



مدل سازی و کنترل وضعیت یک ماهواره به کمک چرخ عکس‌العملی با روش خطی سازی پس‌خورد و بررسی عملکرد آن با معیارهای توان و اولرانت

محمد نوابی^{1*}، محمدرضا حسینی²

1- دانشیار مهندسی هوافضا، دانشکده فناوریهای نوین، دانشگاه شهید بهشتی

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی

* تهران، صندوق پستی 1983969411، m_navabi@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 20 شهریور 1396

پذیرش: 10 آذر 1396

ارائه در سایت: 08 دی 1396

کلید واژگان:

فضاپیما

اولرانت

خطی سازی پس‌خورد

دینامیک صفر

چرخ عکس‌العملی

چکیده

به طور کلی معادلات فضاپیما غیرخطی هستند، بنابراین استفاده از تئوری‌های کنترل غیرخطی کمک می‌کند تا مسأله کنترل وضعیت فضاپیما در شرایط واقعی‌تری بررسی شود. روش خطی‌سازی پس‌خورد یک روش کنترل غیرخطی است که دینامیک‌های غیرخطی سیستم را به فرم جدیدی تبدیل می‌کند تا بتوان در طراحی ورودی کنترلی سیستم از تئوری‌های کنترل خطی نیز استفاده کرد. تعیین توابع خروجی در خطی‌سازی ورودی-خروجی که حالت خاصی از خطی‌سازی پس‌خورد است، نقش مهمی بر پایداری دینامیک درونی سیستم دارد. معادلات سینماتیک در این مقاله برحسب کوآترنیون‌ها بیان شده که موجب انتخاب این پارامترها به عنوان توابع خروجی می‌شود. همچنین از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی که یک کنترل بهینه خطی است، برای طراحی کنترل‌کننده سیستم خطی شده در روش خطی‌سازی پس‌خورد و طراحی یک کنترل‌کننده وضعیت فضاپیما به صورت مجزا استفاده شده است. روش‌های کنترلی استفاده شده با توجه به محدودیت عملکردها با معیار اولرانت که انتگرال خطای زاویه دوران حول محور اوپلر است، مورد ارزیابی عملکرد قرار می‌گیرند، سپس معیارهای توان مصرفی و تلاش کنترلی عملکردها برای مقایسه کنترل‌کننده‌ها در نظر گرفته شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که مقدار اولرانت برای روش خطی‌سازی پس‌خورد در تمام مانورهای تغییر وضعیت طراحی شده مقدار کمتری است. بررسی معیارهای توان و تلاش کنترلی نیز نشان می‌دهد که روش خطی‌سازی پس‌خورد نه تنها روش سریع‌تری است، بلکه عملکردها نیز رفتاری بهینه از خود نشان می‌دهند.

Modeling and Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheel with Feedback Linearization, its Performance Study Subject to Power and EULERINT

Mohammad Navabi^{1*}, Mohammad Reza Hosseini¹

1- New Technologies Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 1983969411 Tehran, Iran, m_navabi@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 11 September 2017

Accepted 01 December 2017

Available Online 29 December 2017

Keywords:

Spacecraft

EULERINT

Feedback linearization

Zero Dynamic

Reaction Wheel

ABSTRACT

The rotational Equations of motion of spacecraft are generally nonlinear, so use of nonlinear control techniques are helpful in real conditions. Feedback linearization theory is a nonlinear control technique which transforms nonlinear system dynamics into a new form that linear control techniques can be applied. Choosing output functions in input-output linearization which is a specific method of feedback linearization, has a significant effect on internal dynamics stability. In this study the kinematic equations of spacecraft motion are expressed by quaternion parameters, these parameters are selected as output functions. Linear quadratic regulator as a linear optimal control law is used to design a controller for linearized system in feedback linearization control and also to design attitude control of spacecraft separately. By considering the actuator constraints on different control methods that are used here, the EULERINT which is the integral of the Euler angles error about the Euler axis, is evaluated. Then, the power and control effort of the actuators are considered for comparison between controllers. The simulation results show that the amount of EULERINT for feedback linearization method is less among the others. Also study of the power and control effort shows that Feedback linearization method is not only quicker but also more efficient and displays better performance of the actuators.

1- مقدمه

سیستم‌های غیرخطی پیچیده، کاهش دقت و گاهی ناپایداری را به همراه خواهد داشت که برای کنترل وضعیت فضاپیما با زوایای مانور بزرگ مناسب نخواهد بود [2]. بهره‌گیری از این روش‌های کنترل غیرخطی حتی در مسائل پیچیده‌تر نظیر وجود انواع گشتاور اغتشاشی و نامعینی‌های سیستم، بسیار مفید و کارآمد است. برای مثال کنترل وضعیت فضاپیما در مانورهای زاویه بزرگ با در نظر گرفتن وجود نامعینی‌ها در برخی پارامترهای سیستم موضوعی است که در مرجع [3] مورد مطالعه قرار گرفته است، همچنین

کنترل وضعیت فضاپیما به‌خصوص در حضور عملکردها مسأله‌ای مهم در طراحی سیستم‌های فضایی است. بسیاری از تحقیقات صورت گرفته در این حوزه به بررسی انتخاب انواع تئوری‌های کنترلی و مقایسه آن‌ها پرداخته‌اند. از آن‌جا که معادلات سینماتیک و دینامیک وضعیت فضاپیما معادلاتی غیرخطی هستند، برای کنترل در حالت واقعی‌تر باید از روش‌های کنترل غیرخطی استفاده شود [1]. روش‌های خطی با خطی‌سازی‌های بزرگ در حل

Please cite this article using:

M. Navabi, M. R. Hosseini, Modeling and Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheel with Feedback Linearization, its Performance Study Subject to Power and EULERINT, Modares Mechanical Engineering, Vol. 18, No. 01, pp. 51-61, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

روش مد لغزشی برای حل مسأله کنترل وضعیت برای بررسی کنترل وضعیت در حضور عدم قطعیت ماتریس اینرسی در نظر گرفته شده است [4].

یکی از روش‌های طراحی کنترل غیرخطی، خطی‌سازی پس‌خورد نام دارد. این روش در سال‌های اخیر در زمینه بسیاری از تحقیقات مورد استفاده قرار گرفته است. ایده اصلی این روش مبتنی بر تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی با استفاده از پس‌خورد حالت است [5]. در این شرایط می‌توان از روش‌های کنترل خطی استفاده کرد. خطی‌سازی پس‌خورد به طور موفقیت‌آمیزی در حل مسائل کنترل عملی به کار گرفته شده است. برای مثال در مرجع [6] برای تعقیب مسیر حرکت یک بازوی رباتیک و مرجع [7] برای بهبود عملکرد ترمزهای ضد قفل وسایل نقلیه با به‌کارگیری این تئوری کنترل به نتایج رضایت‌بخشی رسیده‌اند.

این تئوری کنترلی در پژوهش‌های هوافضایی نیز به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. موضوع مورد مطالعه در مرجع [8] طراحی یک وسیله پرنده جدید با نام اومنی‌کوپتر¹ است. در این مقاله پس از استخراج معادلات غیرخطی از روش ورودی-خروجی خطی‌سازی پس‌خورد، ورودی مناسبی برای کنترل وضعیت سیستم به دست آمده است. نکته قابل توجه در این پژوهش انجام‌شده به کارگیری کواترانیون‌ها برای توصیف وضعیت سیستم است. پارامترهای کواترانیون به دلیل مزایایی که نسبت به زوایای اوپلر دارند، به طور متداول در پژوهش‌های هوافضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تعیین توابع خروجی سیستم مورد مطالعه یکی از مهم‌ترین قسمت‌ها در طراحی خطی‌سازی پس‌خورد است که در این مقاله کواترانیون‌ها به عنوان توابع خروجی در نظر گرفته شده‌اند.

