



تحلیل غیرخطی کمانش هیگرو ترمومکانیکی پنل استوانه‌ای نازک تقویت شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک

سارا کرمان¹، علیرضا شاترزاده^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 23 مهر 1396
پذیرش: 11 دی 1396
ارائه در سایت: 03 بهمن 1396

کلید واژگان:

پنل استوانه‌ای
مواد مدرج تابعی
پس کمانش
تقویت کننده مایل
بستر الاستیک

چکیده

حل تحلیلی و عددی پنل‌های تقویت شده در صنعت گامی مؤثر در جهت طراحی این گونه سازه‌ها می‌باشد. در این مقاله یک روش تحلیلی به منظور بررسی پایداری غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای نازک تقویت شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک، تحت بارگذاری‌های هیگرو ترمومکانیکی ارائه شده است. تقویت کننده‌ها مایل در نظر گرفته شده‌اند. پنل دارای نقص هندسی اولیه می‌باشد. خصوصیات مواد وابسته به دما بوده و در راستای ضخامت، بر اساس قانون توزیع توانی ساده در نظر گرفته شده است. بستر الاستیک بر اساس مدل پیشنهادی وینکلر و پاسترناک فرض شده است. روابط حاکم بر اساس تکنیک تقویت کننده‌های تکه‌ای لخنیتسکی و تئوری کلاسیک پوسته‌ها و با توجه به الگوی غیرخطی فن کارمن-دائل، استخراج شده است. روابط صریح منحنی خیز-فشار برای پنل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با استفاده از تابع تنش و روش گالرکین به دست آمده است. تأثیر زاویه تقویت کننده، پارامترهای متفاوت ابعادی، شاخص کسر حجمی، نقص هندسی اولیه، سفتی بستر الاستیک و درصد رطوبت بر پس کمانش پنل مدرج تابعی، بررسی شده است. در بارگذاری ترمومکانیکی تأثیر وجود گرادیان دما در ضخامت پنل و تأثیر شرایط مرزی مختلف نیز بررسی شده است. نتایج حاصل با سایر مراجع مورد راستی آزمایی قرار گرفته است.

Nonlinear hygro-thermo-mechanical buckling analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panel on elastic foundations

Sara Karamian, Alireza Shaterzadeh*

Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 October 2017
Accepted 01 January 2018
Available Online 23 January 2018

Keywords:
cylindrical panel
FGM
Postbuckling
spiral stiffener
elastic foundation

ABSTRACT

Exact and numerical solution of eccentrically stiffened panels in the industry is a major step forward in the design of these structures. This paper presents an analytical approach to investigate the nonlinear stability analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panels on elastic foundations subjected to hygro-thermo-mechanical loads. The stiffeners are assumed to be spiral-type. The panel has the initial geometrical imperfection. The material properties are assumed to be temperature-dependent and graded in the thickness direction according to a simple power law distribution. The elastic foundation is considered based on Winkler and Pasternak proposed model. Governing equations are derived basing on the Lekhnitsky smeared stiffeners technique and classical shell theory incorporating Von Karman-Donnell geometrical type nonlinearity. Explicit relations of load-deflection curves for FG cylindrical panels are determined by applying stress function and Galerkin method. The effects of angel of stiffener, different dimensional parameters, volume fraction index, initial geometrical imperfection, the stiffness of elastic foundation and moisture concentration on the postbuckling of FG panel are investigated. Also effects of temperature gradient through the thickness and effects of different boundary conditions are investigated for thermo-mechanical loading. The obtained results are validated by comparing with those in the literature.

1- مقدمه

کمانش پنل‌های کامپوزیتی باید به خوبی بررسی شود. اخیراً، دسته‌ی جدیدی از مواد کامپوزیتی شناخته شده با عنوان مواد مدرج تابعی¹ به‌طور خاص مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران قرار گرفته‌اند. مواد مدرج تابعی نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی هستند که در آن‌ها خواص مکانیکی به‌طور

پنل‌های کامپوزیتی معمولاً در هوافضا، مکانیک، سازه‌های دریایی و دیگر کاربردهای مهندسی، به دلیل وزن سبک، استحکام و سفتی بالا و ویژگی‌های حرارتی مناسب، استفاده می‌شوند. در دماهای بالا، پنل‌های کامپوزیتی بدون حضور بارهای مکانیکی نیز کمانش می‌کنند. بنابراین، پاسخ کمانش و پس-

¹ Functionally graded material (FGM)

Please cite this article using:

S. Karamian, A. Shaterzadeh, Nonlinear hygro-thermo-mechanical buckling analysis of eccentrically stiffened thin FG cylindrical panel on elastic foundations, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 73-83, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ها دیگر مؤثر نیستند. مثال واضح این موضوع، پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده طولی تحت بار شعاعی یا پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده‌ی حلقوی تحت بار محوری و یا پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده طولی-حلقوی تحت بار پیچشی می‌باشد. با پیشرفت سریع تکنولوژی هوا فضا و اهمیت زیاد وزن کم در حمل و نقل هوایی و سازه‌های فضایی، آرایش تقویت‌کننده‌ها باید به شکلی باشد که دستیابی به این مهم امکان‌پذیر باشد [16]. در این میان تقویت‌کننده‌های مایل نسبت به گونه‌های رایج دیگر (طولی و حلقوی) از این مزیت مهم برخوردار می‌باشند. با این وجود مطالعات کمی در این مورد صورت گرفته است. بنابراین مطالعه بر روی رفتار غیرخطی این قبیل سازه‌ها از منظر عملی دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد. در توسعه نتایج تحقیقات صورت گرفته تا به امروز، مقاله‌ی حاضر به تحلیل کمانش غیرخطی پل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر الاستیک همراه با نقص هندسی اولیه تحت بارگذاری‌های هیگروترمو مکانیکی می‌پردازد. بارگذاری‌های سه‌گانه هیگروترمو مکانیکی برای پل استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی، برای اولین بار در این مقاله بررسی شده است.

2- فرمول‌بندی مسأله

2-1- روابط بنیادی و معادلات حاکم

یک پل استوانه‌ای نازک تقویت‌شده مدرج تابعی با شعاع انحنای R ، ضخامت h ، طول محوری a و طول کمان b ، بر بستر الاستیک خطی مطابق شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. پل دارای تقویت‌کننده‌های مایل با زوایای θ و η می‌باشد. d_s ، h_s به ترتیب عرض، ضخامت تقویت‌کننده‌ها و S فاصله‌ی بین دو تقویت‌کننده می‌باشد. شکل 2 نشان‌دهنده زاویه قرار گرفتن تقویت‌کننده‌های مایل می‌باشد. مختصات اصلی x ، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی است.

پل از جنس مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک در نظر گرفته شده است. با اعمال قانون توزیع توانی ساده²، کسر حجمی به‌صورت رابطه (1) می‌باشد [10]:

$$V_m(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^N, \quad V_c(z) = 1 - V_m(z) \quad (1)$$

که h ضخامت پل؛ $(0 \leq N < \infty)$ شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می‌باشد؛ زیرنویس m و c به ترتیب فلز و سرامیک را نشان می‌دهد. خواص مؤثر Pr_{eff} ³ پل مدرج تابعی، به عنوان مثال مدول یانگ E ، ضریب انبساط حرارتی α و ضریب انبساط رطوبتی β بر اساس قانون ترکیب خطی به‌صورت رابطه (2) تعیین می‌شود [10]:

$$Pr_{eff}(z) = Pr_c V_c(z) + Pr_m V_m(z) \quad (2)$$

که Pr نشان‌دهنده یک خاصیت ماده وابسته به دما می‌باشد. خواص مؤثر پل مدرج تابعی از قرار دادن رابطه (1) در رابطه (2) به‌صورت رابطه (3) به‌دست می‌آید:

$$Pr_{eff}(z) = Pr_c + Pr_{mc} \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^N \quad (3)$$

که Pr_{mc} به‌شکل رابطه (4) می‌باشد:

$$Pr_{mc} = Pr_m - Pr_c \quad (4)$$

Pr یک خاصیت ماده وابسته به دما می‌باشد که به صورت یک تابع غیرخطی از دما در رابطه (5) تعریف می‌شود [2,8,1]:

$$Pr = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (5)$$

پیوسته و به آرامی از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کند. سازه‌های مدرج تابعی مانند پل‌های استوانه‌ای در سال‌های اخیر، نقش مهمی را در صنایع مدرن ایفا می‌کنند. در نتیجه پاسخ استاتیکی پل‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی موضوع بسیاری از مطالعات در سال‌های اخیر بوده است.

شن و وانگ [1] تحلیل پس‌کمانش حرارتی پل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با بستر الاستیک را ارائه کردند. آن‌ها [2] همچنین تحلیل خمش غیرخطی پل‌های استوانه‌ای تقویت‌شده از جنس مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده بر بستر الاستیک در محیط‌های حرارتی را انجام دادند. لی و همکاران [3] رفتار ترمومکانیکی پل‌های مدرج تابعی در جریان هوای مافوق صوت را بررسی کردند. علی‌بیگلو و چن [4] حل الاستیسیته‌ی سه بعدی برای تحلیل استاتیکی یک پل استوانه‌ای تقویت‌شده با شرایط مرزی ساده در لبه-ها را توسعه دادند. تانگ و داک [5] به مطالعه‌ی پاسخ غیرخطی پل‌های ضخیم مدرج تابعی و کم‌عمق با دو انحنا بر بستر الاستیک تحت بارگذاری‌های ترمومکانیکی پرداختند. آن‌ها [6] همچنین پاسخ غیرخطی پل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارگذاری فشاری با اثرات دما را مورد بررسی قرار دادند. اقدام و همکاران [7] همچنین یک حل نیمه تحلیلی برای پاسخ استاتیکی پل‌های مدرج تابعی کاملاً مقید با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل-های برشی را ارائه کردند. یانگ و همکاران [8] نتایج تحلیل پس‌کمانش ترمومکانیکی پل‌های استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی با خواص وابسته به دما را ارائه کردند. تانگ [9] یک روش تحلیلی به منظور بررسی اثرات قیود مماس بر لبه در رفتار کمانش و پس‌کمانش پل‌های مسطح و استوانه‌ای مدرج تابعی بر بستر الاستیک تحت بارگذاری ترمومکانیکی را معرفی کرد. داک و همکاران [10] تحلیل پس‌کمانش پل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بر بستر الاستیک همراه با نقص اولیه تحت بارگذاری ترمو-مکانیکی را ارائه دادند. نجفی‌زاده و همکاران [11] کمانش الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی تحت بارگذاری محوری فشاری را بررسی کردند. به‌تازگی دانگ و همکاران [12] پس‌کمانش پوسته-های کم‌عمق با دو انحنا و تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم را بررسی کردند.

