه به دست می‌آید. در واقع ورق به صورت یک مقدار انحراف معیار انحنای پیدا می‌کند. حال مقدار تنش ناشی از این انحنای (مقدار تنش نیز به صورت انحراف معیار است) در اتصالات لحیمی به دست می‌آید. تعداد اتصالات لحیمی برای مدل‌سازی برد الکترونیکی بی‌شمار در نظر گرفته می‌شود، به طوری که بتوان لایه واسط را پیوسته فرض کرده و از تئوری ورق‌های چندلایه برای مدل‌سازی این مسأله استفاده کرد. شکل 1 به عنوان شکل مسأله در نظر گرفته می‌شود.

نمودار جسم آزاد برد و لایه واسط به ترتیب به صورت شکل‌های 2 و 3 است. با این فرض که مقدار تنش نرمال و تنش برشی در طول ضخامت لحیم ثابت است، در حالی که مقدار گشتاور خمشی خطی تغییر می‌کند که لبه چسبیده به برد الکترونیکی برابر m_2 و در لبه چسبیده به قطعه الکترونیکی برابر m_1 است که رابطه آن‌ها به صورت روابط (22,21) است.

$$\bar{m}_{2x} = r_x \bar{m}_{1x} \quad (21)$$

$$\bar{m}_{2y} = r_y \bar{m}_{1y} \quad (22)$$

مقدار r ثابت و به صورت روابط (24,23) تعریف می‌شود [16].

آورد. مقدار کرنش هر اتصال لحیمی را به دست آورد. در نتیجه با استفاده از قانون هوک تنش هر اتصال لحیمی تحت بارگذاری گشتاور خمشی را به دست آورد. مدل لینک نیز فقط برای به دست آوردن تنش نرمال کاربرد دارد و با این روش نمی‌توان تنش‌های برشی و خمشی را به دست آورد [20]. در این مقاله با توجه به کاستی‌های مدل‌های ارائه شده تاکنون، برد الکترونیکی به صورت ورق دو بعدی در نظر گرفته می‌شود و مدل تحلیلی برای به دست آوردن مقدار تنش در اتصالات لحیمی تحت اثر ارتعاشات تصادفی ارائه می‌شود. در ادامه آسیب وارده بر اتصالات لحیمی در این سازه‌های حساس با استفاده از مدل‌های مکانیک شکست مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

2- ارتعاشات تصادفی ورق

معادله ارتعاش برای یک ورق ایزوتروپ به صورت رابطه (1) است [8].

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^4 w = 0 \quad (1)$$

ρ و c به ترتیب چگالی و ضریب میرایی ورق نسبت به واحد سطح هستند. D سفتی خمشی ورق است. جابه‌جایی ورق با رابطه (2) داده می‌شود.

$$w_a(x, y, t) = w_b(t) + w(x, y, t) \quad (2)$$

w_a جابه‌جایی مطلق، w_b جابه‌جایی پایه و w جابه‌جایی نسبت به پایه است. رابطه (3) را با جای‌گذاری رابطه (2) در رابطه (1) خواهیم داشت.

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^4 w = p(t) \quad (3)$$

با فرض این‌که رابطه (3) پاسخی به صورت رابطه (4) دارد، رابطه (4) را در رابطه (3) قرار داده و می‌توان به رابطه (5) رسید [8].

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) q_{mn}(t) \quad (4)$$

$$p(t) = \rho \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) \ddot{q}_{mn}(t) + c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) \dot{q}_{mn}(t) + Dq \left(\frac{\partial^4 \psi_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial y^4} \right) \quad (5)$$

شکل موده‌های در نظر گرفته شده به صورت عمود بر هم هستند و روابط (6-10) برای آن‌ها برقرار است.

$$\int_R \rho \psi_{mn}(x, y) \psi_{kl}(x, y) dx dy = m_{mn} \delta_{mn,kl} \quad (6)$$

$$\int_R c \psi_{mn}(x, y) \psi_{kl}(x, y) dx dy = c_{mn} \delta_{mn,kl} \quad (7)$$

$$\delta_{mn,kl} = \begin{cases} 1, & mn = kl \\ 0, & mn \neq kl \end{cases} \quad (8)$$

$$c_{mn} = \frac{c}{\rho} \quad (9)$$

$$\beta_{mn} = \frac{c_{mn}}{m_{mn}} = 2\zeta_{mn} \omega_{mn} \quad (10)$$

حال اگر طرفین رابطه در ψ_{kl} ضرب و در ناحیه R (مساحت ورق) انتگرال گرفته شود، رابطه (11) را خواهیم داشت.

$$\ddot{q}_{mn}(t) + \beta_{mn}\dot{q}_{mn}(t) + \omega^2 q_{mn}(t) = \frac{1}{m_{mn}} \int_R \psi_{mn}(x, y) dx dy \quad (11)$$

حال اگر پایه ورق با تابع هارمونیک به صورت $w_b(t) = e^{-i\omega t}$ تحریک شود، مقدار $p(t)$ به صورت رابطه (12) خواهد بود.