مرجع [9] مسأله کنترل وضعیت فضاپیما صلب را بدون در نظر گرفتن عملگرها مورد مطالعه قرار داده و برای به دست آوردن معادلات سینماتیک از پارامترهای کواترانیون و برای طراحی ورودی کنترلی از تئوری خطی‌سازی پس‌خورد استفاده می‌کند. قابل توجه است که در مقاله یادشده به بررسی پایداری دینامیک درونی و تحلیل دینامیک صفر پرداخته نشده است.

در فضاپیماها برای کنترل وضعیت از عملگرهای متنوعی می‌توان استفاده کرد. مانند مرجع [10] که برای این هدف از عملگرهای دوقطبی مغناطیسی بهره برده است، اما چرخ‌های عکس‌العملی به دلیل دقت بالایی که در اجرای مانورهای تغییر وضعیت دارند از جمله عملگرهای پرکاربرد در کنترل وضعیت فضاپیماهاست. می‌توان این عملگرها را در چیدمان‌های گوناگون آرایش داد. بررسی توان مصرفی، سرعت اجرای مانور و اثر از دست دادن یک عملگر در طول مانور با استفاده از انواع پیکره‌بندی‌های مرسوم چرخ عکس‌العملی از قبیل سه محوره متعامد، هرمی و چهاروجهی موضوعاتی است که محققان بسیاری در این حوزه به مطالعه آن‌ها پرداخته‌اند. براساس [11] یکی از بهترین انتخاب‌ها برای آرایش چرخ‌های عکس‌العملی، چیدمان هرمی با یک ماتریس توزیع همگن است.

همان‌طور که پیشتر اشاره شد می‌توان در خطی‌سازی پس‌خورد از روش‌های کنترل خطی نیز استفاده کرد. تئوری‌های کنترل بهینه به خصوص تنظیم‌کننده مربعی خطی به دلیل امکان اعمال معیارهایی بهینه برای سیستم مورد نظر در تحقیقات هوافضایی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. مسائل پیچیده هوافضایی زیادی که از طریق کنترل کلاسیک قابل حل نیستند به کمک تئوری بهینه حل شده‌اند [12].

بررسی روش‌های کنترلی گوناگون برای حل یک مسأله و ارزیابی عملکرد

آن‌ها با معیارهای متفاوت همواره مورد توجه محققان بوده است. برای مثال در مرجع [13] از سه روش کنترلی متداول برای رسیدن به پاسخ با مشخصات عملکرد مناسب سیستم استفاده شده است که این روش‌ها از نظر تلاش کنترلی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مقایسه کنترل مد لغزشی و کنترل بهینه زمانی برای تعیین حداقل زمان نشست در کنترل وضعیت فضاپیما از جمله مطالعات مقایسه‌ای انجام شده در حوزه کنترل فضاپیماست [14].

در مقاله حاضر ابتدا طراحی کنترل‌کننده با استفاده از خطی‌سازی پس‌خورد انجام شده و اثر انتخاب کواترانیون‌ها بر پایداری دینامیک درونی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. در طراحی قسمت خطی ورودی کنترلی روش خطی‌سازی پس‌خورد از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی استفاده شده است. یک کنترل‌کننده خطی مجزا نیز با این روش کنترلی برای مسأله کنترل وضعیت فضاپیما به دست آمده است. برای بررسی عملکرد روش‌های کنترلی مورد استفاده چند مانور تغییر وضعیت در نظر گرفته شده و عملکرد کنترل‌کننده‌ها از دو جنبه مورد ارزیابی قرار گرفته است.

نخستین مورد معیار اولر اینت² است. کمتر بودن اولر اینت یک روش کنترلی در مقایسه با روش دیگر مبین بهره‌وری آن از نظر حداقل‌سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده توسط ماهواره است [15].

در مرجع [16] چیدمان عملگرهای سیم‌پیچ مغناطیسی و چرخ عکس‌العملی از نظر توان مصرفی، تلاش کنترلی و حداقل انرژی مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش نیز اثر وجود چیدمان هرمی چرخ‌های عکس‌العملی در پیکره‌بندی فضاپیما لحاظ شده و برای محاسبه گشتاور هر عملگر تبدیل شبه معکوس راست³ مورد استفاده قرار گرفته است. توجه به حداقل‌سازی تلاش کنترلی علاوه بر مسائل هوافضایی در سایر زمینه‌های مرتبط با کنترل نظیر رباتیک نیز مهم بوده و مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد [17]. در نتیجه مورد دوم بررسی میزان توان مصرفی و تلاش کنترلی عملگرها با استفاده از دو روش کنترل خطی و غیرخطی بیان شده است.

احتساب عملگر با چیدمانی خاص در فرآیند طراحی ورودی کنترلی خطی‌ساز پس‌خورد و مطالعه اثر استفاده از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی در دو حالت مجزا و به عنوان قسمتی از ورودی کنترل خطی‌ساز پس‌خورد بر رفتار سیستم و عملکرد عملگرها از طریق معیار اولر اینت در کنار توان مصرفی و تلاش کنترلی، وجه تمایز این پژوهش در مقابل مطالعات پیشین است. در این مقاله پایداری دینامیک درونی ایجاد شده در اثر انتخاب پارامترهای کواترانیون به عنوان توابع خروجی سیستم از طریق مفهوم دینامیک صفر مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان نیز نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای به کمک نرم‌افزار متلب⁴ ارائه شده است.

2- سینماتیک فضاپیما

تغییر وضعیت زاویه‌ای یک فضاپیما می‌تواند به عنوان دوران یک جسم صلب در نظر گرفته شود و در یک دستگاه مختصات مشخص و به کمک زوایای اوپلر بیان گردد. دوران زاویه اوپلر به عنوان دوران‌های زاویه‌ای متوالی حول سه محور متعامد دستگاه بدنی تعریف می‌شود [15]. بیان دوران‌های وضعیت در قالب زوایای اوپلر شامل توابع مثلثاتی می‌شود و امکان به وجود آمدن تکنیکی در آن‌ها وجود دارد، می‌توان انتقال‌های معادل، ولی ساده‌تری را

² EULERINT

³ Right Pseudoinverse Transformation

⁴ MATLAB

¹ Omnicopter

برحسب کواترنیون‌ها به دست آورد.

هر انتقال وضعیت در فضا با دوران‌های متوالی حول سه بردار متعامد یک سیستم مختصات را می‌توان با یک دوران حول یک بردار ویژه با مقدار ویژه واحد به دست آورد [15]. اگر $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ به عنوان بردار ویژه و زاویه دوران با α تعریف شود می‌توان عناصر کواترنیون‌ها یا پارامترهای متقارن اوپلر را به صورت روابط (1) تعریف کرد.

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin(\alpha/2) \\ q_2 &= e_2 \sin(\alpha/2) \\ q_3 &= e_3 \sin(\alpha/2) \\ q_4 &= \cos(\alpha/2) \end{aligned} \quad (1)$$

پارامترهای کواترنیون شامل یک قسمت اسکالر و یک قسمت برداری و به صورت رابطه (2) می‌شوند.

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 \quad (2)$$

در رابطه (2) q_i اشاره به پارامترهای کواترنیون دارد که q_1, q_2, q_3 مربوط به قسمت برداری و q_4 مؤلفه اسکالر این پارامترهاست. بیان انتقال برحسب زوایای اولر سبب می‌شود تا ماتریس کسینوس هادی انتقال برحسب توابع مثلثاتی باشد که هم حل آن زمان‌بر است و هم احتمال وجود تکیگی در محاسبات دارد. به همین منظور به کمک کواترنیون‌ها انتقال معادلی بیان می‌شود که به طور گسترده در کنترل وضعیت فضاپیماها به کار می‌رود [15]. در ادامه با تعریف بردار $Q' = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ به صورت Q' رابطه مشتق زمانی کواترنیون‌ها می‌تواند به صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای بدنی مانند رابطه (3) بیان شود [8].