از دیگر عوامل مؤثر بر کمانش سازه‌ها عامل رطوبت می‌باشد. زنگور [13] به بررسی اثر هیگروترمو مکانیکی بر روی صفحات مدرج تابعی بر بستر الاستیک پرداخت. او [14] همچنین حل دقیق مسئله تنش حرارتی برای یک سیلندر توخالی ناهمگن پیزوالکتریک هیگروترمال را ارائه کرد. شن [15] اثرات هیگرو-ترمال را بر پس‌کمانش پل‌های استوانه‌ای تحت بار محوری بررسی کرد. سونگ [16] تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل¹ را ارائه داد. کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل تحت بار فشاری و پیچشی یکنواخت در کارین [17] مورد بررسی قرار گرفت. به‌تازگی، شاطرزاده و فروتن پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر الاستیک را بررسی کردند.

مزیت شکل هندسی ساده‌ی تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی از منظر مهندسی واضح است. اما در بحث تقویت‌کننده‌ها وزن کم‌تر حائز اهمیت زیادی می‌باشد. تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی به منظور مقاومت در برابر تغییر شکل در جهت محوری و محیطی طراحی شده‌اند، اما در صورتی که مد بار کمانشی بحرانی برای یک حالت خاص بارگذاری به‌گونه‌ای باشد که تغییر شکل‌هایی در راستای متقاطع با جهت‌های اصلی ایجاد کند این تقویت‌کننده-

² Simple power law distribution

³ Effective properties

¹ Spiral

که ε_x^0 و ε_y^0 مؤلفه‌های کرنش نرمال، γ_{xy}^0 کرنش برشی در سطح میانی پل و k_x ، k_y و k_{xy} تغییرات انحنای و پیچش پل بوده، u و v به ترتیب جابه‌جایی در راستای محوره‌های x و y و z (روی صفحه میانی) و w^* نقص هندسی اولیه می‌باشد. کرنش‌ها در راستای ضخامت پل در فاصله z از سطح میانی به صورت رابطه (8) می‌باشد:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + 2zk_{xy}\end{aligned}\quad (8)$$

رابطه تنش-کرنش برای پل استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده و با در نظر گرفتن تنش‌های حرارتی و رطوبتی، به شکل رابطه (9) بیان می‌شود [13,10]:

$$\begin{aligned}(\sigma_x^{sh}, \sigma_y^{sh}) &= \frac{E(z, T)}{1-\nu^2} \{(\varepsilon_x, \varepsilon_y) + \nu(\varepsilon_y, \varepsilon_x) - (1 + \nu)[\alpha(z, T)\Delta T(1, 1) + \beta(z, T)\Delta C(1, 1)]\} \\ \tau_{xy}^{sh} &= \frac{E(z, T)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (9)$$

که نسبت پواسون ν ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh} ، σ_y^{sh} ، τ_{xy}^{sh} تنش نرمال در مختصات x ، y روی پل و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پل می‌باشد. مقدار افزایش درصد رطوبت به شکل رابطه $\Delta C = C - C_0$ می‌باشد که در آن C درصد رطوبت ورودی بوده و C_0 درصد رطوبت اولیه و برابر با 0% می‌باشد.

روابط تنش-کرنش تقویت‌کننده‌های مایل با در نظر گرفتن تنش‌های حرارتی و رطوبتی، به شکل رابطه (10) خواهد بود [18,10]:

$$\begin{aligned}\sigma_x^s &= Z_1 E_s(T) [\varepsilon_x (\cos^2 \theta + \cos^2 \eta) + \varepsilon_y (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \eta \cos \eta)] - \frac{E_s(T)}{1-2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C] \\ \sigma_y^s &= Z_2 E_s(T) [\varepsilon_x (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \eta \cos^2 \eta) + \varepsilon_y (\sin^3 \theta + \sin^3 \eta)] - \frac{E_s(T)}{1-2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C] \\ \tau_{xy}^s &= Z_3 E_s(T) [2\gamma_{xy} (\sin \theta \cos \theta + \sin \eta \cos \eta)] - \frac{E_s(T)}{1-2\nu} [\alpha_s(T)\Delta T + \beta_s(T)\Delta C]\end{aligned}\quad (10)$$

σ_x^s و σ_y^s به ترتیب تنش‌های نرمال، تنش برشی تقویت‌کننده‌ها و $E_s(T)$ ، $\alpha_s(T)$ و $\beta_s(T)$ به ترتیب مدول یانگ، ضرایب انبساط حرارتی و رطوبتی تقویت‌کننده‌ها با خواص وابسته به دما می‌باشند. به منظور برقراری پیوستگی بین پل و تقویت‌کننده‌ها، جنس تقویت‌کننده‌ها کاملاً فلزی فرض شده است. در رابطه (10) مقادیر ضرایب Z_1 ، Z_2 و Z_3 عبارت است از [18]:

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{d_s}{S} \frac{\sin(\theta + \eta)}{(\sin \theta + \sin \eta)}, \quad Z_2 = \frac{d_s}{S} \frac{\sin(\theta + \eta)}{(\cos \theta + \cos \eta)}, \\ Z_3 &= \frac{d_s}{2S} \sin(\theta + \eta)\end{aligned}\quad (11)$$

از آنجایی که تنش‌های حرارتی و رطوبتی تقویت‌کننده‌ها جزئی بوده و به‌طور یکنواخت در تمام پل توزیع می‌شود، از آن‌ها صرف‌نظر شده است. با استفاده از روابط تنش-کرنش به‌دست آمده به محاسبه منته‌های نیرو و ممان پرداخته شده است. معادلات منته‌های نیرو و ممان برای پل استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی به‌صورت روابط (12) و (13) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{14}k_x + A_{15}k_y + \varphi_1 \\ N_y &= A_{21}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{24}k_x + A_{25}k_y + \varphi_1 \\ N_{xy} &= A_{33}\gamma_{xy}^0 + 2A_{36}k_{xy}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}M_x &= A_{14}\varepsilon_x^0 + A_{15}\varepsilon_y^0 + A_{41}k_x + A_{42}k_y + \varphi_2 \\ M_y &= A_{24}\varepsilon_x^0 + A_{25}\varepsilon_y^0 + A_{51}k_x + A_{52}k_y + \varphi_2 \\ M_{xy} &= A_{36}\gamma_{xy}^0 + 2A_{63}k_{xy}\end{aligned}\quad (13)$$

در روابط بالا پارامترهای حرارتی-رطوبتی φ_1 و φ_2 به شکل رابطه (14)

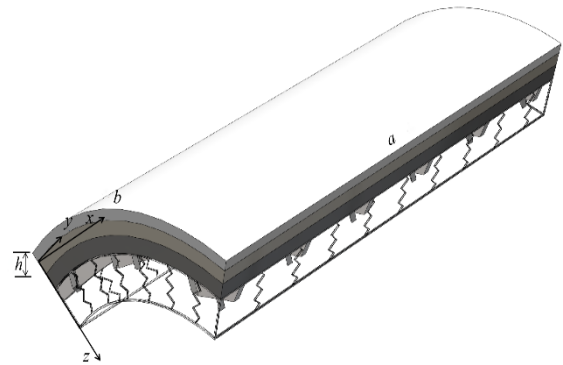


Fig. 1 Stiffened cylindrical panel on elastic foundations

شکل 1 پل استوانه‌ای تقویت‌شده بر بستر الاستیک

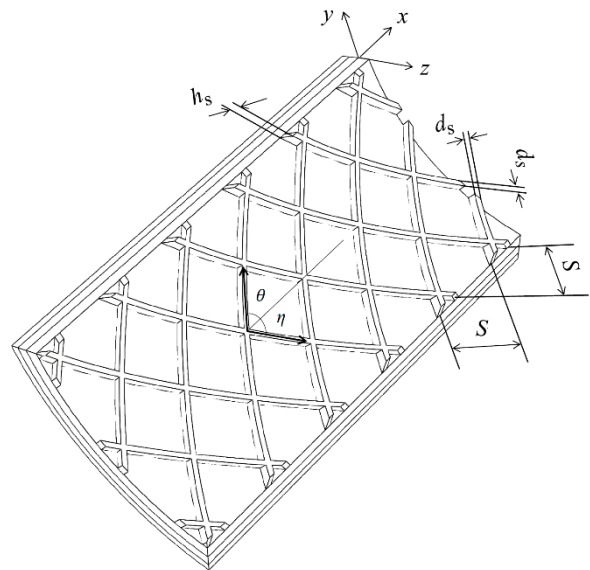


Fig. 2 Display of cylindrical panel with spiral stiffeners

شکل 2 نمایش پل استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل

که ΔT مقدار افزایش دمای محیطی است که پل در آن قرار دارد و $T_0 + \Delta T$ دمای محیط بوده و برابر با 300 K می‌باشد. P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 ضرایب دمایی هستند که برای هر ماده مشخص می‌بایست از جداول استخراج گردد. نیروی بستر الاستیک با توجه به مدل پاسترناک¹ مطابق با رابطه (6) می‌باشد:

$$q_e = k_1 w - k_2 \nabla^2 w \quad (6)$$

که در این رابطه $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ، w خیز پل، k_1 مدول بستر وینکلر² و k_2 سفتی لایه برشی بر اساس مدل پاسترناک³ می‌باشد. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها و روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن-دانل³، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی پل استوانه‌ای به شکل رابطه (7) می‌باشد [20,19,12]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (7)$$

¹ Pasternak model

² Winkler

³ Von Karman-Donnell

⁴ Poisson's ratio

میباشند:

$$\begin{aligned} D_{22}^* &= A_{24}B_{12}^* + A_{25}B_{22}^* + A_{52}, \\ D_{21}^* &= A_{24}B_{11}^* + A_{25}B_{21}^* + A_{51}, D_{36}^* = A_{36}B_{36}^* - A_{63} \\ C_{11}^* &= A_{14}C_{11} + A_{15}C_{21}, C_{21}^* = A_{24}C_{11} + A_{24}C_{21}^* \end{aligned} \quad (22)$$

از جای‌گذاری معادله (17) در معادله (21) و سپس جای‌گذاری معادله به-

دست آمده در معادله سوم تعادل (15-ج)، رابطه (23) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} B_{21}^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + B_{12}^* \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{36}^*) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - (D_{12}^* + D_{21}^* - 4D_{36}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + q - k_1 w + k_2 \nabla^2 w \\ = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

با جای‌گذاری رابطه (20) در معادله (16) رابطه (24) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} A_{11}^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + A_{22}^* \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + (A_{33}^* - A_{12}^* - A_{21}^*) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - B_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - (B_{11}^* + B_{22}^* + 2B_{36}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

معادلات (23) و (24) معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و f می‌باشند. آن‌ها برای تحلیل پایداری غیرخطی پل‌های استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرند.