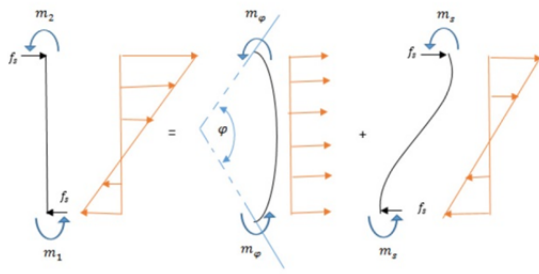


Fig. 2 Components of moment in a solder joint

شکل 2 اجزای گشتاور در اتصال لحیمی

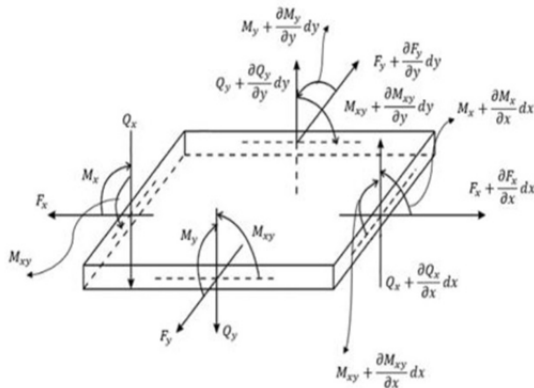


Fig. 3 Free-body diagram of PCB and IC

شکل 3 نمودار جسم آزاد برد و قطعه الکترونیکی

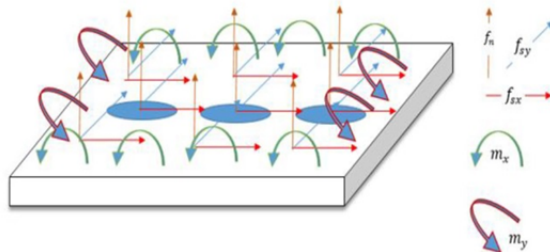


Fig. 4 Free-body diagram of solder joints

شکل 4 نمودار جسم آزاد اتصالات لحیمی

در ورق روابط بین گشتاور و خم ورق به صورت روابط (38-40) است.

$$m_x + \int \bar{m}_{ix} dx = D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (38)$$

$$m_y + \int \bar{m}_{iy} dy = D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (39)$$

$$m_{xy} = D_i (\nu - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (40)$$

با نوشتن تعادل گشتاوری در لایه واسطه روابط (42,41) را خواهیم داشت.

$$f_{sx} = \frac{\bar{m}_{2x} + \bar{m}_{1x}}{h_3} \quad (41)$$

$$f_{sy} = \frac{\bar{m}_{2y} + \bar{m}_{1y}}{h_3} \quad (42)$$

رابطه (43) با جای گذاری روابط (42-38) در رابطه (36) حاصل می‌شود.

$$D_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)$$

$$r_x = \frac{\alpha k_{sx} h_2 h_3 - 4 \beta_{sx} k_{\phi x}}{\alpha k_{sx} h_2 h_3 + 4 \beta_{sx} k_{\phi x}} \quad (23)$$

$$r_y = \frac{\alpha k_{sy} h_2 h_3 - 4 \beta_{sy} k_{\phi y}}{\alpha k_{sy} h_2 h_3 + 4 \beta_{sy} k_{\phi y}} \quad (24)$$

در شکل 3 مقدار گشتاور در طول لحیم نشان داده شده است. گشتاور در هر اتصال را می‌توان به دو گشتاور (m_{ϕ}) تجزیه کرد که در تیر خمشی ساده ایجاد می‌کند و در طول لحیم ثابت است. دیگری گشتاور (m_s) که برش نیز در طول لحیم ایجاد می‌کند و خطی در طول لحیم به صورت روابط (26,25) تغییر می‌کند.

$$m_{\phi x} = \frac{\bar{m}_{2x} - \bar{m}_{1x}}{2} \quad (25)$$

$$m_s = \frac{\bar{m}_{2x} + \bar{m}_{1x}}{2} \quad (26)$$

همچنین رابطه بین تنش نرمال، تنش برشی و گشتاور را می‌توان به صورت روابط (27-29) نوشت.

$$f_n = k_n \times \delta_n \quad (27)$$

$$f_s = k_s \times \delta_s \quad (28)$$

$$f_{\phi} = k_{\phi} \times \phi \quad (29)$$

مقادیر سختی معادل برای لایه واسطه به صورت روابط (30-32) است.

$$k_n = \frac{n E_3 A_s}{h_3} \quad (30)$$

$$k_s = \frac{n G_3 A_s}{h_3} \quad (31)$$

$$k_{\phi} = \frac{n E_3 I_s}{h_3} \quad (32)$$

n تعداد اتصالات لحیمی، A_s سطح مقطع اتصال لحیمی و I_s گشتاور دوم سطح اتصال لحیمی است.