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Omega Q' \quad (3)$$

مؤلفه‌های $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ به کار رفته در رابطه (3) اشاره به سرعت‌های زاویه‌ای بدنی فضاپیما دارند.

3- دینامیک فضاپیما

براساس معادله معروف ممان اوپلر می‌توان معادله دینامیک حرکت دورانی یک فضاپیما با بدنه صلب را به صورت رابطه (4) بیان کرد [15].

$$T = \dot{h} + \omega \times h = I \dot{\omega} + \omega \times I \omega \quad (4)$$

در رابطه قبل T مبین گشتاورهای خارجی وارد بر فضاپیما، h مومنوم زاویه‌ای فضاپیما و $\dot{h}$ مشتق زمانی آن، I ماتریس ممان اینرسی فضاپیماست و بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی نیز با $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ نمایش داده می‌شود.

در صورتی که از وسایل تبادل مومنوم به عنوان عملگر در فضاپیما استفاده شود، مومنوم زاویه‌ای کل سیستم بین مومنوم زاویه‌ای بدنه فضاپیما صلب $h_b = [h_x \ h_y \ h_z]^T$ و مومنوم زاویه‌ای عملگر تبادل مومنوم h_w به صورت رابطه (5) تقسیم می‌شود [15].

$$h = h_b + h_w \quad (5)$$

همان‌طور که بیان شد چرخ‌های عکس‌العملی را می‌توان با چیدمان‌های گوناگون در ساختار فضاپیما به کاربرد. معادله مومنوم زاویه‌ای عملگرها برحسب نوع چیدمان به صورت رابطه (6) قابل بیان است.

$$h_w = L I_w \omega_w \quad (6)$$

که $I_w = \text{diag}(I_{w1}, I_{w2}, \dots, I_{wn})$ ماتریس قطری اینرسی چرخ‌های عکس‌العملی، $[L]_{3 \times n}$ ماتریس توزیع چرخ‌های عکس‌العملی و بردار $\omega_w = [\omega_{w1} \ \omega_{w2} \ \dots \ \omega_{wn}]^T$ سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی را نشان می‌دهد.

عبارت n بیان‌گر تعداد چرخ‌های به کار رفته در زیرسیستم کنترل است. ماتریس توزیع عملگرها برای چیدمان هرمی در ادامه بیان می‌شود.

چرخ‌های عکس‌العملی براساس انتقال مومنوم کار می‌کنند و فضاپیما در مقابل این انتقال از خود عکس‌العملی برابر و در خلاف جهت نشان خواهد داد تا مومنوم زاویه‌ای کل سیستم را در شرایط آرمانی برابر صفر حفظ کند؛ بنابراین نرخ مومنوم زاویه‌ای تولید شده توسط این عملگر با علامت مخالف به بدنه فضاپیما به صورت رابطه (7) منتقل می‌شود.

$$\dot{h}_w = -T_c \quad (7)$$

بردار $T_c = [T_{cx} \ T_{cy} \ T_{cz}]^T$ مؤلفه‌های گشتاور کنترلی را روی هر محور بدنی نشان می‌دهد. با جای‌گذاری روابط (7,5) در رابطه (4) می‌توان آن را به صورت رابطه (8) بازنویسی کرد [11].

$$\dot{\omega} = I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w) + T_c] \quad (8)$$

3-1- ماتریس توزیع چیدمان عملگرها

هر چند استفاده از چیدمان‌هایی با بیش از سه عملگر موجب افزایش وزن و هزینه می‌شوند، اما به دلیل حفظ توانایی کنترل وضعیت در صورت خرابی یک چرخ و اعمال برخی قیدهای بهینگی ترجیح داده می‌شوند. ماتریس توزیع برای هر چیدمان هندسی منحصر به فرد است و دارای n ستون مطابق با n عملگر است. در واقع هر بردار ستونی نشان‌دهنده چگونگی پخش گشتاور هر چرخ بر محورهای دوران فضاپیماست. یکی از رایج‌ترین انواع چیدمان که به کرات در پژوهش‌های فضایی از آن استفاده می‌شود چیدمان هرمی است که از چهار چرخ و به شکل یک هرم معکوس مانند شکل 1 بهره می‌برد. همان‌طور که در شکل 1 قابل مشاهده است در ابتدا محور دوران هر چرخ به اندازه زاویه β از صفحه $x_b - y_b$ انحراف دارد، سپس این ساختار برای اثربخشی بیشتر مانند شکل 2 حول محور z_b به اندازه زاویه θ دوران داده می‌شود. نحوه پخش گشتاور چرخ‌ها روی محورهای بدنی مانند رابطه (9) بیان می‌گردد [11].

$$\begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} = L_{3 \times 4} \begin{bmatrix} T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_{w4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه (9) T_{wi} اشاره به سهم هر عملگر از گشتاورهای فرمانی دارد. با فرض مقادیر زاویه‌ای $\beta = 35.264^\circ$ و $\theta = 45^\circ$ برای چیدمان هرمی، ماتریس توزیع برابر مقدار رابطه (10) خواهد بود.

$$L = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta & -\cos \beta \sin \theta & -\cos \beta \cos \theta & \cos \beta \sin \theta \\ \cos \beta \sin \theta & \cos \beta \cos \theta & -\cos \beta \sin \theta & -\cos \beta \cos \theta \\ \sin \beta & \sin \beta & \sin \beta & \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

همان‌طور که از شکل ماتریس توزیع (10) مشخص است، این ماتریس به دلیل غیرمربعی بودن معکوس‌پذیر نیست، یعنی در این حالت نمی‌توان از آن برای محاسبه سهم گشتاور هر عملگر از گشتاورهای فرمانی صادره از قانون کنترلی استفاده کرد. به منظور محاسبه بردار گشتاور عملگرها می‌توان از تبدیل شبه معکوس راست براساس مرجع [15] استفاده کرد. معکوس

$$EULERINT = \int \alpha dt \quad (14)$$

5- تئوری کنترل خطی سازی پس‌خورده¹

یکی از تئوری‌های مرسوم در کنترل غیرخطی روش خطی سازی پس‌خورده نام دارد. ایده اصلی این روش تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی (کلی یا جزئی) به خطی است و این کار به گونه‌ای صورت می‌گیرد که می‌توان از روش‌های کنترل خطی در طراحی استفاده کرد [5]. در استفاده از این روش دو راه‌کار کلی وجود دارد. مورد اول خطی سازی ورودی-خروجی است که با نام (خروجی-حالت) نیز شناخته می‌شود.

تفاوت اصلی خطی سازی ورودی-خروجی با ورودی-حالت در این است که در مورد اول قانون کنترلی باید بتواند یک خروجی را تعقیب نماید و یا به مقدار معینی برساند. هدف اصلی در خطی سازی پس‌خورده ورودی-خروجی یافتن یک ورودی کنترلی به شکلی است که با اعمال آن به سیستم غیرخطی حذف دینامیک‌های غیرخطی‌ها صورت گرفته و در نهایت خروجی به مقدار مورد نظر برسد. خروجی‌های سیستم که باید توسط کنترل کننده تعقیب شوند به طور مستقیم به ورودی‌های کنترلی وابسته نیستند. مشتق‌گیری از مؤلفه‌های خروجی تا ظاهر شدن ورودی برای اولین مرتبه روشی است که می‌توان با استفاده از آن یک رابطه ساده میان ورودی و خروجی سیستم ایجاد کرد [5].

چنانچه برای ایجاد یک رابطه صریح بین خروجی y و ورودی u لازم باشد از خروجی یک سیستم r مرتبه مشتق گرفته شود، گفته می‌شود که سیستم مرتبه نسبی r دارد؛ بنابراین هرکدام از مؤلفه‌های خروجی تا زمانی که یک مؤلفه ورودی کنترلی در معادلات ظاهر شود باید به تعداد کافی مشتق پذیر باشند.