2-2- تحلیل کمانش مکانیکی

شرایط تکیه گاهی پل، ساده¹ می‌باشد. بسته به شرایط لبه‌ها، شرایط مرزی به سه حالت زیر تعریف می‌شوند:

حالت 1: چهار لبه پل استوانه‌ای دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده بوده و متحرک² می‌باشند. در این حالت شرایط مرزی به‌شکل رابطه (25) می‌باشد:

$$\begin{aligned} w = N_{xy} = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ در } x = 0, a \\ w = N_{xy} = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ در } y = 0, b, \end{aligned} \quad (25)$$

حالت 2: چهار لبه پل استوانه‌ای دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده بوده و ثابت³ می‌باشند. در این حالت شرایط مرزی به‌شکل رابطه (26) می‌باشد:

$$\begin{aligned} w = u = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ در } x = 0, a \\ w = v = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ در } y = 0, b, \end{aligned} \quad (26)$$

حالت 3: تمامی لبه‌های پل استوانه‌ای دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد. دو لبه در $x=0, a$ متحرک و دو لبه دیگر در $y=0, b$ ثابت می‌باشند. در این حالت شرایط مرزی به‌صورت رابطه (27) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} w = N_{xy} = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ در } x = 0, a \\ w = v = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ در } y = 0, b, \end{aligned} \quad (27)$$

که N_{x0} و N_{y0} بارهای فشاری صفحه‌ای⁴ در لبه‌های متحرک (حالت 1 و اولین قسمت از حالت 3) یا بارهای فشاری ایجادشده در لبه‌های ثابت (حالت 2 و قسمت دوم از حالت 3) می‌باشند. شرایط مرزی (25) تا (27) با در نظر گرفتن خیز پل به‌شکل رابطه (28)، ارضا خواهند شد:

$$w(x, y) = W \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \quad (28)$$

که $\delta_n = n\pi/b$ و $\lambda_m = m\pi/a$ بوده و $m, n = 1, 2, \dots$ اعداد طبیعی هستند

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) [\alpha(z) \Delta T(1, z) \\ + \beta(z) \Delta C(1, z)] dz \end{aligned} \quad (14)$$

A_{ij} مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شدهی پل می‌باشند که مقدار آن‌ها در پیوست ارائه شده است. N_x, N_y و N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروی برشی در صفحه می‌باشند. M_x, M_y و M_{xy} نیز به ترتیب گشتاورهای خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند. معادلات تعادل غیرخطی پل با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها در رابطه (15) ارائه شده است:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (15-الف)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (15-ب)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{N_y}{R} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \right] \\ + q - k_1 w + k_2 \nabla^2 w = 0 \end{aligned} \quad (15-ج)$$

q فشار خارجی است که به‌صورت یکنواخت بر سطح پل توزیع شده است. معادله سازگاری به‌شکل رابطه (16) می‌باشد [20,19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به دو معادله اول تعادل (15-الف) و (15-ب)، تابع تنش $f(x, y)$ به- صورت رابطه (17) تعریف می‌شود:

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

با مرتب‌سازی رابطه (12) بر حسب کرنش‌ها رابطه (18) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + B_{11}^* k_x + B_{12}^* k_y + C_{11}^* \varphi_1 \\ \varepsilon_y^0 &= A_{11}^* N_y - A_{21}^* N_x + B_{21}^* k_x + B_{22}^* k_y + C_{21}^* \varphi_1 \\ \gamma_{xy}^0 &= A_{33}^* N_{xy} - 2B_{36}^* k_{xy} \end{aligned} \quad (18)$$

ضرایب رابطه (18) به‌صورت رابطه (19) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, A_{11}^* = \frac{A_{11}}{\Delta}, A_{22}^* = \frac{A_{22}}{\Delta}, A_{21}^* = \frac{A_{21}}{\Delta}, \\ A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{33}^* = \frac{1}{A_{33}}, B_{36}^* = \frac{A_{36}}{A_{33}} \\ B_{11}^* = A_{24}A_{12}^* - A_{14}A_{22}^*, B_{22}^* = A_{15}A_{21}^* - A_{25}A_{11}^*, \\ C_{11}^* = A_{12}^* - A_{22}^*, C_{21}^* = A_{21}^* - A_{11}^*, \\ B_{12}^* = A_{25}A_{12}^* - A_{15}A_{22}^*, B_{21}^* = A_{14}A_{21}^* - A_{24}A_{11}^* \end{aligned} \quad (19)$$

از جای‌گذاری رابطه (17) در معادله (18) رابطه (20) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= A_{22}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - A_{12}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - B_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{11}^* \varphi_1 \\ \varepsilon_y^0 &= A_{11}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A_{21}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{21}^* \varphi_1 \\ \gamma_{xy}^0 &= -A_{33}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2B_{36}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (20)$$

با جای‌گذاری معادله (18) در معادله (13)، رابطه (21) حاصل می‌شود:

ضرایب رابطه (21) به شکل رابطه (22) می‌باشد:

$$\begin{aligned} M_x &= B_{11}^* N_x + B_{21}^* N_y + D_{11}^* k_x + D_{12}^* k_y + C_{11}^* \varphi_1 + \varphi_2 \\ M_y &= B_{12}^* N_x + B_{22}^* N_y + D_{21}^* k_x + D_{22}^* k_y + C_{21}^* \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_{11}^* &= A_{14}A_{22}^* - A_{15}A_{21}^*, B_{21}^* = A_{15}A_{11}^* - A_{14}A_{12}^* \\ B_{12}^* &= A_{24}A_{22}^* - A_{25}A_{21}^*, B_{22}^* = A_{25}A_{11}^* - A_{24}A_{12}^* \\ D_{12}^* &= A_{14}B_{12}^* + A_{15}B_{22}^* + A_{42}, \end{aligned}$$

¹ Simply support

² Freely movable (FM)

³ Immovable (IM)

⁴ In-plane compressive loads

$$q = b_1^1 \bar{W} + b_2^1 \bar{W}(\bar{W} + \mu) + b_3^1 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + b_4^1 \bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) \quad (35)$$

ضرایب رابطه (35) در پیوست ارائه شده است. برای حالتی که فشار محوری F_x به‌طور یکنواخت بر روی دو لبه انحنا دار پل در $x=0, a$ در غیاب فشار خارجی و بارهای حرارتی، اعمال می‌شود منته‌های نیروی پیش از کمانش^۴ عبارتند از:

$$q = 0. N_{y0} = 0. N_{x0} = -F_x h \quad (36)$$

با جای‌گذاری رابطه (36) در رابطه (33)، معادله (37) حاصل می‌شود:

$$F_x = b_1^2 \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + b_2^2 \bar{W} + b_3^2 \frac{\bar{W}(\bar{W} + 2\mu)}{\bar{W} + \mu} + b_4^2 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) \quad (37)$$

ضرایب رابطه (37) در پیوست ارائه شده اند.

3-2- تحلیل کمانش هیگروترمال

در این حالت پل در معرض محیط حرارتی و رطوبتی قرار دارد. شرایط عدم حرکت در لبه‌ها با اعمال شرایط $u = 0$ در $x = 0, a$ و $v = 0$ در $y = 0, b$ در رابطه (38) برقرار خواهد شد [1]:

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0, \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy dx = 0 \quad (38)$$

با استفاده از روابط (7) و (20)، رابطه (39) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A_{22}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - A_{12}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - B_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{11}^* \varphi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= A_{11}^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A_{21}^* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{21}^* \varphi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{w}{R} \end{aligned} \quad (39)$$

از جای‌گذاری روابط (28)، (29) و (31) در معادله (39) و سپس جای‌گذاری نتایج به‌دست آمده در رابطه (38)، بارهای فشاری ایجادشده در لبه‌ها مطابق روابط (40) و (41) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_{x0} &= \varphi_1 + \frac{4}{mn\pi^2} \left\{ \frac{\lambda_m^2 \delta_n^2}{R} \frac{1}{M_3} + \delta_n^2 \frac{M_1}{M_3} \right. \\ &\quad - \frac{1}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} [(B_{11}^* A_{11}^* + B_{21}^* A_{12}^*) \lambda_m^2 \\ &\quad + (B_{12}^* A_{11}^* + B_{22}^* A_{12}^*) \delta_n^2 + \frac{A_{12}^*}{R}] W \\ &\quad \left. + \frac{1}{8(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} (A_{11}^* \lambda_m^2 - A_{12}^* \delta_n^2) W(W + 2\mu h) \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} N_{y0} &= \varphi_1 + \frac{4}{mn\pi^2} \left\{ \frac{\lambda_m^4}{R} \frac{1}{M_3} + \lambda_m^2 \frac{M_1}{M_3} - \frac{1}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} \right. \\ &\quad \left. (B_{11}^* A_{21}^* + B_{21}^* A_{22}^*) \lambda_m^2 + (B_{12}^* A_{21}^* + B_{22}^* A_{22}^*) \delta_n^2 + \frac{A_{22}^*}{R} \right\} W \\ &\quad + \frac{1}{8(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} (A_{21}^* \lambda_m^2 - A_{22}^* \delta_n^2) W(W + 2\mu h) \end{aligned} \quad (41)$$

از جای‌گذاری رابطه (40) در معادله (33)، رابطه (42) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\lambda_m^2} \left[-\frac{\lambda_m^2 (M_1 + M_2)}{R} \frac{1}{M_3} - \frac{M_1 M_2}{M_3} - \frac{\lambda_m^4}{R^2} \frac{1}{M_3} - D_{11}^* \lambda_m^4 - (D_{12}^* \right. \\ &\quad + D_{21}^* - 4D_{36}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 - D_{22}^* \delta_n^4 - k_2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) \\ &\quad \left. - k_1 \right] \frac{W}{W + \mu h} + \left\{ \frac{3mn\pi^2}{R} \frac{1}{M_3} + \frac{20\delta_n^2}{3mn\pi^2} \frac{M_1}{M_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{mn\pi^2} \frac{1}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} [(B_{11}^* A_{11}^* + B_{21}^* A_{12}^*) \lambda_m^2 \right. \\ &\quad \left. + (B_{12}^* A_{11}^* + B_{22}^* A_{12}^*) \delta_n^2 + \frac{A_{12}^*}{R}] W \right\} \end{aligned}$$

و به ترتیب نشان‌دهنده تعداد نیم‌موج در جهت x و y می‌باشند. W دامنه خیز^۱ می‌باشد. همچنین نقص هندسی اولیه w^* با رابطه‌ای مشابه با فرم معادله خیز پل w ، به‌شکل رابطه (29) تعریف می‌شود:

$$w^*(x, y) = \mu h \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \quad (29)$$

که در این رابطه ضریب μ نشان‌دهنده اندازه نقص بوده و دارای مقداری بین 0 و 1 می‌باشد. با جای‌گذاری معادلات (28) و (29) در معادله (24) معادله‌ای با مشتقات جزئی^۲ از مرتبه 4 به‌شکل رابطه (30) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 2A_{11}^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2A_{22}^* \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + 2(A_{33}^* - A_{12}^* - A_{21}^*) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \\ = (\lambda_m^2 \delta_n^2) W(W + 2\mu h) \cos 2\lambda_m x + (\lambda_m^2 \delta_n^2) W(W + 2\mu h) \cos 2\delta_n y \\ + 2[B_{21}^* \lambda_m^4 + B_{12}^* \delta_n^4 + (B_{11}^* + B_{22}^*) \\ + 2B_{36}^*] \lambda_m^2 \delta_n^2 + \frac{1}{R} \lambda_m^2 W \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \end{aligned} \quad (30)$$