حال با توجه به شکل‌های 2 و 4 با نوشتن تعادل گشتاور حول محور y ، تعادل گشتاور حول محور x و تعادل نیرو در راستای محور z به ترتیب روابط (33-35) حاصل می‌شود. رابطه (36) با جای گذاری روابط (33,34) در رابطه (35) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial m_{ix}}{\partial x} - \frac{\partial m_{ixy}}{\partial y} + \bar{m}_{ix} - \frac{f_{isx} h_i}{2} = -q_{ix} \quad (33)$$

$$\frac{\partial m_{iy}}{\partial y} - \frac{\partial m_{ixy}}{\partial x} + \bar{m}_{iy} - \frac{f_{isy} h_i}{2} = -q_{iy} \quad (34)$$

$$\frac{\partial q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial q_{iy}}{\partial y} = -f_n - f_{ia} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 m_{ix}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{ixy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{iy}}{\partial y^2} + \frac{\partial m_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial m_{iy}}{\partial y} - \frac{\partial f_{isx} h_i}{\partial x} - \frac{\partial f_{isy} h_i}{\partial y} = f_n + f_{ia} \quad (36)$$

مقدار f_{ia} به صورت رابطه (37) است.

$$F_{ia} = m_i a \rightarrow \frac{F_{ia}}{dxdy} = \frac{m_i a}{dxdy} = \frac{\rho_i h_i dxdy}{dxdy} \rightarrow f_{ia} = \rho_i h_i a \quad (37)$$

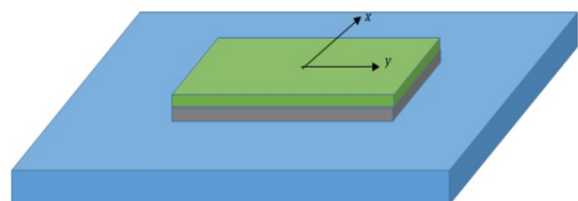


Fig. 1 The general state of the model with the assumption of continuous interface layer

شکل 1 حالت کلی از مدل با پیوسته فرض کردن لایه واسطه

$$\int_{-L}^L \int_{-T}^T f_n dx dy = m_{IC} a \quad (54)$$

در رابطه (47) L و T به ترتیب برابر با نصف طول و نصف عرض قطعه الکترونیکی هستند. شیب در محورهای تقارن عمودی و افقی برابر صفر و به صورت روابط (56,55) است.

$$\frac{d\delta_n}{dx}(x, 0) = 0 \rightarrow \frac{df_n}{dx}(x, 0) = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d\delta_n}{dy}(0, y) = 0 \rightarrow \frac{df_n}{dy}(0, y) = 0 \quad (56)$$

تفاضل انحنای برد و قطعه برابر با روابط (58,57) است.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta_n}{dx^2} &= \frac{1}{R_{PCB}} - \frac{1}{R_{XIC}} \\ &\xrightarrow{R_{XIC} \rightarrow \infty} \frac{d^2\delta_n}{dx^2} = \frac{1}{R_{PCB}} \xrightarrow{\times k_n} \frac{d^2f_n}{dx^2} \\ &= \frac{k_n}{\text{RMS}(R_{PCB})} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\frac{d^2f_n}{dy^2} = \frac{k_n}{\text{RMS}(R_{YPCB})} \quad (58)$$

برای حل رابطه بالا از روش تکرار تغییرات استفاده می‌شود. با توجه به روند تغییرات تنش در اتصالات پاسخ اولیه این تابع به صورت رابطه (59) انتخاب می‌شود.

$$f_0 = d + be^{cx} + fe^{gy} \quad (59)$$

با اعمال شرایط مرزی مقادیر ثابت حدس اولیه به صورت روابط (60-64) است.

$$c = -\frac{1}{x} - \frac{x}{(-x^6 + \sqrt{2}x^6)^{1/3}} + \frac{(-x^6 + \sqrt{2}x^6)^{1/3}}{x^3} \quad (60)$$

$$g = -\frac{1}{y} - \frac{y}{(-y^6 + \sqrt{2}y^6)^{1/3}} + \frac{(-y^6 + \sqrt{2}y^6)^{1/3}}{y^3} \quad (61)$$

$$b = \frac{e^{-cL}k_n}{R_{XPCB}C^2} \quad (62)$$

$$f = \frac{e^{-gL}k_n}{R_{YPCB}C^2} \quad (63)$$

$$d = \frac{cgm_{IC}a - 4bgT\sinh(cL) - 4cfl\sinh(gT)}{4cglT} \quad (64)$$

با توجه به حجم زیاد پاسخ نهایی از بیان آن اجتناب شده است. رابطه بین جابه‌جایی و گشتاور به صورت غیرخطی است؛ بنابراین ورودی سیستم پارامتری انتخاب شد که با گشتاور رابطه خطی داشته باشد. رابطه بین گشتاور، جابه‌جایی و انحنا را می‌توان به صورت رابطه (66,65) نوشت.

$$\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{R_x} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (65)$$

$$\frac{M_y}{EI} = \frac{1}{R_y} = \frac{d^2w}{dy^2} \quad (66)$$

با توجه به رابطه گشتاور با انحنا ($1/R$) رابطه خطی دارد؛ بنابراین می‌توان این رابطه را برای انحراف معیار آن‌ها نیز نوشت. مقدار تنش نرمال و تنش ناشی از گشتاور خمشی در هر اتصال لحیمی به صورت روابط (67-73) به دست می‌آید.