با به کار بردن مشتق لی² که در ادامه بیان می‌شود، روش خطی سازی پس‌خورده ورودی-خروجی می‌تواند سیستم غیرخطی را به یک سیستم خطی تبدیل کند، سپس می‌توان یک قانون کنترل خطی را برای سیستم خطی شده به کار برد. بلوک دیاگرام این روش کنترلی در شکل 3 نشان داده شده است.

با تعریف متغیرهای حالت به صورت $x = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ و با در نظر گرفتن روابط (8,3) می‌توان سیستم غیرخطی را به صورت روابط (16,15) نشان داد [8]. در این روابط $u = [T_{cx} \ T_{cy} \ T_{cz}]^T$ بردار ورودی‌های سیستم و $y = [h_1(x) \ h_2(x) \ h_3(x)]^T = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ به عنوان بردار خروجی انتخاب شده است. از آنجا که یکی از مهم‌ترین خواص کواترینون‌ها رابطه $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$ است، می‌توان متغیر حالت q_4 را مستقیم از روابط (16,15) محاسبه کرد.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (15)$$

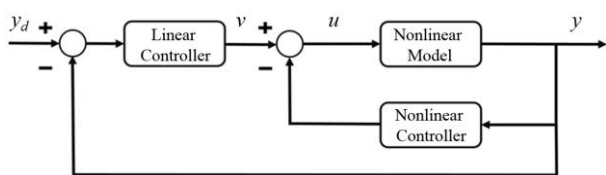


Fig. 3 Block diagram of input-output linearization method
 شکل 3 بلوک دیاگرام روش خطی سازی ورودی-خروجی

¹ Feedback Linearization Control (FLC)

² Lie

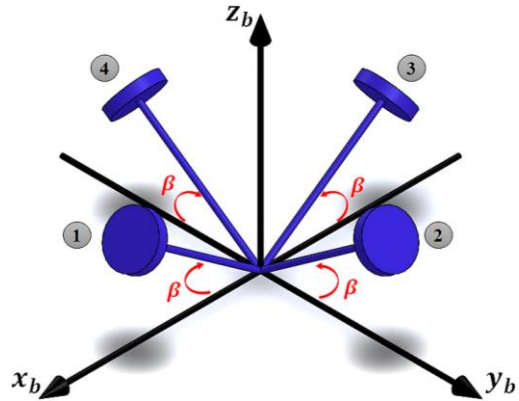


Fig. 1 The pyramid configuration of four reaction wheels

شکل 1 چیدمان هرمی چهار چرخ عکس‌العملی

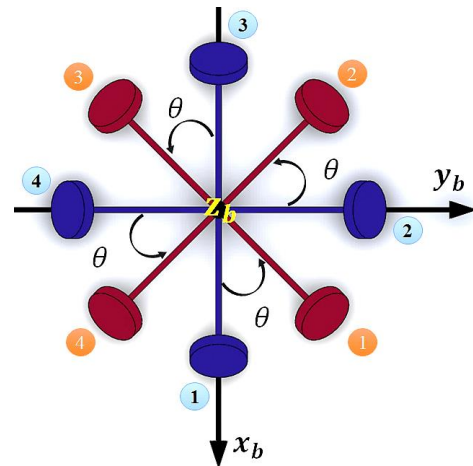


Fig. 2 Rotation of configuration around z_b

شکل 2 دوران چیدمان حول محور z_b

ماتریس توزیع از رابطه (11) به دست می‌آید.

$$[L^{-1}] = [L]^T \{ [L] \quad [L]^T \}^{-1} \quad (11)$$

در نتیجه مقدار گشتاور هر چرخ برابر با رابطه (12) است.

$$\begin{bmatrix} T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_{w4} \end{bmatrix} = \frac{3}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

4- اولر اینت

برای مقایسه قوانین کنترل می‌توان از برخی متغیرهای مشترک بهره برد. زوایای اوپلر طبیعی‌ترین متغیر فیزیکی هستند که جهت مقایسه کنترل وضعیت ماهواره می‌توان استفاده کرد. محاسبه زاویه خطای α در رابطه (13) حول محور دوران اوپلر معیاری از کیفیت قوانین کنترل است، زیرا این مؤلفه مبین مسیر زاویه‌ای کلی است که ماهواره در مدت مانور طی می‌کند [15].

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} (\text{trace}[A_E] - 1) \right) \quad (13)$$

در رابطه قبل ماتریس A_E بیانگر ماتریس خطای کسینوس هادی است. انتگرال این زاویه با نام اولر اینت به عنوان یک معیار مشخص برای سنجش قوانین کنترل وضعیت مختلف است [15]. کمتر بودن مقدار اولر اینت مبین بهره‌وری بیشتر روش کنترلی مورد استفاده از نظر حداقل سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده توسط فضاپیما و در نتیجه قوت کنترل کننده مورد استفاده است. به عبارت دیگر کمتر بودن اولر اینت به معنای سریع‌تر بودن روش کنترلی به صورت رابطه (14) است.

$$L_{gi} L_f^{r_i-1} h_i(x) = \sum_{j=1}^7 \frac{\partial L_f^{r_i-1} h_i}{\partial x_j} g_j(x), i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

در نتیجه با توجه به رابطه (20) برای سیستم مورد مطالعه مقدار ماتریس $D(x)$ برابر با رابطه (25) است.

$$D(x) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \{L_f^1 h(x)\} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_z \dot{q}_2}{2} - \frac{\omega_y \dot{q}_3}{2} + \frac{\omega_x \dot{q}_4}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_x}{2} - \frac{q_3 \dot{\omega}_y}{2} + \frac{q_2 \dot{\omega}_z}{2} \\ -\frac{\omega_z \dot{q}_1}{2} + \frac{\omega_x \dot{q}_3}{2} + \frac{\omega_y \dot{q}_4}{2} + \frac{q_3 \dot{\omega}_x}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_y}{2} - \frac{q_1 \dot{\omega}_z}{2} \\ \frac{\omega_y \dot{q}_1}{2} - \frac{\omega_x \dot{q}_2}{2} + \frac{\omega_z \dot{q}_4}{2} - \frac{q_2 \dot{\omega}_x}{2} + \frac{q_1 \dot{\omega}_y}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_z}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

و با استفاده از رابطه (21) مقدار ماتریس $E(x)$ نیز به صورت رابطه (26) محاسبه می شود.

$$E(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_4 \\ I_{xx} & I_{yy} & I_{zz} \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ I_{xx} & I_{yy} & I_{zz} \\ -q_2 & q_1 & q_2 \\ I_{xx} & I_{yy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (26)$$

با توجه به مرجع [5] برای دستگاه روابط (19) رابطه $y_i^{(r_i)} = v_i$ تعریف می شود که v_i بردار ورودی جدیدی است که تنها بر خروجی y_i اثر می گذارد و کامل کننده رابطه ورودی اصلی u برای اعمال به سیستم غیرخطی است. در نتیجه اثر ورودی u بر سیستم، حذف غیرخطی ها و کنترل خروجی سیستم از طریق v_i خواهد بود. پس روابط (19) به صورت رابطه (27) نشان داده می شوند [5].

$v_i = D(x) + E(x)u$ (27)
می توان رابطه (27) را برحسب ورودی کنترلی اصلی یعنی بردار u ، به صورت رابطه (28) بازنویسی کرد [5].

$u = E^{-1}(x)(v_i - D(x))$ (28)
خطی سازی پس خورد تنها در صورتی امکان پذیر است که اگر و تنها اگر ماتریس $E(x)$ ناتکین باشد، بدین معنی که $\det(E(x)) \neq 0$ باشد. به عبارت دیگر به منظور قرار دادن u در سمت چپ معادلات و با توجه به رابطه (28) باید ماتریس $E(x)$ معکوس پذیر باشد. پس با توجه به رابطه (26)، رابطه (29) را به صورت زیر داریم.

$$\det(E(x)) = \frac{q_4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}{8I_{xx}I_{yy}I_{zz}} = \frac{q_4}{8I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \quad (29)$$

زمانی که $q_4 \neq 0$ باشد، ماتریس $E(x)$ ناتکین و مسأله خطی سازی ورودی-خروجی برای سیستم غیرخطی قابل حل است.