رابطه (30) یک معادله با مشتقات جزئی ناهمگن است. برای حل این معادله یک جواب، مشابه با جمله ناهمگن رابطه (30) با ضرایب مجهول حدس زده می‌شود و با جای‌گذاری در معادله، ضرایب مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$f = A_1 \cos 2\lambda_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \lambda_m x \sin \delta_n y + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 \quad (31)$$

باید توجه نمود که دوجمله آخر اضافه‌شده به تابع تنش برای ارضا نمودن رابطه (17) می‌باشند. ضرایب A_i به‌شکل رابطه (32) می‌باشند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\delta_n^2}{32A_{11}^* \lambda_m^2} W(W + 2\mu h), A_2 = \frac{\lambda_m^2}{32A_{22}^* \delta_n^2} W(W + 2\mu h) \\ A_3 &= \frac{(B_{21}^* \lambda_m^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* + 2B_{36}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + B_{12}^* \delta_n^4 + \frac{1}{R} \lambda_m^2)}{(A_{11}^* \lambda_m^4 + (A_{33}^* - A_{12}^* - A_{21}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + A_{22}^* \delta_n^4)} W \end{aligned} \quad (32)$$

با قرار دادن روابط (28)، (29) و (31) در رابطه (23) و اعمال روش گالرکین^۳ در بازه $0 \leq y \leq b$ و $0 \leq x \leq a$ پاسخ غیرخطی استاتیکی پل استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{mn\pi^2}{4\lambda_m \delta_n} \left[-\frac{\lambda_m^2 (M_1 + M_2)}{R} \frac{1}{M_3} - \frac{M_1 M_2}{M_3} - \frac{\lambda_m^4}{R^2} \frac{1}{M_3} - D_{11}^* \lambda_m^4 - (D_{12}^* \right. \\ \left. + D_{21}^* - 4D_{36}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 - D_{22}^* \delta_n^4 - k_2 (\lambda_m^2 + \delta_n^2) - k_1 \right] W \\ + \frac{8\lambda_m \delta_n}{3} \left[\frac{M_1}{M_3} + \frac{\lambda_m^2}{R} \frac{1}{M_3} \right] W(W + \mu h) + \left[\frac{\delta_n}{6A_{11}^* R \lambda_m} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left(\frac{B_{21}^*}{A_{11}^*} + \frac{B_{12}^*}{A_{22}^*} \right) \lambda_m \delta_n \right] W(W + 2\mu h) - \frac{mn\pi^2}{64\lambda_m \delta_n} \left(\frac{\lambda_m^4}{A_{22}^*} \right. \\ \left. + \frac{\delta_n^4}{A_{11}^*} \right) W(W + \mu h)(W + 2\mu h) - \frac{mn\pi^2}{4\lambda_m \delta_n} (N_{x0} \lambda_m^2 \\ + N_{y0} \delta_n^2)(W + \mu h) + \frac{4}{\lambda_m \delta_n} \frac{N_{y0}}{R} + \frac{4}{\lambda_m \delta_n} q = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

در رابطه بالا m و n اعداد فرد هستند و عبارات M_1 ، M_2 و M_3 به‌صورت رابطه (34) می‌باشند:

$$\begin{aligned} M_1 &= [B_{21}^* \lambda_m^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* + 2B_{36}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + B_{12}^* \delta_n^4] \\ M_2 &= [B_{21}^* \lambda_m^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{36}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 - B_{12}^* \delta_n^4] \\ M_3 &= [A_{11}^* \lambda_m^4 + (A_{33}^* - A_{12}^* - A_{21}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + A_{22}^* \delta_n^4] \end{aligned} \quad (34)$$

در ادامه تحلیل کمانش پل تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه شده است. پل استوانه‌ای با لبه‌های متحرک که فشار خارجی یکنواخت بر روی سطح بالایی آن اعمال می‌شود در نظر گرفته شده است. در این حالت از جای‌گذاری $N_{x0} = N_{y0} = 0$ به‌دست می‌آید:

¹ Amplitude of deflection

² PDE

³ Galerkin method

⁴ prebuckling

$$q = b_1^5 \bar{W} + b_2^5 \bar{W}(\bar{W} + \mu) + b_3^5 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + b_4^5 \bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) + b_5^5 (P\Delta T + F\Delta C)(\bar{W} + \mu) + b_6^5 (P\Delta T + F\Delta C) \quad (47)$$

ضرایب b_1^5 تا b_6^5 در پیوست ارائه شده است.

در حالت توزیع دمای خطی، دما در راستای ضخامت پل از معادله یک‌بعدی فوریه در شرایط حالت پایدار پیروی می‌کند [6]:

$$\frac{d}{dz} \left[K(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad T(z = h/2) = T_c, \quad T(z = -h/2) = T_m \quad (48)$$

که T_c و T_m به ترتیب دمای سطح سرامیکی و فلزی می‌باشند. حل معادله (48) به‌صورت یک سری چندجمله‌ای می‌باشد که با استفاده از هفت جمله اول این سری پاسخ توزیع دما در راستای ضخامت پل به‌شکل رابطه (49) حاصل می‌شود:

$$T(z) = T_m + \Delta T \frac{r \sum_{k=0}^5 \frac{(-r^N K_{cm}/K_m)^k}{kN+1}}{\sum_{k=0}^5 \frac{(-K_{cm}/K_m)^k}{kN+1}} \quad (49)$$

که در این رابطه $\Delta T = T_c - T_m$ اختلاف دما بین سطح سرامیکی و فلزی پل مدرج تابعی می‌باشد. r و K_{cm} به‌صورت معادله (50) می‌باشد:

$$r = (2z + h)/2h, \quad K_{cm} = K_c - K_m \quad (50)$$

K_c و K_m به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی سرامیک و فلز می‌باشند، و دمای سطح فلزی به عنوان دمای مرجع در نظر گرفته می‌شود. از جای‌گذاری معادله (48) در رابطه (14) با فرض $\Delta C = 0$ ، رابطه (51) حاصل می‌شود:

$$\varphi_1 = Hh\Delta T, \quad H = \frac{\sum_{k=0}^5 \frac{(-K_{cm}/K_m)^k}{kN+1} \left[\frac{E_m \alpha_m}{(k+2)N+2} + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{(k+1)N+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{(k+2)N+2} \right]}{\sum_{k=0}^5 \frac{(-K_{cm}/K_m)^k}{kN+1}} \quad (51)$$

در معادله (46) و (47) با جایگزین کردن H به جای P منحنی‌های پس-کمانش در حالت بارگذاری هیگروترمو مکانیکی در شرایط توزیع دمای خطی در راستای ضخامت پل، حاصل می‌شود. در اینجا به‌سبب مختصرنویسی از تکرار دوباره روابط خودداری شده است.

3- نتایج عددی

به منظور اعتبارسنجی فرمول‌بندی حاضر، در شکل 3 نتایج مطالعه حاضر با نتایج موجود در مقاله شن و همکاران [21] برای پس‌کمانش پل استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده مقایسه شده است. همچنین نتایج پس‌کمانش پل استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی تحت بارگذاری حرارتی، با نتایج موجود در مقاله داک و همکاران [10] در شکل 4 مقایسه شده است.

در ادامه، نتایج حاصل از تحلیل حاضر ارائه شده است. بدین منظور اندازه کلیه پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل کمانش پل در جدول‌های 1 و 2 بیان شده است. در صورتی که اندازه پارامتری با اندازه پارامترهای موجود در جدول‌ها، متفاوت باشد، اندازه آن پارامتر بیان می‌شود. با توجه به این‌که پاسخ کمانش و پس‌کمانش پل‌های استوانه‌ای اغلب در مدهای کمانش $m=n=1$ بیان می‌شوند [9]، در این مقاله نیز نتایج بر اساس همین مقادیر حاصل شده‌اند.

برای ترسیم منحنی‌های خیز-بار برای بارهای حرارتی و ترمو مکانیکی، کافی است در روابط (45) تا (47) مقدار تغییرات درصد رطوبت (ΔC) برابر با صفر قرار داده شود. در شکل‌های 5 تا 7 به بررسی نتایج تحلیل استاتیکی پل استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل برای زوایای مختلف تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و ترمو مکانیکی پرداخته شده است. برای بررسی نتایج حاصل، در هر بارگذاری ابتدا با تغییر زوایای تقویت‌کننده‌های

$$+ \frac{4}{mn\pi^2} \left[\frac{\delta_n^2}{6A_{11}^* \lambda_m^2 R} - \frac{2}{3} \left(\frac{B_{21}^{**}}{A_{11}^*} + \frac{B_{12}^{**}}{A_{22}^*} \right) \delta_n^2 \right] \frac{W(W + 2\mu h)}{(W + \mu h)} - \frac{1}{16\lambda_m^2} \left(\frac{A_{11}^* \lambda_m^4 + A_{22}^* \delta_n^4}{A_{11}^* A_{22}^*} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{A_{11}^* \lambda_m^2 + A_{12}^* \delta_n^2}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} \right) W(W + 2\mu h) \quad (42)$$

پارامتر φ_1 با توجه به رابطه (14) به‌شکل معادله (43) می‌باشد:

$$\varphi_1 = -Ph\Delta T - Fh\Delta C \quad (43)$$

که در این رابطه P و F به شکل رابطه (44) می‌باشد:

$$(P, F) = \frac{1}{1-\nu} \left[E_c(\alpha_c, \beta_c) + \frac{E_{mc}(\alpha_c, \beta_c) + E_c(\alpha_{mc}, \beta_{mc})}{N+1} + \frac{E_{mc}(\alpha_{mc}, \beta_{mc})}{2N+1} \right] \quad (44)$$

با جای‌گذاری رابطه (43) در رابطه (42)، رابطه (45) جهت محاسبه کمانش هیگروترمو مال حاصل می‌شود:

$$\Delta T = b_1^3 \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + b_2^3 \bar{W} + b_3^3 \frac{\bar{W}(\bar{W} + 2\mu)}{\bar{W} + \mu} + b_4^3 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) - \frac{F}{P} \Delta C \quad (45)$$

ضرایب رابطه (45) در پیوست ارائه شده است.

معادله (45) نشان‌دهنده رابطه خیز-بار برای پس‌کمانش پل استوانه‌ای مدرج تابعی می‌باشد و برای ترسیم منحنی‌های پس‌کمانش پل تحت بار هیگروترمو مال استفاده می‌شود. دو طرف این معادله وابسته به دما می‌باشد که این امر، مسئله را بسیار پیچیده کرده است. الگوریتم تکرار برای تعیین روابط خیز-بار در یک دوره کمانش پل استفاده می‌شود. برای توضیح بهتر، با ورود اطلاعاتی چون شاخص کسر حجمی N ، پارامترهای هندسی $(b/a, b/h, b/R)$ و مقدار W/h ، می‌توان ΔT را از معادله (44) به‌دست آورد. در ابتدا با فرض $\Delta T = 0$ یعنی $(T=T_0=300K)$ ، یک مقدار اولیه برای ΔT_1 در سمت راست معادله در نظر گرفته می‌شود. در مرحله بعد ΔT به‌دست آمده از مرحله قبل، در سمت راست معادله، جایگزین می‌شود تا ΔT_2 مشخص شود. در صورت برقراری شرایط $|\Delta T - \Delta T_k| \leq \varepsilon$ ، فرایند تکرار در k امین مرحله متوقف خواهد شد. در این‌جا ΔT پاسخ دلخواه دما و ε تلورانس مراحل تکرار می‌باشد.