$$\text{RMS } F_n = \iint f_n dx dy \rightarrow \text{RMS } \sigma_n = \frac{\text{RMS } F_n}{A_s} \quad (67)$$

$$\text{RMS } M_{XPCB} = \iint \bar{m}_{2x} dx dy \quad (68)$$

$$\text{RMS } M_{YPCB} = \iint \bar{m}_{2y} dx dy \quad (69)$$

$$\text{RMS } M_{XIC} = \iint \bar{m}_{1x} dx dy \quad (70)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{m}_{2x} + \bar{m}_{1x})\frac{h_i}{2h_3} - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{m}_{2y} + \bar{m}_{1y})\frac{h_i}{2h_3} = f_n + f_{ia} \quad (43)$$

تغییر حالت برد الکترونیکی تحت بار اعمالی را به صورت شکل 5 (به صورت روابط (45,44)) در نظر بگیرید.

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= w_2 - w_1 - (\lambda_{z_2} + \lambda_{z_1})f_n \\ f_n &= k_n \times \delta_n \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda_z f_n = w_2 - w_1 \quad (44)$$

$$\rightarrow \lambda_z \nabla^4 f_n = \nabla^4 (w_2 - w_1) \quad (45)$$

با قرار دادن روابط (45,27,25,21) در رابطه (29) می‌توان ارتباط بین f_n و m_2 را به صورت روابط (47,46) به دست آورد.

$$\frac{\partial \bar{m}_{2x}}{\partial x} = \frac{2k_{\varphi(x)}}{(1-r_x)k_n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \bar{m}_{2y}}{\partial y} = \frac{2k_{\varphi(y)}}{(1-r_y)k_n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} \quad (47)$$

رابطه (48) با قرار دادن روابط (47,46) و (44) در رابطه (43) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \nabla^4 (w_2 - w_1) &= \left(\frac{1+r_x}{2h_3} \right) \left(\frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{2k_{\varphi(x)}}{(1-r_x)k_n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \\ &+ \left(\frac{1+r_y}{2h_3} \right) \left(\frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{2k_{\varphi(y)}}{(1-r_y)k_n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} \\ &- \frac{h_1}{D_1} \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} \right) f_n + \frac{f_{2a}}{D_2} - \frac{f_{1a}}{D_1} \end{aligned} \quad (48)$$

با برابر قرار دادن روابط (48,45) معادله حاکم بر تنش نرمال به صورت روابط (49-53) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^4 f_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f_n}{\partial y^4} - A \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} - C f_n - D = 0 \quad (49)$$

$$A = \frac{\left(\frac{1+r_x}{2h_3} \right) \left(\frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{2k_{\varphi(x)}}{(1-r_x)k_n}}{\lambda_z} \quad (50)$$

$$B = \frac{\left(\frac{1+r_y}{2h_3} \right) \left(\frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{2k_{\varphi(y)}}{(1-r_y)k_n}}{\lambda_z} \quad (51)$$

$$C = \frac{\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1}}{\lambda_z} \quad (52)$$

$$D = \frac{\frac{f_{2a}}{D_2} - \frac{f_{1a}}{D_1}}{\lambda_z} \quad (53)$$

مجموع تنش نرمال در اتصالات لحیمی با نیروی اینرسی ناشی از شتاب قطعه الکترونیکی برابر با رابطه (54) است.