با استفاده از روش خطی سازی پس خورد سیستم (15) به یک سیستم در مختصات مناسب که در حالت ورودی-خروجی خطی شده و نیز کنترل پذیر است، تبدیل می شود. با تعریف مختصات تغییر یافته به صورت $\xi = \Phi(x)$ ، به صورت رابطه (30) تعریف می شود [8].

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(x) = q_1 & \xi_4 &= L_f h_1(x) = \dot{q}_1 \\ \xi_2 &= h_2(x) = q_2 & \xi_5 &= L_f h_2(x) = \dot{q}_2 \\ \xi_3 &= h_3(x) = q_3 & \xi_6 &= L_f h_3(x) = \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (30)$$

در مختصات جدید سیستم به صورت رابطه (31) ارائه می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bv \\ y &= C\xi \end{aligned} \quad (31)$$

در روابط (31,30)، $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4 \ \xi_5 \ \xi_6]^T$ ، ماتریس متغیرهای حالت جدید است و A و B به ترتیب معرف ماتریس های وزنی متغیرهای سیستم و

$$y = h(x) \quad (16)$$

اگر تعداد متغیرهای حالت n و تعداد ورودی های سیستم m باشد، h و f میدان های برداری هموار و g یک ماتریس $n \times m$ است که ستون های g_i آن میدان های برداری هموار هستند [5]. مؤلفه های بردار ورودی سیستم با u_i و مؤلفه های بردار خروجی سیستم با y_i نمایش داده می شوند که در این مقاله $i = 1, 2, 3$ است. با توجه به معادلات دینامیک و سینماتیک سیستم و رابطه (15)، مقادیر ماتریس های $f(x)$ و $g(x)$ به صورت روابط (17,18) قابل محاسبه هستند.

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Omega Q' \\ I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w)] \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$g(x) = [g_1(x) \ g_2(x) \ g_3(x)] = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 3} \\ I^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

در این تئوری کنترلی تعیین توابع خروجی از متغیرهای حالت سیستم دارای اثر مستقیمی بر ایجاد دینامیک درونی و پایداری آن است. با مشتق گیری متوالی از $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ تا ظاهر شدن ورودی کنترلی برای اولین بار مشخص می شود که هر خروجی نیاز به دو مرتبه مشتق گیری دارد. بردار مرتبه نسبی سیستم غیرخطی با توجه به بردار متغیر حالت در نظر گرفته شده برابر با $[r_1 \ r_2 \ r_3]^T = [2 \ 2 \ 2]^T$ و مرتبه نسبی کل برابر مجموع مرتبه های نسبی و مساوی 6 خواهد بود. این در حالی است سیستم اصلی دارای مرتبه 7 است و طبق [18] تفاوت مرتبه نسبی کل با ابعاد سیستم اصلی به معنی وجود دینامیک درونی است که باید به کمک مفهوم دینامیک صفر مورد بررسی قرار گیرد. معنی این اختلاف این است که قسمتی از دینامیک سیستم در کنترل کننده دیده نمی شود.

5-1- طراحی ورودی کنترلی

با مشتق گیری متوالی از توابع خروجی سیستم که با رابطه (16) نشان داده شده اند تا ظاهر شدن u برای اولین مرتبه می توان معادلات مشتقات توابع خروجی که در آن ها ورودی کنترلی نمایان شده است را به صورت رابطه (19) استخراج کرد [8].

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ y_3^{(r_3)} \end{bmatrix} = D(x) + E(x)u \quad (19)$$

در رابطه (19) اشاره به مشتق مرتبه r مؤلفه های خروجی سیستم دارد و r_i معرف مرتبه نسبی متناسب با خروجی y_i است. ماتریس های $D(x)$ و $E(x)$ به صورت روابط (20,21) محاسبه می شوند [8].

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ L_f^{r_3} h_3(x) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g3} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_3-1} h_3(x) & \cdots & L_{g3} L_f^{r_3-1} h_3(x) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ماتریس $E(x)$ یک ماتریس $m \times m$ است و برای محاسبه درایه های این ماتریس ها از تعاریف مشتقات لی به صورت روابط (22-24) استفاده می شود [5].

$$L_f h_i(x) = \sum_{j=1}^7 \frac{\partial h_i}{\partial x_j} f(x), \quad (22)$$

$$L_f^{r_i} h_i(x) = L_f(L_f^{r_i-1} h_i(x)) = \sum_{j=1}^7 \frac{\partial L_f^{r_i-1} h_i}{\partial x_j} f(x), \quad (23)$$

ورودی های کنترلی هستند. مقدار ماتریس های وزنی برابر با رابطه (32) است.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ C &= [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3}] \end{aligned} \quad (32)$$

اکنون برای سیستم خطی (31) به کمک قوانین کنترل خطی می توان یک ورودی کنترلی v طراحی کرد. برای این سیستم خطی ورودی کنترلی خطای وضعیت زیر را در نظر می گیریم که در آن K_1 و K_2 ماتریس های ضرایب ثابت و مثبت هستند و q_i^d اشاره به مؤلفه های کوآرنیون مطلوب یا نهایی دارد. در رابطه (33) قسمت $q_i - q_i^d$ خطای وضعیت است که مشتق آن به صورت $\dot{q}_i - \dot{q}_i^d$ به دست می آید.

با توجه به این که در این مقاله وضعیت نهایی فضایی یک وضعیت ثابت بوده و $q_i^d = \text{cte}$ است، پس مشتق زمانی q_i^d صفر خواهد بود، یعنی $\dot{q}_i^d = 0$ است. در نتیجه قسمت نرخ خطای وضعیت تنها با $\dot{q}_i$ نشان داده می شود. برای تعیین ماتریس ضرایب K_1 و K_2 از تئوری کنترل بهینه و روش تنظیم کننده مربعی خطی به صورت رابطه (33) استفاده شده است.

$$v_i = -K_1(q_i - q_i^d) - K_2\dot{q}_i \quad (33)$$

5-2- بررسی پایداری سیستم خطی حلقه بسته

در این قسمت پایداری سیستم خطی رابطه (31) با ورودی کنترلی رابطه (33) مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا برای هر تابع خروجی $h_i(x)$ رابطه (34) را به صورت زیر داریم.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_i(x) \\ L_f h_i(x) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_i \quad (34)$$

در رابطه (34) متغیرهای ξ_1^i و ξ_2^i به صورت (35) بیان می شوند.

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= h_1(x) = q_1 & \xi_2^1 &= L_f h_1(x) = \dot{q}_1 \\ \xi_1^2 &= h_2(x) = q_2 & \xi_2^2 &= L_f h_2(x) = \dot{q}_2 \\ \xi_1^3 &= h_3(x) = q_3 & \xi_2^3 &= L_f h_3(x) = \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (35)$$

سپس خطاهای تعقیب رابطه (36) تعریف شده اند.

$$e_{\alpha_i} = \alpha_i - \alpha_i^d \quad e_{\beta_i} = \beta_i - \beta_i^d \quad (36)$$

نمادهای $\alpha_i, \alpha_i^d, \beta_i, \beta_i^d$ به صورت رابطه (37) تعریف شده و بالانویس d اشاره به مقادیر مطلوب یا فرمانی دارد.

$$\begin{aligned} \xi_1^i &= \alpha_i = q_i & \xi_2^i &= \beta_i = \dot{q}_i \\ \alpha_i^d &= q_i^d & \beta_i^d &= \dot{q}_i^d \end{aligned} \quad (37)$$

همان طور که پیشتر نیز بیان شد مقادیر مطلوب ثابت هستند یعنی $q_i^d = \text{cte}$ و مشتق زمانی آن ها صفر است، پس رابطه (38) را به صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i^d &= \dot{q}_i^d = 0 \\ \dot{\alpha}_i^d &= \dot{q}_i^d = 0 \\ e_{\beta_i} &= \beta_i \end{aligned} \quad (38)$$