4-2- تحلیل کمانش هیگروترمو مکانیکی

کمانش هیگروترمو مکانیکی پل برای دو حالت توزیع دمای یکنواخت و خطی در راستای ضخامت پل بررسی می‌شود (توزیع رطوبت در هر دو حالت یکنواخت می‌باشد):

در حالت توزیع دمای یکنواخت دمای محیط به‌طور یکنواخت از دمای اولیه T_i تا دمای نهایی T_f افزایش پیدا می‌کند که در نتیجه اختلاف دما $(\Delta T = T_f - T_i)$ مقداری ثابت می‌باشد.

برای پل با شرایط مرزی حالت 2، هنگامی که در معرض افزایش دمای یکنواخت ΔT و فشار یکنواخت q قرار گیرد از جای‌گذاری معادله (43) در روابط (40) و (41) و سپس جای‌گذاری نتیجه حاصل در معادله (33)، رابطه (46) حاصل می‌شود:

$$q = b_1^4 \bar{W} + b_2^4 \bar{W}(\bar{W} + \mu) + b_3^4 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + b_4^4 \bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) + b_5^4 (P\Delta T + F\Delta C)(\bar{W} + \mu) + b_6^4 (P\Delta T + F\Delta C) \quad (46)$$

ضرایب معادله (46) در پیوست ارائه شده است.

برای پل با شرایط مرزی حالت 3 از جای‌گذاری معادله (43) در رابطه (41) و سپس جای‌گذاری نتیجه حاصل در معادله (33)، تحلیل دیگری از کمانش هیگروترمو مکانیکی حاصل می‌شود که به‌صورت رابطه (47) به‌دست می‌آید:

جدول 1 پارامترهای استفاده‌شده برای تحلیل پس‌کمانش پل استوانه‌ای تقویت‌شده
Table 1 Parameters used for postbuckling analysis of stiffened cylindrical panel

پارامتر	نماد	مقدار
ضخامت پل	h (m)	0.04
نسبت طول کمان به طول محوری پل	b/a	1
نسبت طول کمان به ضخامت پل	b/h	50
نسبت طول کمان به شعاع انحنا پل	b/R	0.5
ضخامت تقویت‌کننده‌ها	h_s (m)	0.03
عرض تقویت‌کننده‌ها	d_s (m)	0.05
فاصله بین تقویت‌کننده‌ها	S (m)	0.4
شاخص کسر حجمی	N	1
اندازه نقص	μ	0.1
مدول بستر وینکلر (بی‌بعد)	K_1	100
مدول سفتی لایه برشی پسترناک (بی‌بعد)	K_2	30
نسبت پواسون	ν	0.3
دمای محیط	T_0 (K)	300

همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر سه نوع بارگذاری مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی، با افزایش زاویه‌ی تقویت‌کننده‌ها، ظرفیت تحمل بار پل کمتر می‌شود. بیشترین ظرفیت تحمل بار مربوط به پل با تقویت‌کننده‌های طولی ($\theta = \eta = 0^\circ$) و کمترین ظرفیت تحمل بار مربوط به تقویت‌کننده‌های حلقوی ($\theta = \eta = 90^\circ$) می‌باشد.

با بررسی تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر نتایج پس‌کمانش پل استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی مشاهده می‌شود که در همه بارگذاری‌های اعمال‌شده، بهترین نتایج در شرایطی حاصل می‌شود که تقویت‌کننده‌ها طولی باشند. در ادامه تأثیر سایر پارامترها بر پس‌کمانش پل با تقویت‌کننده‌های طولی تحت بارگذاری‌های ذکرشده، ارائه شده است.

شکل‌های 8 و 9 به ترتیب نتایج تأثیر پارامترهای هندسی b/a ، b/h و b/R را بر پاسخ غیرخطی پل نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت b/h ظرفیت تحمل بار پل کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر هرچه پل نازک‌تر شود ظرفیت تحمل بار آن کمتر می‌شود. همچنین افزایش نسبت b/a و b/R سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پل می‌شود. همچنین تأثیر نقص هندسی اولیه با ضریب μ بر پس‌کمانش پل استوانه‌ای در شکل 8 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وجود نقص هندسی اولیه سبب کاهش ظرفیت تحمل بار پل می‌گردد.

مایل، زاویه‌ای که در آن‌ها بهترین نتایج حاصل‌شده است را یافته و سپس به بررسی اثر سایر پارامترها در آن زوایا پرداخته شده است. شکل‌های 5 و 6، تأثیر زوایای مختلف بر منحنی پس‌کمانش پل با تقویت‌کننده‌های مایل به ترتیب تحت فشار محوری و بارگذاری حرارتی را نشان می‌دهد. در این شکل‌ها نتایج پس‌کمانش پل برای زوایای مختلف تقویت‌کننده با تغییر در زاویه θ از 0° تا 90° و زاویه η برای سه مقدار 0° ، 30° و 90° ارائه شده است. شکل 7 تأثیر زوایای مختلف بر منحنی پس‌کمانش پل با دو لبه ثابت و توزیع دمای یکنواخت، چهار لبه ثابت و توزیع دمای خطی در راستای ضخامت پل، تحت بار ترمومکانیکی را نشان می‌دهد. در این شکل به دلیل تشابه در نتایج حاصل، از ارائه همه آن‌ها خودداری شده است و تنها چند منحنی شاخص از بین نتایج ارائه شده است.

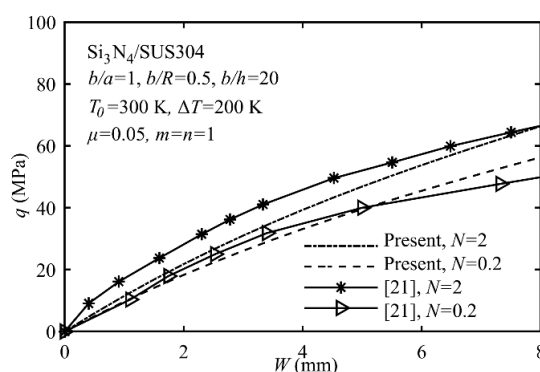


Fig. 3 Comparison of postbuckling curves for the panel under thermo-mechanical load

شکل 3 مقایسه منحنی‌های پس‌کمانش پل تحت بار ترمومکانیکی

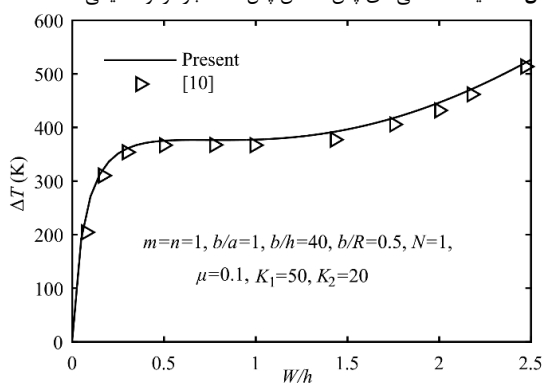


Fig. 4 Comparison of postbuckling curves for the stiffened panel under thermal load

شکل 4 مقایسه منحنی‌های پس‌کمانش پل تقویت‌شده تحت بار حرارتی

جدول 2 خواص مکانیکی پل استوانه‌ای مدرج تابعی [22,10]

ماده	خاصیت	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
سرامیک (Si_3N_4)	E_c (Pa)	348.43×10^9	0	3.7×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
	α_c (K^{-1})	5.8723×10^{-6}	0	9.095×10^{-4}	0	0
	K_c (W/mK)	13.723	0	0	0	0
	β_c (1/wt% H_2O)	0	0	0	0	0
فلز (SUS304)	E_m (Pa)	201.04×10^9	0	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
	α_m (K^{-1})	12.330×10^{-6}	0	8.086×10^{-4}	0	0
	K_m (W/mK)	15.379	0	0	0	0
	β_m (1/wt% H_2O)	5×10^{-4}	0	0	0	0

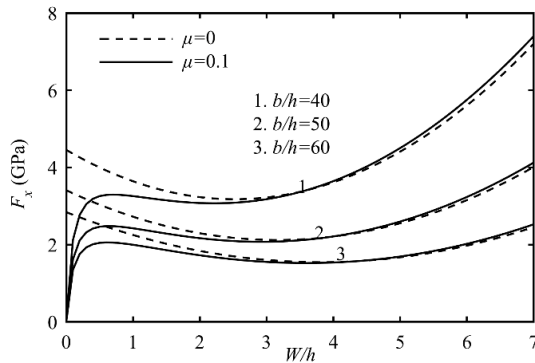


Fig. 8 Effect of ratio b/h on postbuckling of panel under axial compressive load

شکل 8 تأثیر نسبت b/h بر پس‌کمانش پل تحت بار محوری فشاری

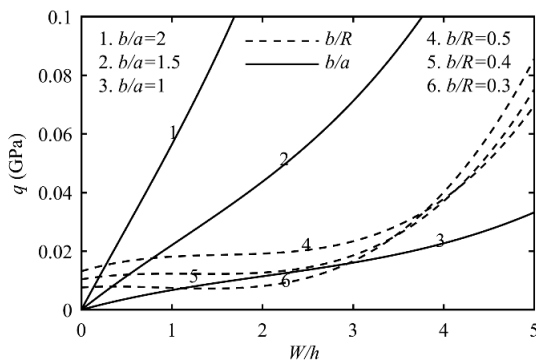


Fig. 9 Effect of ratio b/a and b/R on postbuckling of panel under uniform external pressure and thermo-mechanical load (4 immovable edges) respectively

شکل 9 تأثیر نسبت b/a و b/R بر پس‌کمانش پل به ترتیب تحت فشار خارجی یکنواخت و بار ترمومکانیکی (4 لبه ثابت)

تأثیر تقویت‌کننده‌ها و افزایش دمای ΔT بر پس‌کمانش پل استوانه‌ای در شکل 11 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که ظرفیت تحمل بار پل تقویت‌شده بیشتر از پل بدون تقویت‌کننده می‌باشد به عبارت دیگر تقویت‌کننده‌ها می‌توانند میزان مقاومت پل را نسبت به بارگذاری صورت گرفته افزایش دهند. علاوه بر این، افزایش دما سبب کاهش ظرفیت تحمل بار پل می‌شود. همچنین ظرفیت تحمل بار پل با خواص مستقل از دما بیشتر از پل با خواص وابسته به دما می‌باشد. با این وجود در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای پل سبب دستیابی به تحلیل رفتار آن با شرایطی نزدیک‌تر به واقعیت می‌گردد.