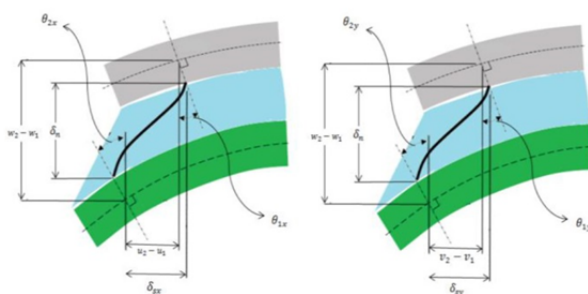


Fig. 5 Deformed state of the electronic board from front and lateral views

شکل 5 تغییر حالت برد از دو نمای روبرو و جانبی

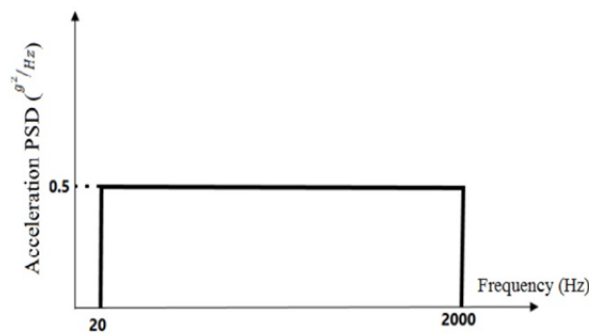


Fig. 6 Base excitation of electronic board

شکل 6 تحریک پایه برد الکترونیکی

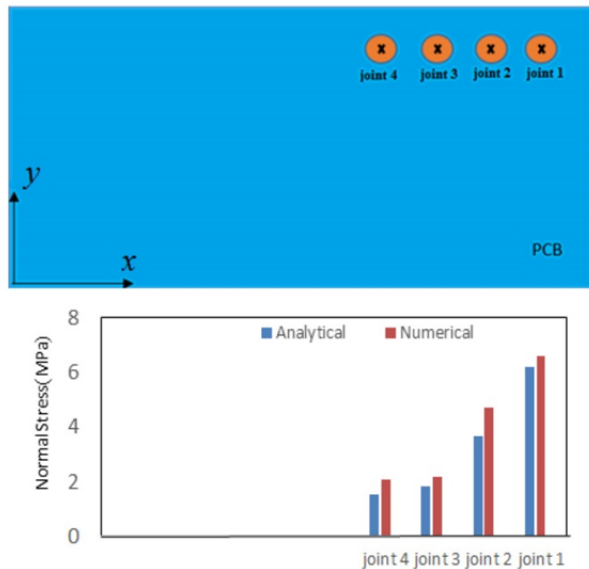


Fig. 7 Root mean square of normal stress in solder joints

شکل 7 انحراف معیار تنش نرمال در اتصالات لحیمی

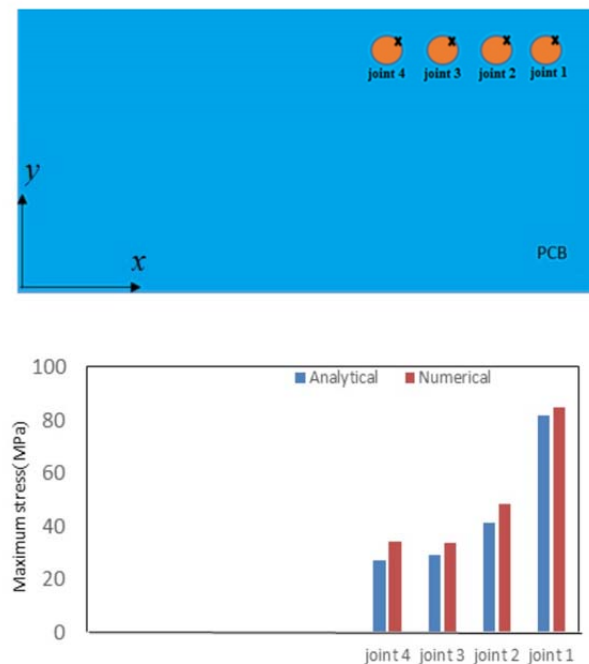


Fig. 8 Root mean square of maximum tangential stress in solder joints

شکل 8 انحراف معیار حداکثر تنش محیطی در اتصالات لحیمی

$$\text{RMS } M_{yIC} = \iint \bar{m}_{1y} dx dy \quad (71)$$

$$\text{RMS } M = \sqrt{\text{RMS } m_x^2 + \text{RMS } m_y^2} \quad (72)$$

$$\text{RMS } \sigma_b = \frac{\text{RMS } M \times p}{I} \quad (73)$$

p برابر شعاع اتصال لحیمی و I برابر ممان اینرسی دوم سطح حول محور خنثی است. ناحیه انتگرال‌های بالا، محل قرار گیری هر اتصال نسبت به مرکز قطعه الکترونیکی است.

4- صحت‌سنجی روابط با مدل المان محدود

برای مقایسه نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و حل المان محدود یک برد الکترونیکی در نظر گرفته شد که مشخصات فیزیکی و مکانیکی آن در جدول 1 نشان داده شده است.

برای متصل کردن قطعه الکترونیکی به برد الکترونیکی از 20 اتصال لحیمی استفاده شده است که نسبت به مرکز برد الکترونیکی به صورت متقارن نصب شده‌اند.

این برد الکترونیکی تحت بارگذاری تحریک از پایه ارتعاش سفید به صورت شکل 6 قرار می‌گیرد.

مدل‌سازی المان محدود این مسأله با نرم‌افزار المان محدود انسیس ورک بنچ 16.1 انجام شد. نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی در شکل‌های 7 و 8 ارائه شده است.

نمودار شکل 7 مقدار مقایسه انحراف معیار تنش در مرکز اتصالات لحیمی را نشان می‌دهد که ناشی از نیروی اینرسی و کرنش اتصال لحیمی است.

در نمودار شکل‌های 7 و 8 بیشترین انحراف معیار تنش به دست آمده از حل‌های تحلیلی و المان محدود مقایسه می‌شود. مقدار انحراف معیار تنش نرمال و تنش ناشی از گشتاور در اتصالات لحیمی واقع در لبه‌ها از دیگر اتصالات بیشتر است. به این دلیل که در فرکانس‌های مختلف جابه‌جایی سطح قطعه الکترونیکی نسبت به سطح برد الکترونیکی در لبه‌ها از دیگر قسمت‌ها بیشتر است. این جابه‌جایی نسبی بیشتر سبب ایجاد تنش نرمال و گشتاور خمشی بزرگ‌تر در لبه‌های قطعه می‌شود. در نتیجه تنش ایجاد شده در اتصالات واقع در لبه‌ها از باقی اتصالات بیشتر است. مقدار انحراف معیار تنش در اتصالات واقع در لبه‌ها از بقیه اتصالات بیشتر خواهد بود.