با مشتق گیری از روابط خطای تعقیب تعریف شده روابط (39) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\alpha_i} &= \dot{\alpha}_i - \dot{\alpha}_i^d = \dot{\alpha}_i \\ \dot{e}_{\beta_i} &= \dot{\beta}_i - \dot{\beta}_i^d = \dot{\beta}_i \end{aligned} \quad (39)$$

با استفاده از تعاریف رابطه (37)، رابطه (34) به صورت رابطه (40) بازنویسی می شود.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_i \quad (40)$$

ورودی کنترلی رابطه (33) نیز به فرم ماتریسی (41) نشان داده است.

$$\begin{aligned} v_i &= -K_1(\alpha_i - \alpha_i^d) - K_2\beta_i \\ v_i &= -[K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + K_1\alpha_i^d \end{aligned} \quad (41)$$

با قرار دادن رابطه (41) در رابطه (40) رابطه (42) را داریم.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + K_1\alpha_i^d \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} \alpha_i^d \end{aligned} \quad (42)$$

با در نظر گرفتن روابط (38,37) معادلات حالت خطا به صورت رابطه (43) حاصل می شوند.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{\alpha_i} \\ e_{\beta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\alpha_i} + \alpha_i^d \\ e_{\beta_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} \alpha_i^d \quad (43)$$

در نتیجه دینامیک حلقه بسته به صورت رابطه (44) ارائه می شود.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{\alpha_i} \\ e_{\beta_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\alpha_i} \\ e_{\beta_i} \end{bmatrix} \\ e_{q_i} &= q_i - q_i^d \\ e_{\dot{q}_i} &= \dot{q}_i \end{aligned} \quad (44)$$

در پژوهش های هوافضایی نظیر مرجع [19] بررسی پایداری به کمک تئوری لیاپانوف بسیار مرسوم است. در این مقاله نیز برای اثبات پایداری این سیستم خطی حلقه بسته، لم زیر مورد استفاده قرار گرفته است. این لم از طریق بیان توابع لیاپانوف برای سیستم های خطی نامتغیر با زمان در مرجع [5] اثبات شده است. برای بیان این لم در ابتدا فرض می شود که سیستم خطی $\dot{x} = A_c x$ مفروض است. تابع لیاپانوف مربعی انتخابی رابطه (45) پیشنهاد می شود

$$V = x^T P x \quad (45)$$

که در آن P ماتریس معین مثبت متقارن مفروض است. با مشتق گیری از تابع معین مثبت V ، فرم مربعی دیگری به صوت رابطه (46) به دست می آید [5].

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = -x^T Q x \quad (46)$$

که در آن رابطه (47) را داریم [5].

$$A_c^T P + P A_c = -Q \quad (47)$$

لم: شرط لازم و کافی برای این که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان مانند $\dot{x} = A_c x$ کاملاً پایدار باشد این است که برای هر ماتریس معین مثبت متقارن Q ، پاسخ واحد ماتریس P از معادله لیاپانوف (47)، معین مثبت متقارن باشد [5].

در این مقاله A_c ، ماتریس سیستم حلقه بسته است. پس اگر با انتخاب یک Q معین مثبت فرضی و حل رابطه (47)، ماتریس P به دست آمده معین باشد، آن گاه V یک تابع لیاپانوف سیستم خطی است و پایداری مجانبی و کلی را تضمین می کند [5].

با در نظر گرفتن ضرایب K_1 و K_2 به صورت مقادیر $K = (0.2535, 0.0316)$ و با توجه به رابطه (44) می توان رابطه (48) را به صورت زیر نوشت.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0316 & -0.2535 \end{bmatrix} \quad (48)$$

با انتخاب Q به صورت رابطه (49) است.

$$Q = I_{2 \times 2} \quad (49)$$

و حل رابطه (47)، ماتریس P به صورت رابطه (50) حاصل می شود.

$$P = \begin{bmatrix} 68.4008 & -0.5 \\ -0.5 & 2.0347 \end{bmatrix} \quad (50)$$

اکنون با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس P برابر با 2.0309 و 68.4045 و با توجه به مثبت بودن هر دو مقدار اثبات می شود که این ماتریس معین مثبت متقارن است. با توجه به این که ضرایب K_1 و K_2 برای هر سه ورودی کنترلی v_i یکسان هستند و ماتریس A_c نیز برای هر تابع خروجی $h_i(x)$ فرآیندی مشابه استخراج می شود، و مثبت معین بودن ماتریس P می توان بیان کرد که سیستم خطی حلقه بسته با ضرایب ورودی کنترلی انتخاب شده دارای

پایداری مجانبی و کلی است.

3-5- تحلیل دینامیک صفر

همان‌طور که بیان شد اختلاف مرتبه سیستم اصلی که دارای هفت متغیر حالت بوده (در زمان بیان سینماتیک برحسب کواترانیون) با مرتبه نسبی کل برابر مجموع مرتبه‌های نسبی، برابر یک است که اشاره به وجود یک دینامیک درونی دارد. باید توجه کرد که متغیر حالت q_4 به خروجی y متصل و مرتبط نیست. به عبارت دیگر کنترل خطی سازی پس‌خور، q_4 را از خروجی غیرقابل مشاهده کرده است. باید مطمئن شد که متغیر q_4 به خوبی رفتار می‌کند. این همان دینامیک درونی مطرح شده است که باید رفتار آن برای طراحی قانون کنترل مورد بررسی قرار گیرد.

پایداری این دینامیک درونی با به کار بردن مفهوم دینامیک صفر به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور η به عنوان متغیر دینامیک صفر در نظر گرفته می‌شود که باید دو نیازمندی مهم زیر را ارضا کند [8]:

1- باید رابطه $g(x) = 0$ ($\partial\eta/\partial x$) برقرار باشد. با توجه به این که q_4 دینامیک درونی است پس متغیر دینامیک صفر به صورت $\eta = q_4$ انتخاب می‌شود؛ بنابراین باید از متغیر دینامیک صفر انتخابی نسبت به بردار متغیرهای حالت نمایش داده شده $x = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ مشتق گرفته شود و بردار حاصل شده در ماتریس $g(x)$ که دارای مقداری برابر با رابطه (18) است، ضرب شود (به صورت رابطه (51) است). در نتیجه طبق (51) اولین نیازمندی مورد نظر ارضا می‌شود.

2- تبدیل $z = T(x) = [\eta; \xi]$ نگاشت هموار ریختی¹ باشد. به منظور اطمینان از این که $z = T(x) = [\eta; \xi]$ یک هموار ریختی است باید ماتریس ژاکوبین z ایجاد شود و درمیان آن به صورت روابط (52-54) تعیین گردد [8].

$$J(z) = \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0_{4 \times 3} \\ \Gamma(Q) \end{matrix} \quad (52)$$

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\Gamma(Q) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

و در نتیجه رابطه (55) را داریم.

$$\det(J(x)) = \frac{-q_4}{8} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = \frac{-q_4}{8} \quad (55)$$

زمانی که $q_4 \neq 0$ باشد، ماتریس ژاکوبین ناکین است و دینامیک صفر هر دو نیازمندی را ارضا می‌کند، پس سیستم در این حالت پایدار خواهد بود.

6- تنظیم کننده مربعی خطی²

این کنترل کننده یک روش کنترل بهینه است که بهترین عملکرد ممکن را با توجه به برخی شاخص‌های عملکرد فراهم می‌کند. مسأله طراحی این کنترل کننده در واقع مسأله طراحی یک پس‌خور حالت کنترلی مانند K است که تابع هدف خاصی مانند J را به حداقل مقدار برساند. در این روش یک

ماتریس بهره پس‌خور طراحی می‌شود که تابع معیاری را به منظور دستیابی به بعضی روابط میان تلاش کنترلی، مقدار و سرعت پاسخ یک سیستم پایدار حداقل می‌کند [20]. برای یک سیستم خطی زمان پیوسته که به شکل رابطه (31) بیان می‌شود، تابع معیار (56) را در نظر می‌گیریم [12].