شکل 12 به بررسی تأثیر بستر الاستیک بر پاسخ غیرخطی پل تحت بار ترمومکانیکی می‌پردازد. مشاهده می‌شود که ظرفیت تحمل بار پل به‌طور قابل ملاحظه‌ای در حضور بسترهای الاستیک افزایش می‌یابد. به علاوه مشاهده می‌شود که تأثیر مثبت بستر الاستیک پاسترناک بر پس‌کمانش پل بیشتر از بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.

اثر شرایط مرزی مختلف بر پاسخ غیرخطی پل استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی تحت فشار عرضی یکنواخت در شکل 13 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ظرفیت تحمل بار پل با چهار لبه ثابت بیشتر از پل با دو لبه ثابت است. همچنین ظرفیت تحمل بار پل با چهار لبه متحرک از همه کمتر است. این نمودار برای $\Delta T = 0$ رسم شده است.

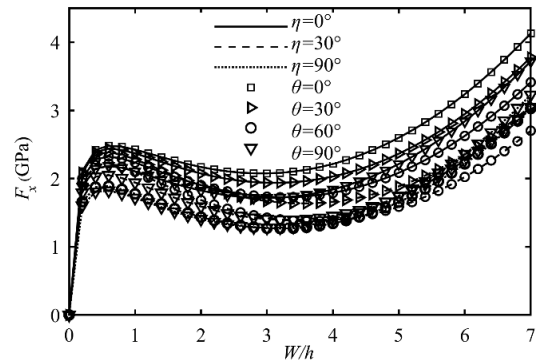


Fig. 5 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under axial compressive load

شکل 5 منحنی پس‌کمانش پل برای زوایای مختلف تقویت‌کننده تحت فشار محوری

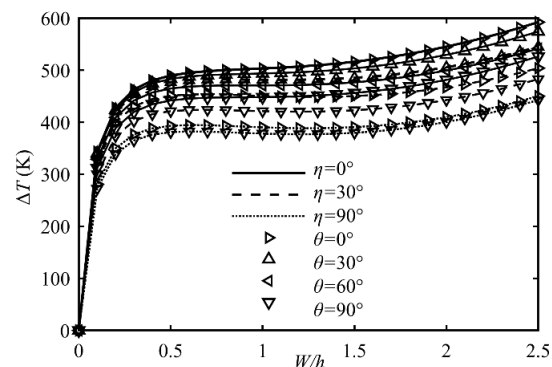


Fig. 6 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under thermal load

شکل 6 منحنی پس‌کمانش پل برای زوایای مختلف تقویت‌کننده تحت بار حرارتی

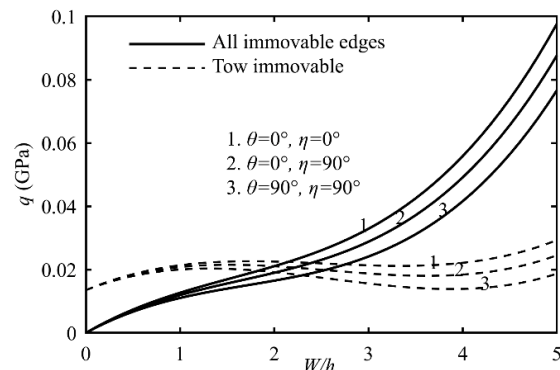


Fig. 7 Postbuckling curves for the panel with different angles of stiffeners under thermo-mechanical load

شکل 7 منحنی پس‌کمانش پل برای زوایای مختلف تقویت‌کننده تحت بار ترمو-مکانیکی

شکل 10 بیانگر تأثیر شاخص کسر حجمی بر منحنی پس‌کمانش پل استوانه‌ای تحت بار ترمومکانیکی می‌باشد. $N=0$ نشان‌دهنده پل فلزی و $N=\infty$ نشان‌دهنده پل سرامیکی است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا می‌کند. پل استوانه‌ای سرامیکی در برابر بار کمانش مقاومت به مراتب بالاتری نسبت به پل استوانه‌ای فلزی دارد که با توجه به سفتی کمتر فلزات، مورد انتظار است.

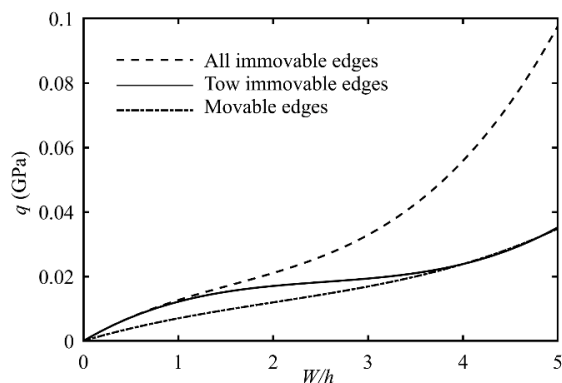


Fig. 13 Effect of boundary conditions on postbuckling of panel

شکل 13 اثر شرایط مرزی بر پس کماتش پل

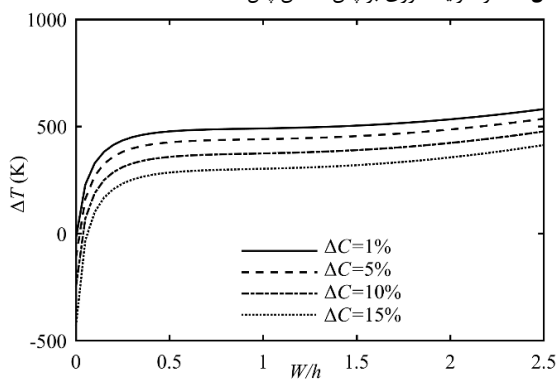


Fig. 14 Effect of moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermal load

شکل 14 تأثیر درصد رطوبت بر پس کماتش پل تحت بار هیگروترمال

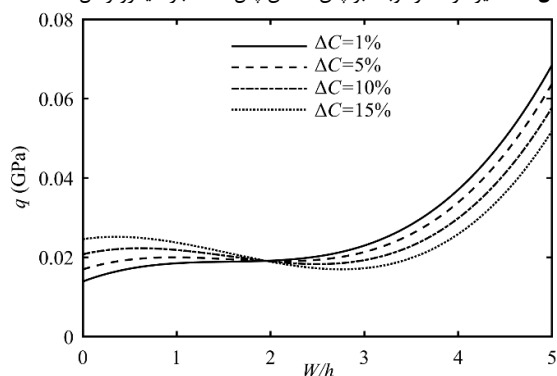


Fig. 15 Effect of moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

شکل 15 تأثیر درصد رطوبت بر پس کماتش پل تحت بار هیگروترمو مکانیکی با توزیع دمای یکنواخت (4 لبه ثابت)

توزیع دمای خطی و یکنواخت نیز مقایسه شده است. به طوری که منحنی خیز-بار که برای $T_c=300\text{ K}$ رسم شده است نشان‌دهنده توزیع یکنواخت دما در راستای ضخامت پل با $\Delta T = 0$ می‌باشد و منحنی‌هایی که برای سایر دماها رسم شده‌اند نشان‌دهنده توزیع دمای خطی هستند. مشاهده می‌شود که توزیع دمای خطی سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پل می‌شود.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای بررسی پس کماتش پل‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر الاستیک تحت بار-گذاری‌های هیگروترمو مکانیکی ارائه شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری

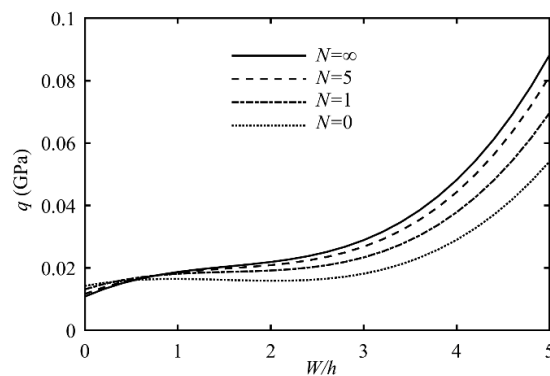


Fig. 10 Effect of volume fraction index on postbuckling of panel under thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

شکل 10 تأثیر شاخص کسر حجمی بر پس کماتش پل تحت بار ترمو مکانیکی با توزیع دمای یکنواخت (4 لبه ثابت)

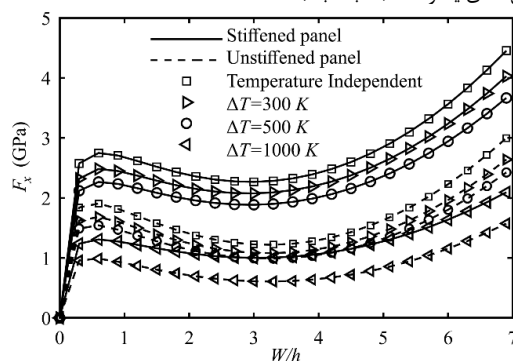


Fig. 11 Effect of stiffeners and temperature increment on postbuckling of panel under axial compressive load

شکل 11 تأثیر تقویت‌کننده‌ها و افزایش دما بر پس کماتش پل تحت بار محوری فشاری

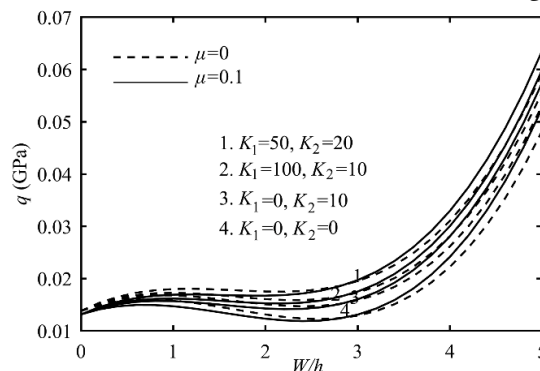


Fig. 12 Effect of elastic foundations on postbuckling of panel under thermo-mechanical load with uniform temperature distribution (4 immovable edges)

شکل 12 تأثیر بسترهای الاستیک بر پس کماتش پل تحت بار ترمو مکانیکی با توزیع دمای یکنواخت (4 لبه ثابت)

در شکل‌های 14 تا 16 به ترتیب نتایج تأثیر رطوبت بر پاسخ غیرخطی پل تحت بارهای هیگروترمال، هیگروترمو مکانیکی با توزیع دمای خطی و یکنواخت در راستای ضخامت پل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش درصد رطوبت سبب کاهش ظرفیت تحمل بار پل می‌گردد. همچنین در شکل 16 تأثیر رطوبت و توزیع دمای خطی و یکنواخت نیز بر پس کماتش پل بررسی شده است. دمای سطح فلزی 300 K در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که وجود گرادیان دما در ضخامت پل سبب ایجاد خیز کمتر و رفتار پس کماتش پایدارتر در پل می‌شود. همچنین در این شکل

$$\begin{aligned}
 +Z_1 E_s h_s^T I^T S_1, A_{42} &= \frac{E_3 v}{1-v^2} + Z_1 E_s h_s^T I^T S_2 \\
 A_{51} &= \frac{E_3 v}{1-v^2} + Z_2 E_s h_s^T I^T S_3, A_{52} = \frac{E_3}{1-v^2} \\
 +Z_2 E_s h_s^T I^T S_4, A_{63} &= \frac{E_3}{2(1+v)} + 2Z_3 E_s h_s^T I^T S_5
 \end{aligned}$$