البته انحراف معیار تنشی که نرم‌افزار تجاری المان محدود ارائه می‌دهد به صورت $\text{RMS}(\sigma_n + \sigma_b)$ است، در حالی که در روش ارائه شده $\text{RMS}(\sigma_n)$ و $\text{RMS}(\sigma_b)$ هرکدام به صورت جداگانه به دست آمده‌اند که می‌توان رابطه آن‌ها را به صورت رابطه (74) تعریف کرد.

جدول 1 خواص مکانیکی و مشخصات فیزیکی برد الکترونیکی

Table 1 Mechanical and physical properties of electronic board

مشخصات	برد الکترونیکی	قطعه الکترونیکی	اتصال لحیمی
طول (cm)	16	4	—
عرض (cm)	8	2	—
ارتفاع (cm)	0.1	0.4	0.1
شعاع (cm)	—	—	0.1
مدول یانگ (GPa)	22.5	27	42.5
چگالی (kg/m^3)	2680	1035	8410
ضریب پواسون	0.12	0.3	0.4

¹ Ansys Workbench 16.1

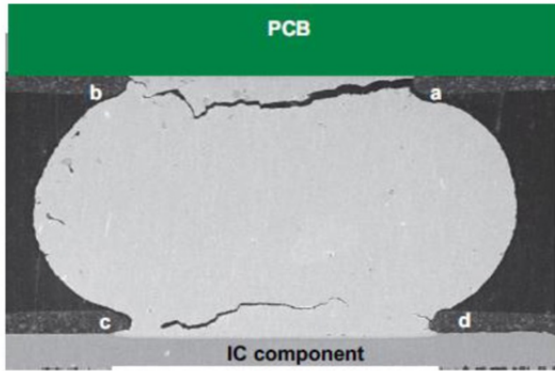


Fig. 10 Crack growth in solder joints near PCB [17]

شکل 10 رشد ترک در اتصالات لحیمی نزدیک برد الکترونیکی [17]

اتصال لحیمی با استفاده از معیار بیشترین تنش محیطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقادیر انحراف معیار تنش که از حل تحلیلی به دست آمده برابر 1σ است. 68.3% تنش‌هایی که در هنگام ارتعاش رخ می‌دهد از این مقدار کمتر است. در صورتی که مقادیر به دست آمده سه برابر شود (3σ) 99.73% تنش‌ها از این مقدار کمتر می‌شود، یعنی به احتمال 99.73% بیشینه تنش اعمالی از این مقدار کمتر است. با توجه به حل تحلیلی مقدار تنش نرمال که در این حل در کل سطح اتصال لحیمی ثابت در نظر گرفته شد برابر 6.17MPa به دست آمد که مقدار سه برابر آن برابر 18.51MPa است، همچنین مقدار گشتاور خمشی در بحرانی‌ترین اتصال لحیمی برابر 0.0588N.m به دست آمد که مقدار سه برابر آن برابر 0.1764N.m است.

با اعمال این دو نیرو احتمال گسترش ترک در بحرانی‌ترین اتصال لحیمی بررسی می‌شود. مقادیر ضرایب شدت تنش مود کشش و برش K_I و K_{II} در 15 نقطه از جبهه بررسی شد که بیشترین مقدار K_I و K_{II} به ترتیب $2.1209 \times 10^6 (\text{Pa.m}^{0.5})$ و $30280 (\text{Pa.m}^{0.5})$ بودند. برای ماده لحیم برابر $2.2 \times 10^6 (\text{Pa.m}^{0.5})$ است. زاویه رشد ترک با استفاده از معیار بیشینه تنش محیطی با حل رابطه (77,76) به دست می‌آید.

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \rightarrow \theta_0 = \pm 3.23^\circ \quad (76)$$

$$\left[\frac{K_I}{K_{IC}} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} \frac{K_{II}}{K_{IC}} \sin \theta_0 \right] \cos \frac{\theta_0}{2} = 0.9617 \quad (77)$$

همچنین با توجه به رابطه (70) که معیار ماکزیمم تنش محیطی است، این ترک در بیشینه تنشی که رخ می‌دهد در آستانه رشد قرار می‌گیرد. با استفاده از راه‌کارهای زیر می‌توان مقدار تنش در اتصالات لحیمی را کاهش داد:

- استفاده از شرایط مرزی گیردار¹: در شرایط کاملاً یکسان استفاده از شرایط تکیه‌گاهی گیردار مقدار بیشینه جابه‌جایی برد الکترونیکی را کاهش می‌دهد، در نتیجه مقدار انحنای برد کمتر می‌شود. این امر باعث می‌شود که فشار کمتری به اتصالات لحیمی وارد شود. البته در شرایط تکیه‌گاهی گیردار مقدار بیشینه شتاب نیز بیشتر است، ولی چون تأثیر انحنای بسیار بیش از تنش اینرسی است در کل سبب کاهش تنش می‌شود.

- افزایش مدول الاستیسیته برد و قطعه الکترونیکی: با افزایش مدول الاستیسیته برد و قطعه الکترونیکی مقاومت برد الکترونیکی در مقابل انحنای بیشتر شده، در نتیجه فشار کمتری به اتصالات لحیمی وارد می‌شود.