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (56)$$

Q و R ماتریس‌های وزنی، Q ماتریس متقارن مثبت معین یا مثبت نیمه معین و R ماتریس متقارن و مثبت معین است. برای راحتی در طراحی ماتریس‌های Q و R را در عمل می‌توان به صورت قطری در نظر گرفت. قانون کنترل پس‌خوردی که مقدار تابع معیار را حداقل می‌کند به صورت رابطه (57) تعریف می‌گردد [12].

$$u_{LQR} = -Kx \quad (57)$$

که مقدار K به صورت رابطه (58) محاسبه می‌شود [12].

$$K = R^{-1} B^T P \quad (58)$$

و P با حل معادله زمان پیوسته جبری ریکاتی رابطه (59) حاصل می‌شود [12].

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (59)$$

6-1- طراحی ورودی کنترلی تنظیم کننده مربعی خطی

در این حالت گشتاور ورودی کنترلی سیستم، مبتنی بر کنترل کننده تناسبی-مشتقی با پس‌خور کواترانیون در نظر گرفته شده است که ماتریس بهره‌های آن توسط الگوریتم تنظیم کننده مربعی خطی تعیین می‌شود. مقدار این گشتاور ورودی کنترلی از رابطه (60) به دست می‌آید [15].

$$\begin{aligned} T_{cx} &= 2K_x q_{E1} q_{E4} - K_{xd} \omega_x \\ T_{cy} &= 2K_y q_{E2} q_{E4} - K_{yd} \omega_y \\ T_{cz} &= 2K_z q_{E3} q_{E4} - K_{zd} \omega_z \end{aligned} \quad (60)$$

در رابطه (60) مؤلفه‌های ماتریس $q_E = [q_{E1} \ q_{E2} \ q_{E3} \ q_{E4}]^T$ درایه‌های ماتریس خطای وضعیت برحسب کواترانیون‌ها هستند. این ماتریس به صورت رابطه (61) محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} q_{E1} \\ q_{E2} \\ q_{E3} \\ q_{E4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{T4} & q_{T3} & -q_{T2} & q_{T1} \\ -q_{T3} & q_{T4} & q_{T1} & q_{T2} \\ q_{T2} & -q_{T1} & q_{T4} & q_{T3} \\ -q_{T1} & -q_{T2} & -q_{T3} & q_{T4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_{S1} \\ -q_{S2} \\ -q_{S3} \\ q_{S4} \end{bmatrix} \quad (61)$$

با توجه به رابطه (60)، $T_c = [T_{cx} \ T_{cy} \ T_{cz}]^T$ بردار گشتاورهای فرمانی است و بهره‌های کنترلی تناسبی و مشتقی به ترتیب با $K_{x,y,z}$ و $K_{xd,yd,zd}$ نشان داده شده‌اند. سیستم غیرخطی به منظور اعمال این الگوریتم بهینه باید خطی سازی شود. ساختار روابط (62،63) فرم استاندارد فضای حالت یک سیستم خطی را نشان می‌دهد [11].

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (62)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (63)$$

برای خطی سازی معادلات فرض زیر را براساس این ویژگی که پارامتر q_4 به سادگی از معادله $1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$ قابل محاسبه است به صورت رابطه (64) در نظر می‌گیریم.

$$f(q) = q_4 = \sqrt{1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)} \quad (64)$$

حال می‌توانیم ماتریس کواترانیون را به صورت رابطه (65) تعریف کنیم [21].

$$Q'' = \begin{bmatrix} f(q) & -q_3 & q_2 \\ q_3 & f(q) & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & f(q) \end{bmatrix} \quad (65)$$

با این فرض نگاشت یک به یکی میان ω و $\dot{q}$ به صورت رابطه (66) به وجود می‌آید.

$$\omega = 2Q''^{-1} \dot{q} \quad (66)$$

¹ Diffeomorphism

² Linear Quadratic Regulator

پس بنابراین رابطه (67) را داریم.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f(q) & -q_3 & q_2 \\ q_3 & f(q) & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & f(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} Q'' \omega$$

$$= g(q_1, q_2, q_3, \omega) \quad (67)$$

در این قسمت $\alpha = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, q_1, q_2, q_3)$ بردار متغیرهای حالت سیستم و $u = [T_{cx} \ T_{cy} \ T_{cz}]^T$ بردار ورودی های کنترلی است. ماتریس های وزنی برای خطی سازی سیستم به صورت رابطه (68) محاسبه می شوند [11].

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (68)$$

سیستم می تواند در $q = [0 \ 0 \ 0]^T$ و $\omega = [0 \ 0 \ 0]^T$ به شکل روابط (69-74) خطی سازی شود.

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} = I^{-1} S(h_w) \quad \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$A = \begin{bmatrix} I^{-1} S(h_w) & 0_{3 \times 3} \\ 0.5 \times I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial u} = I^{-1} \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$B = \begin{bmatrix} I^{-1} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$C = I_{6 \times 6} \quad (74)$$

در روابط (71,70) نماد S بیانگر ماتریس عملگر ضرب خارجی است. اکنون با داشتن ماتریس های A و B سیستم می توان ماتریس ضرایب کنترلی مورد نظر را به دست آورد. روش تنظیم کننده مربعی خطی دارای یک پایداری مقاوم ذاتی است. بی نهایت بودن حاشیه بهره در این روش از جمله دلایل اثبات پایداری آن است [22].

7- شبیه سازی و نتایج

به منظور مقایسه و بررسی ورودی های کنترلی طراحی شده با دو تئوری خطی و غیرخطی برای فضایی که مشخصات آن در ادامه بیان می شود، شبیه سازی هایی به کمک نرم افزار متلب انجام شده که نتایج و داده های خروجی آن ها در قالب کردار و جدول ارائه می گردد.

مشخصات فضاپیما که در ادامه بیان می شوند از مرجع [11] استخراج شده اند. ماتریس ممان اینرسی فضاپیما برابر با $I = \text{diag}(4, 4, 3) \text{ kg.m}^2$ و مقدار ممان اینرسی قسمت دوار هر عملگر $I_w = 5 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ است، همچنین فرض صلبیت نیز برای فضاپیما در نظر گرفته شده و مشخصات مکانیکی هر چهار عملگر مشابه یکدیگر بوده و دارای محدودیت سرعت نامی $\omega_{w_MAX} = 5400 \text{ rpm}$ است. در طراحی برای ایجاد یک حاشیه امن، بیشترین سرعت، $\omega_{w_MAX} = 5000 \text{ rpm}$ در نظر گرفته شده است. شبیه سازی در یک بازه زمانی 60 ثانیه ای انجام شده است.

در تعیین ضرایب کنترلی در هر دو روش کنترل خطی و غیرخطی تلاش شده تا رفتار سیستم دارای مشخصات زیر باشد:

زمان نشست در کردارهای تغییر وضعیت تا حد امکان یکسان باشد و حداقل فراجش در تغییر وضعیت سیستم مشاهده شود. این در حالی است که باید توجه شود که سرعت بیشینه چرخ های عکس العملی در محدوده مجاز

باقی بماند و در نهایت باید در طول بازه شبیه سازی در نظر گرفته شده سیستم به وضعیت پایداری نهایی برسد.