که در روابط بالا:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c h + \frac{E_{mc} h}{N+1}, E_2 = E_{mc} h^2 \left[\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2(N+1)} \right] \\
 E_3 &= \frac{E_c h^3}{12} + E_{mc} h^3 \left[\frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{4(N+1)} \right] \\
 h^T &= h(1 + \alpha_m T(z)), h_s^T = h_s(1 + \alpha_m T(z)), \\
 z^T &= \left(\frac{h_s^T + h^T}{2} \right), I^T = \left(\frac{1}{4} h^T + \frac{1}{2} h^T h_s^T + \frac{1}{3} h^T z^T \right), \\
 S_1 &= \cos^3 \theta + \cos^3 \eta, S_2 = \sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \eta \cos \eta, \\
 S_3 &= \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \eta \cos^2 \eta, S_4 = \sin^3 \theta + \sin^3 \eta, \\
 S_5 &= \sin \theta \cos \theta + \sin \eta \cos \eta
 \end{aligned}$$

ضرایب رابطه (35) عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 b_1^1 &= \frac{mn\pi^6 \overline{M_1 M_2}}{16B_h^4 \overline{M_3}} + \frac{m^3 n B_a^2 R_b \pi^4 (\overline{M_1} + \overline{M_2})}{16B_h^3 \overline{M_3}} \\
 &+ \frac{m^5 n B_a^4 R_b^2 \pi^2}{16B_h^2 \overline{M_3}} + \frac{1}{16B_h^4} [m^5 n \pi^6 B_a^4 \overline{D_{11}^*} \\
 &+ m^3 n^3 \pi^6 B_a^2 (\overline{D_{12}^*} + \overline{D_{21}^*} - 4\overline{D_{36}^*}) + mn^5 \pi^6 \overline{D_{22}^*}] \\
 &+ \frac{mn\pi^2 B_a^4 \overline{D_{11}^*} K_1}{16B_h^4} + \frac{mn\pi^4 K_2 B_a^2 \overline{D_{11}^*}}{16B_h^4} (m^2 B_a^2 + n^2) \\
 b_2^1 &= -\frac{2m^2 n^2 \pi^4 B_a^2 \overline{M_1}}{3B_h^4 \overline{M_3}} - \frac{2m^4 n^2 \pi^2 B_a^4 R_b}{3B_h^3 \overline{M_3}} \\
 b_3^1 &= -\frac{n^2 \pi^2 R_b}{24A_{11}^* B_h^3} + \frac{m^2 n^2 \pi^4 B_a^2 (\overline{B_{21}^*} + \overline{B_{12}^*})}{6B_h^4 (A_{11}^* + A_{22}^*)}, \\
 b_4^1 &= \frac{mn\pi^6}{256B_h^4} \left(\frac{m^4 B_a^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4}{A_{11}^*} \right)
 \end{aligned}$$

که در رابطه بالا:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{k_1 a^4}{D_{11}^*}, K_2 = \frac{k_2 a^2}{D_{11}^*}, \overline{A_{11}^*} = h A_{11}^*, \overline{A_{22}^*} = h A_{22}^*, \\
 \overline{A_{12}^*} &= h A_{12}^*, \overline{A_{21}^*} = h A_{21}^*, \overline{A_{33}^*} = h A_{33}^*, \overline{B_{11}^*} = \frac{B_{11}^*}{h}, \\
 \overline{B_{22}^*} &= \frac{B_{22}^*}{h}, \overline{B_{12}^*} = \frac{B_{12}^*}{h}, \overline{B_{21}^*} = \frac{B_{21}^*}{h}, \overline{B_{36}^*} = \frac{B_{36}^*}{h}, \overline{B_{11}^{**}} = \frac{B_{11}^{**}}{h}, \\
 \overline{B_{22}^{**}} &= \frac{B_{22}^{**}}{h}, \overline{B_{12}^{**}} = \frac{B_{12}^{**}}{h}, \overline{B_{21}^{**}} = \frac{B_{21}^{**}}{h}, \overline{D_{11}^*} = \frac{D_{11}^*}{h^3}, \\
 \overline{D_{22}^*} &= \frac{D_{22}^*}{h^3}, \overline{D_{12}^*} = \frac{D_{12}^*}{h^3}, \overline{D_{21}^*} = \frac{D_{21}^*}{h^3}, \overline{D_{36}^*} = \frac{D_{36}^*}{h^3}, \\
 B_h &= \frac{b}{h}, B_a = \frac{b}{a}, \overline{W} = \frac{W}{h}, R_b = \frac{b}{R}, \\
 \overline{M_1} &= [\overline{B_{21}^*} m^4 B_a^4 + (\overline{B_{11}^*} + \overline{B_{22}^*} + 2\overline{B_{36}^*}) m^2 n^2 B_a^2 + \overline{B_{12}^*} n^4] \\
 \overline{M_2} &= [\overline{B_{21}^{**}} m^4 B_a^4 + (\overline{B_{11}^{**}} + \overline{B_{22}^{**}} - 2\overline{B_{36}^{**}}) m^2 n^2 B_a^2 - \overline{B_{12}^{**}} n^4] \\
 \overline{M_3} &= [\overline{A_{11}^*} m^4 B_a^4 + (\overline{A_{33}^*} - \overline{A_{12}^*} - \overline{A_{21}^*}) m^2 n^2 B_a^2 + \overline{A_{22}^*} n^4]
 \end{aligned}$$

ضرایب رابطه (37) عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 b_1^2 &= \frac{m^2 B_a^2 R_b^2}{\pi^2} \frac{1}{\overline{M_3}} \frac{\pi^2}{m^2 B_a^2 B_h^2} [m^4 B_a^4 \overline{D_{11}^*} + m^2 n^2 B_a^2 (\overline{D_{12}^*} \\
 &+ \overline{D_{21}^*} - 4\overline{D_{36}^*}) + n^4 \overline{D_{22}^*}] + \frac{K_1 \overline{D_{11}^*} B_a^2}{B_h^2 m^2 \pi^2} + \frac{K_2 \overline{D_{11}^*}}{m^2 B_h^2} (m^2 B_a^2 \\
 &+ n^2) + \frac{\pi^2}{m^2 B_a^2 B_h^2} \frac{\overline{M_1 M_2}}{\overline{M_3}} + \frac{R_b (\overline{M_1} + \overline{M_2})}{B_h \overline{M_3}} \\
 b_2^2 &= -\frac{32n}{3m B_h^2 \overline{M_3}} - \frac{32mn B_a^2 R_b}{3\pi^2 B_h \overline{M_3}} \\
 b_3^2 &= \frac{8n}{3m B_h^2} \left(\frac{\overline{B_{21}^*}}{A_{11}^*} + \frac{\overline{B_{12}^*}}{A_{22}^*} \right) - \frac{2n R_b}{3m^3 \pi^2 B_h B_a^2 A_{11}^*} \\
 b_4^2 &= \frac{\pi^2}{16m^2 B_a^2 B_h^2} \left(\frac{m^4 B_a^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4}{A_{11}^*} \right)
 \end{aligned}$$

ضرایب رابطه (45) عبارتند از:

$$b_1^3 = -\frac{1}{P} \left(-\frac{\pi^2}{m^2 B_a^2 B_h^2} \frac{\overline{M_1 M_2}}{\overline{M_3}} - \frac{R_b (\overline{M_1} + \overline{M_2})}{B_h \overline{M_3}} \right)$$

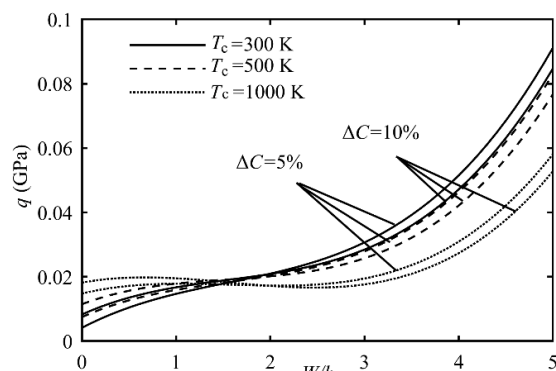


Fig. 16 Effects of temperature gradient and moisture concentration on postbuckling of panel under hygro-thermo-mechanical load (4 immovable edges)

شکل 16 اثر گرادیان دما و درصد رطوبت بر پس کمانش پل تحت بار هیگروترمو- مکانیکی (4 لبه ثابت)

کلاسیک پوسته‌ها، روابط غیرخطی فن کارمن-دائل، نقص هندسی اولیه، روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و مدل پیشنهادی بسترهای الاستیک وینکلر و پاسترناک استخراج شده است. روابط صریح و منحنی‌های خیز-بار با استفاده از تابع تنش و روش گالرکین به دست آمده است.

بعضی از نتایج به دست آمده از تحلیل استاتیکی پل عبارتند از:

الف) تقویت‌کننده‌ها، بسترهای الاستیک و ثابت کردن لبه‌های پل سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پل می‌شوند. بیشترین ظرفیت تحمل بار مکانیکی و حرارتی مربوط به پل با تقویت‌کننده‌های طولی و کمترین ظرفیت تحمل بار مربوط به پل با تقویت‌کننده‌های حلقوی می‌باشد. اما احتمال این که در انواع دیگر بارگذاری تأثیر زاویه تقویت‌کننده‌های مایل بیشتر باشد، وجود دارد [18,16].

ب) همواره در طی فرایندهای ساخت یک سازه نقص‌های هندسی اولیه در آن به وجود می‌آید. ظرفیت تحمل بارهای مکانیکی و حرارتی پل بدون نقص از پل با نقص هندسی اولیه بیشتر است و هرچه اندازه نقص افزایش یابد ظرفیت تحمل بار کاهش می‌یابد.

ج) وجود گرادیان دما در ضخامت پل سبب ایجاد خیز کمتر و رفتار پس-کمانش پایدارتر در پل می‌شود. همچنین توزیع دمای خطی سبب افزایش ظرفیت تحمل بار پل، نسبت به توزیع دمای یکنواخت می‌شود.

د) افزایش درصد رطوبت سبب کاهش ظرفیت تحمل بارهای هیگروترموال و هیگروترمو مکانیکی پل می‌گردد.