¹ Clamp

$$\text{RMS}(\sigma_n + \sigma_b)^2 = \text{RMS}(\sigma_n)^2 + \text{RMS}(\sigma_b)^2 + 2\text{RMS}\sigma_n \times \text{RMS}\sigma_b \times \gamma \quad (74)$$

γ ضریب همبستگی نام دارد که مقدار آن در بازه $[-1, 1]$ متغیر است. با توجه به این که $\text{RMS}(\sigma_b)$ بسیار کوچک‌تر از $\text{RMS}(\sigma_n)$ است (تقریباً 12 برابر) می‌توان از تأثیر مقدار γ $\text{RMS}(\sigma_b) * \text{RMS}(\sigma_n) * 2$ در مقدار $\text{RMS}(\sigma_n + \sigma_b)^2$ چشم‌پوشی کرد و رابطه (75) را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\text{RMS}(\sigma_n + \sigma_b) = \text{RMS}\sigma_n + \text{RMS}\sigma_b \quad (75)$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت تنش در لبه‌ها بیشینه است و هرچه به مرکز برد نزدیک‌تر شویم مقدار آن کاهش خواهد یافت. با دقت در نتایج مقدار تنش ناشی از شتاب قطعه الکترونیکی در ارتعاش تصادفی بسیار کمتر از تنش ناشی از خمش است. می‌توان نتیجه گرفت در این بارگذاری تنش ناشی از خمش سهم عمده در مقدار تنش کل اتصال لحیمی را دارد. شکل‌های 9 و 10 نتایجی از تست‌های آزمایشگاهی انجام شده توسط سایر محققین هستند که نشان می‌دهند بیشتر ترک‌ها از لبه بیرونی و نزدیک به برد الکترونیکی گسترش می‌یابند. این امر می‌تواند تأییدکننده این باشد که مقدار تنش در نزدیکی برد الکترونیکی بیشتر است.

هنگام ارتعاش برد الکترونیکی دو مقدار انحنای برای هر نقطه از برد می‌توان متصور بود. یکی در صفحه $x-z$ که مقدار آن را با $1/R_x$ و دیگری در صفحه $y-z$ است که مقدار آن را با $1/R_y$ نشان داده شد. نتایج نشان داد که هرچه مقدار انحنای بیشتر باشد مقدار تنش نیز بیشتر است. نسبت طول به عرض برد الکترونیکی در مقدار انحنای آن بسیار تأثیر گذار است. به این صورت که اگر نسبت طول به عرض زیاد باشد $1/R_y$ از $1/R_x$ بیشتر است، در نتیجه نقطه‌ای که بیشینه تنش رخ می‌دهد به خطی که موازی محور y از مرکز اتصال لحیمی می‌گذرد، نزدیک‌تر می‌شود و برعکس. یا به عبارت دیگر با توجه به این که مقدار $1/R_y$ از $1/R_x$ بیشتر است، مقدار تنش خمشی ایجاد شده در لبه بیرونی نسبت به محور y از مقدار تنش خمشی ایجاد شده در لبه بیرونی نسبت به محور x بیشتر است. این مورد هم در حل تحلیلی و حل المان محدود مشاهده شده است.

5- بررسی آسیب اتصال لحیمی

در این بخش برای بررسی آسیب اعمالی بر قسمت لحیمی یکی از اتصالات یک ترک نیم بیضوی اولیه که طول ترک (شعاع بزرگ بیضی) برابر $5 \times 10^{-5} \text{m}$ و عمق (شعاع کوچک بیضی) آن $4 \times 10^{-5} \text{m}$ را در نزدیکی سطح برد الکترونیکی در نظر گرفته می‌شود. امکان رشد این ترک در بحرانی‌ترین

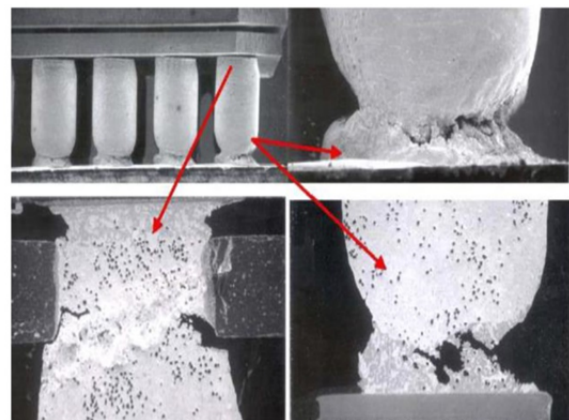


Fig. 9 Crack growth in solder joints near PCB [21]

شکل 9 رشد ترک در اتصالات لحیمی نزدیک برد الکترونیکی [21]

- Vibration*, Vol. 172, No. 2, pp. 211-229, 1994.
- [5] W. Huang, D. B. Kececioglu, J. L. Prince, A simplified random vibration analysis on portable electronic products, *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, Vol. 23, No. 3, pp. 505-515, 2000.
 - [6] Y. Xing, B. Liu, New exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates by symplectic dual method, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 25, No. 2, pp. 265-270, 2009.
 - [7] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of tapered beam under stochastic excitation, *Madares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 138-154, 2012. (in Persian)
 - [8] A. H. Hosseinloo, F. F. Yap, N. Vahdati, Analytical random vibration analysis of boundary-excited thin rectangular plates, *Structural Stability and Dynamics*, Vol. 13, No. 3, 1250062, 2013.
 - [9] G. Chen, J. Zhou, D. Yang, Benchmark solutions of stationary random vibration for rectangular thin plate based on discrete analytical method, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 50, pp. 17-24, 2017.
 - [10] O. Volkersen, Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten, *Luftfahrtforschung*, Vol. 15, No. 1/2, pp. 41-47, 1938.
 - [11] M. Goland, E. Reissner, The stresses in cemented joints, *Applied Mechanics*, Vol. 11, No. 1, pp. 17-27, 1944.
 - [12] R. W. Cornell, Determination of stresses in cemented lap joints, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 20, No. 3, pp. 355-364, 1953.
 - [13] F. Delale, F. Erdogan, M. N. Aydinoglu, Stresses in adhesively bonded joints: A closed-form solution, *Composite Materials*, Vol. 15, No. 3, pp. 249-271, 1981.
 - [14] E. Suhir, On a paradoxical phenomenon related to beams on elastic foundation: Could external compliant leads reduce the strength of a surface-mounted device?, *Applied Mechanics*, Vol. 55, No. 2, pp. 818-821, 1988.
 - [15] D. A. Bigwood, A. D. Crocombe, Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints, *Adhesion and Adhesives*, Vol. 9, No. 4, pp. 229-242, 1989.
 - [16] D. B. Barker, Local PWB and component bowing of an assembly subjected to a bending moment, *Electronic Packaging*, Vol. 116, No. 2, pp. 92-97, 1994.
 - [17] E. H. Wong, C. K. Wong, Approximate solutions for the stresses in the solder joints of a printed circuit board subjected to mechanical bending, *Mechanical Sciences*, Vol. 51, No. 2, pp. 152-158, 2009.
 - [18] Y. Ping, Z. Jie, W. Dongyang, B. Binghao, Research on parametric analysis for stress of Plastic Ball Grid Array solder joint under shock load, *Materials and Product Technology*, Vol. 31, No. 2, pp. 293-304, 2008.
 - [19] M. A. Gharaibeh, Q. T. Su, J. M. Pitarresi, Analytical solution for electronic assemblies under vibration, *Electronic Packaging*, Vol. 138, No. 1, 2016.
 - [20] M. L. Wu, J. S. Lan, Investigation and prediction of solder joint failure analysis for ball grid array package subject to mechanical bending environment, *Soldering & Surface Mount Technology*, Vol. 29, No. 2, pp. 75-84, 2017.
 - [21] R. Ghaffarian, CCGA packages for space applications, *Microelectronics Reliability*, Vol. 46, No. 12, 2006.

- افزایش میرایی سیستم: با افزایش میرایی سیستم مقدار جابه‌جایی و شتاب در برد الکترونیکی کاهش خواهد یافت.
- افزایش شعاع اتصالات لحیمی: هر چند افزایش شعاع سبب افزایش نیرو و گشتاور وارد بر اتصال می‌شود، ولی در کل سبب کاهش تنش می‌شود.
- تقویت اتصالات لحیمی در نقاط بحرانی: با توجه به این که بیشترین تنش در نزدیک برد الکترونیکی و در نزدیکی لبه بیرونی آن اتفاق می‌افتد می‌توان این نقاط را تقویت کرد.
- تنش در اتصال لحیمی یا عوامل زیر کاهش خواهد یافت: کاهش ارتفاع لحیم، کاهش چگالی برد الکترونیکی، افزایش ضخامت قطعه الکترونیکی و....

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش روشی تحلیلی برای به دست آوردن مقدار تنش اتصالات لحیمی در بردهای الکترونیکی تحت بارگذاری ارتعاشات تصادفی ارائه شد. برخلاف روش‌های تحلیلی پیشین در روش ارائه شده برد الکترونیکی به صورت دو بعدی در نظر گرفته شد، سپس با فرض ترک نیم بیضوی اولیه در بحرانی‌ترین اتصال لحیمی، رشد ترک تحت بیشینه بار به دست آمده از حل تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از این روش می‌توان به بررسی آسیب اتصالات لحیمی در بردهای الکترونیکی سامانه‌های فضایی پرداخت.

7- مراجع

- [1] R. C. Leibowitz, Vibroacoustic response of turbulence excited thin rectangular finite plates in heavy and light fluid media, *Sound and Vibration*, Vol. 40, No. 4, pp. 441-495, 1975.
- [2] I. Elishakoff, Random vibrations of orthotropic plates clamped or simply supported all round, *Acta Mechanica*, Vol. 28, No. 1, pp. 165-176, 1977.
- [3] J. Miao, Y. Ouyang, The response of a clamped rectangular plate with viscous damping and non-linear structural damping, *Acta Mechanica Sinica*, pp. 469-479, 1983.
- [4] G. Maymon, Random response of indeterministic structures subjected to stationary random excitation: A practical engineering solution, *Sound and*