5- پیوست

ضرایب روابط (12) و (13) عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{E_1}{1-v^2} + Z_1 E_s h_s^T S_1, A_{12} = \frac{E_1 v}{1-v^2} + Z_1 E_s h_s^T S_2 \\
 A_{14} &= \frac{E_2}{1-v^2} + Z_1 E_s h_s^T z^T S_1, A_{15} = \frac{E_2 v}{1-v^2} \\
 &+ Z_1 E_s h_s^T z^T S_2, A_{21} = \frac{E_1 v}{1-v^2} \\
 &+ Z_2 E_s h_s^T S_3, A_{22} = \frac{E_1}{1-v^2} + Z_2 E_s h_s^T S_4 \\
 A_{24} &= \frac{E_2 v}{1-v^2} + Z_2 E_s h_s^T z^T S_3, A_{25} = \frac{E_2}{1-v^2} \\
 &+ Z_2 E_s h_s^T z^T S_4, A_{33} = \frac{E_1}{2(1+v)} + 2Z_3 E_s h_s^T S_5 \\
 A_{36} &= \frac{E_3}{2(1+v)} + 2Z_3 E_s h_s^T z^T S_5, A_{41} = \frac{E_3}{1-v^2}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi^4}{4B_h^4} \frac{1}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} [(B_{11}^* A_{21}^* + B_{21}^* A_{12}^*) m^2 n^2 B_a^2 + (B_{12}^* A_{21}^* + B_{22}^* A_{12}^*) n^4], \quad b_3^5 = b_3^4, \quad b_4^5 = b_4^4$$

$$= \frac{mn\pi^6}{256B_h^4} \left(\frac{m^4 B_a^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4}{A_{11}^*} \right) + \frac{mn^3\pi^6}{128B_h^4} \frac{(A_{21}^* m^2 B_a^2 + A_{22}^* n^2)}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)}$$

$$, \quad b_5^5 = -\frac{\pi^4 mn^3}{16B_h^4}, \quad b_6^5 = \frac{R_b}{B_h}$$

6- مراجع

- [1] H. S. Shen, H. Wang, Thermal postbuckling of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 38, No. 1, pp. 9-19, 2014.
- [2] H. S. Shen, H. Wang, Nonlinear bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Vol. 49, No. 1, pp. 49-59, 2015.
- [3] C. Y. Lee, J. H. Kim, Thermal post-buckling and snap-through instabilities of FGM panels in hypersonic flows, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 175-182, 2013.
- [4] A. Alibeigloo, W. Q. Chen, Elasticity solution for an FGM cylindrical panel integrated with piezoelectric layers, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 714-723, 2010.
- [5] H. V. Tung, N. D. Duc, Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations subjected to mechanical an thermal loading conditions, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 11-12, pp. 2848-2866, 2014.
- [6] N. D. Duc, H. V. Tung, Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, pp. 1664-1672, 2010.
- [7] M. M. Aghdam, K. Bigdeli, N. Shahmansouri, A semi-analytical solution for bending of moderately thick curved functionally graded panels, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 17, No. 2, pp. 320-327, 2010.
- [8] J. Yang, K. M. Liew, Y. F. Wu, S. Kitipornchai, Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature-dependent properties, *Internal Journal Solids and Structures*, Vol. 43, No. 2, pp. 307-324, 2006.
- [9] H. V. Tung, Postbuckling behavior of functionally graded cylindrical panels with tangential edge constraints and resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 100, No. 2, pp. 532-541, 2013.
- [10] N. D. Duc, N. D. Tuan, T. Q. Quan, N. V. Quyen, T. V. Anh, Nonlinear mechanical, thermal and thermo-mechanical postbuckling of imperfect eccentrically stiffened thin FGM cylindrical panels on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 155-168, 2015.
- [11] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, P. Khazaeinejad, Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
- [12] D. V. Dung, D. T. Dong, Post-buckling analysis of functionally graded doubly curved shallow shells reinforced by FGM stiffeners with temperature-dependent material and stiffener properties based on TSDT, *Mechanics Research Communication, Part A*, Vol. 78, No. 1, pp. 28-41, 2016.
- [13] A. M. Zenkour, Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 1, pp. 234-238, 2010.
- [14] A. M. Zenkour, Exact solution of thermal stress problem of an inhomogeneous hygrothermal piezoelectric hollow cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 24, pp. 6133-6143, 2014.
- [15] H. S. Shen, Hygrothermal effects on the postbuckling of axially loaded shear deformable laminated cylindrical panels, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 73-85, 2007.
- [16] T. C. Soong, Buckling of cylindrical shells with eccentric spiral-type stiffeners, *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 1, pp. 65-72, 1969.
- [17] S. W. Yen, Buckling of cylindrical shells with spiral stiffeners under uniform compression and torsion, *Composite Structures*, Vol. 11, No. 6, pp. 587-595, 1979.
- [18] A. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling of cylindrical shells with spiral stiffeners under elastic foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 60, No. 4, pp. 615-631, 2016.
- [19] D. D. Brush, B. O. Almorh, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Mc. Graw-Hill, US, pp. 142-189, 1975.
- [20] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, pp. 567-568, 2004.
- [21] H. S. Shen, M. ASCE, A. Y. T. Leung, Postbuckling of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 4, pp. 414-425, 2003.
- [22] T. K. Nguyen, B. D. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai, Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams, *Composite Structures*, Vol. 176, No. 3, pp. 1050-1060, 2017.

$$-\frac{m^2 B_a^2 R_b^2}{\pi^2} \frac{1}{M_3} - \frac{\pi^2}{m^2 B_a^2 B_h^2} [m^4 B_a^4 \overline{D_{11}^*} + m^2 n^2 B_a^2 (\overline{D_{12}^*} + \overline{D_{21}^*} - 4\overline{D_{36}^*}) + n^4 \overline{D_{22}^*}] - \frac{K_1 \overline{D_{11}^*} B_a^2}{B_h^2 m^2 \pi^2} - \frac{K_2 \overline{D_{11}^*}}{m^2 B_h^2} (m^2 B_a^2 + n^2) \Big\},$$

$$b_2^3 = -\frac{1}{P} \left\{ \frac{20mnB_a^2 R_b}{3\pi^2 B_h} \frac{1}{M_3} + \frac{20n}{3mB_h^2} \frac{\overline{M_1}}{M_3} + \frac{4}{mn\pi^2 B_h} \frac{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)}{1} \frac{20n}{3mB_h^2} \frac{\overline{M_1}}{M_3} + \frac{mnB_h^2}{mnB_h^2} \frac{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)}{1} \right\}$$

$$[(B_{11}^* A_{11}^* + B_{21}^* A_{12}^*) m^2 B_a^2 + (B_{12}^* A_{11}^* + B_{22}^* A_{12}^*) n^2] \Big\}$$

$$b_3^3 = -\frac{1}{P} \left[\frac{2nR_b}{3m^3 \pi^2 B_h B_h^2 A_{11}^*} - \frac{8n}{3mB_h^2} \left(\frac{\overline{B_{21}^*}}{A_{11}^*} + \frac{\overline{B_{12}^*}}{A_{22}^*} \right) \right]$$

$$b_4^3 = \frac{1}{P} \left[\frac{\pi^2}{16m^2 B_a^2 B_h^2} \left(\frac{A_{11}^* m^4 B_a^4 + A_{22}^* n^4}{A_{11}^* A_{22}^*} \right) + \frac{\pi^2}{8B_h^2} \left(\frac{A_{11}^* m^2 B_a^2 + A_{12}^* n^2}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} \right) \right]$$

ضرایب رابطه (46) عبارتند از:

$$b_1^4 = \frac{mn\pi^6 \overline{M_1 M_2}}{16B_h^4 \overline{M_3}} + \frac{m^3 n B_a^2 R_b \pi^4 (\overline{M_1} + \overline{M_2})}{16B_h^3 \overline{M_3}}$$

$$+ \frac{1}{\overline{M_3}} \left(\frac{m^5 n B_a^4 R_b^2 \pi^2}{16B_h^2} - \frac{4m^3 B_a^4 R_b^2}{n\pi^2 B_h^2} \right) - \frac{4mR_b B_a^2 \overline{M_1}}{nB_h^3 \overline{M_3}}$$

$$+ \frac{mn\pi^6}{16B_h^4} [m^4 B_a^4 \overline{D_{11}^*} + m^2 n^2 B_a^2 (\overline{D_{12}^*} + \overline{D_{21}^*} - 4\overline{D_{36}^*}) + n^4 \overline{D_{22}^*}] + \frac{mn\pi^2 B_a^4 \overline{D_{11}^*} K_1}{16B_h^4} + \frac{mn\pi^4 K_2 B_a^2 \overline{D_{11}^*}}{16B_h^4} (m^2 B_a^2 + n^2) + \frac{4R_b}{mnB_h^3} \frac{1}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} [(B_{11}^* A_{21}^* + B_{21}^* A_{12}^*) m^2 B_a^2 + (B_{12}^* A_{21}^* + B_{22}^* A_{12}^*) n^2] + \frac{4R_b^2}{mn\pi^2 B_h^2} \left(\frac{A_{22}^*}{A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*} \right)$$

$$b_2^4 = -\frac{m^2 n^2 \pi^4 B_a^2 \overline{M_1}}{6B_h^4 \overline{M_3}} - \frac{m^4 n^2 \pi^2 R_b B_a^4}{6B_h^3 \overline{M_3}} \frac{1}{\overline{M_3}}$$

$$-\frac{\pi^4}{4B_h^4} \frac{1}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} [B_{11}^* A_{11}^* + B_{21}^* A_{12}^* m^4 B_a^4 + (B_{12}^* A_{11}^* + B_{22}^* A_{12}^*) m^2 n^2 B_a^2 + (B_{12}^* A_{21}^* + B_{22}^* A_{12}^*) n^4] - \frac{\pi^2 R_b}{4B_h^3} \frac{1}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} (A_{21}^* m^2 B_a^2 + A_{22}^* n^2), \quad b_3^4 = \frac{m^2 n^2 \pi^4 B_a^2}{6B_h^4} \left(\frac{\overline{B_{21}^*}}{A_{11}^*} + \frac{\overline{B_{12}^*}}{A_{22}^*} \right) - \frac{1}{24} \frac{n^2 \pi^2 R_b}{B_h^3 A_{11}^*}$$

$$-\frac{\pi^2 R_b}{8B_h^3} \frac{1}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} (A_{21}^* m^2 B_a^2 + A_{22}^* n^2)$$

$$b_4^4 = \frac{m^3 n \pi^6 B_a^2 (A_{12}^* m^2 B_a^2 + A_{22}^* n^2)}{128B_h^4 (A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} + \frac{mn\pi^6}{128B_h^4} \frac{(A_{21}^* m^2 B_a^2 + A_{22}^* n^2)}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)} + \frac{mn\pi^6}{256B_h^4} \left(\frac{m^4 B_a^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4}{A_{11}^*} \right)$$

$$b_5^4 = -\frac{\pi^4}{16B_h^4} (m^3 n B_a^2 + mn^3), \quad b_6^4 = \frac{R_b}{B_h}$$

ضرایب رابطه (47) عبارتند از:

$$b_1^5 = b_1^4, \quad b_2^5 = -\frac{5}{12} \frac{m^2 n^2 \pi^4 B_a^2 \overline{M_1}}{B_h^4 \overline{M_3}}$$

$$-\frac{5}{12} \frac{m^4 n^2 \pi^2 R_b B_a^4}{B_h^3 \overline{M_3}} - \frac{\pi^2 n^2 R_b}{4B_h^3} \frac{\overline{A_{22}^*}}{(A_{11}^* A_{22}^* - A_{21}^* A_{12}^*)}$$