همان طور که پیشتر هم بیان شده علاوه بر طراحی تنظیم کننده مربعی خطی به صورت مستقل در طراحی قسمت خطی تئوری خطی سازی پسخورد نیز از همین تکنیک استفاده شده است. ماتریس های وزنی Q و R و ماتریس بهره های کنترلی رابطه (60) در روش تنظیم کننده خطی عبارت از روابط (75-78) است.

$$Q_{LQR} = \begin{bmatrix} 13131 \times I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 170 \times I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$R_{LQR} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$K_x = K_y = K_z = 0.2608 \quad (77)$$

$$K_{xd} = K_{yd} = 2.5091, K_{zd} = 2.4566 \quad (78)$$

مقادیر این مؤلفه ها برای کنترل کننده بهینه مربوط به قسمت خطی روش خطی سازی پسخورد و بهره های مورد استفاده در رابطه (33) به شرح روابط (79-82) است.

$$Q = 0.1 \times I_{6 \times 6} \quad (79)$$

$$R = 100 \times I_{3 \times 3} \quad (80)$$

$$K_1 = 0.0316 \quad (81)$$

$$K_2 = 0.2535 \quad (82)$$

در تعیین ماتریس های وزنی Q و R با استفاده از قانون برایسون مقادیر اولیه ای برای ماتریس ها در نظر گرفته شده است و سپس با فرآیند سعی خطا و تغییر مقادیر اولیه سعی شده تا رفتار سیستم مطابق با نیازمندی های در نظر گرفته شده باشد [23].

جهت اطمینان از صحت داده های به دست آمده شش مانور تغییر وضعیت در نظر گرفته شده که شامل مانورهای زاویه بزرگ و کوچک هستند و مشخصات آن ها در جدول 1 نمایش داده شده است. وضعیت اولیه در همه مانورها موقعیت $[\phi_0 \ \theta_0 \ \psi_0] = [0 \ 0 \ 0]$ است. تنها کردارهای مربوط به مانور اول رسم شده و نتایج سایر مانورها در جدول 2 ثبت شده اند. رفتار عملگرها در مانورهای متنوع و با استفاده از تئوری های کنترل خطی و غیرخطی توسط سه معیار زیر مورد ارزیابی قرار گرفته است [16].

$$1- \text{توان مصرفی } P = V i$$

$$2- \text{حد اقل انرژی } \int_{t_0}^{t_f} T_{actuator}^2$$

$$3- \text{حد اقل سوخت } \int_{t_0}^{t_f} |T_{actuator}|$$

محاسبه میزان توان نیازمند داشتن اطلاعاتی از موتور عملگر است. برای عملگری با مشخصات در نظر گرفته شده از مرجع [11] به صورت رابطه (83) داریم.

$$K_T = 12.36 \text{ mNm/A} \quad K_V = 1.294 \text{ mV/rpm} \quad (83)$$

در رابطه (83)، K_T ثابت موتور DC و K_V ، ثابت ولتاژ موتور و به صورت رابطه (84) است.

$$T_w = K_T i \quad V = K_V \omega_w \quad (84)$$

جدول 1 مانورهای تغییر وضعیت

Table 1 Attitude maneuvers

شماره مانور	وضعیت نهایی (درجه)
1	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [20 \ -30 \ -40]$
2	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [-40 \ 30 \ 60]$
3	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [-30 \ -50 \ -45]$
4	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [5 \ 5 \ 5]$
5	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [-5 \ 3 \ 2]$
6	$[\phi_f \ \theta_f \ \psi_f] = [-3 \ 2 \ -40]$

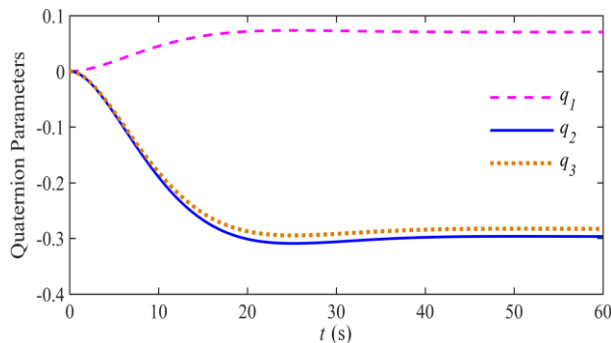


Fig. 6 Quaternion parameters in maneuver 1 and FLC method

شکل 6 پارامترهای کوآترنیون در مانور یک با روش خطی سازی پس‌خور

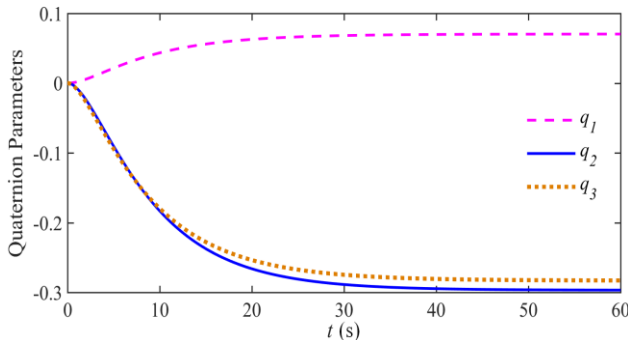


Fig. 7 Quaternion parameters in maneuver 1 and LQR method

شکل 7 پارامترهای کوآترنیون در مانور یک با روش کنترل بهینه

آهنگ تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ‌ها باعث تولید گشتاور فرمانی در فضاپیما می‌شود. برای اجرای مانور تغییر وضعیت، چهار چرخ عکس‌العملی از حالت سکون شروع به دوران کرده‌اند و براساس شکل‌های 8 و 9 در پایان مانور سرعت دیسک‌ها به مقدار صفر رسیده است. چرخ‌های عکس‌العملی براساس منطق وسایل تبادل مومنتوم کار می‌کنند. گشتاور تولیدی توسط این عملگرها گشتاور داخلی به حساب می‌آید. همین امر موجب می‌شود تا با صرف‌نظر از گشتاورهای خارجی و صفر بودن سرعت زاویه‌ای اولیه چرخ‌ها طبق قانون بقای مومنتوم زاویه‌ای، سرعت عملگرها در خاتمه نیز مجدداً به صفر برسد. مورد دیگری که در تعیین ضرایب به آن توجه شده بود اجرای مانور بدون عبور از سرعت ماکزیمم عملگرهاست. با توجه به کردارهای تغییرات سرعت زاویه‌ای عملگرها برای هر دو روش کنترل، بیشینه سرعت زاویه‌ای تقریباً برابر و در حدود 3000 دور بر دقیقه است.

بررسی شکل‌های 10 و 11 نیز نشان می‌دهد که فضاپیما با استفاده از هر دو تئوری از حالت سکون اولیه با کسب سرعت زاویه‌ای بدنی شروع به دوران کرده و در پایان مانور به حالت پایداری و سکون مجدد رسیده است.

شکل‌های 12 و 13 نیز به کردارهای مقادیر گشتاور فرمانی مورد نیاز برای اجرای این مانور تغییر وضعیت اختصاص دارند. در نتیجه می‌توان بیان کرد که روش‌های کنترلی در اجرای وظیفه خود براساس محدودیت‌های طراحی عملکرد مناسبی داشته‌اند.

آنچه در این جا قابل توجه است مقدار کمتر اولر اینت با استفاده از روش خطی سازی پس‌خور در مقابل استفاده از تنظیم‌کننده مربعی خطی است. با توجه به شکل 14 و مقادیر جدول 2، مقدار اولر اینت در مانور یک برای کنترل غیرخطی برابر 458.63 و برای کنترل خطی برابر 496.44 است. براساس مطالب ارائه شده در قسمت مربوط به اولر اینت در متن، کنترل غیرخطی در مقایسه با کنترل خطی کنترل‌کننده سریع‌تری بوده و مانور فرمانی حول سه محور بدنی را با سرعت بیشتری به انجام می‌رساند. در جدول 2 مقادیر

جدول 2 نتایج روش‌های کنترل خطی سازی پس‌خور و خطی بهینه

Table 2 The results from FLC and LQR control methods

مانور	تئوری کنترلی	$\sum P $ (Watt)	$\sum T_w $ (Nm)	$\sum T_w^2$	EULERINT (deg s)
1	FLC	357.3	5.37	0.19	458.63
	LQR	741.5	14.8	1.07	496.44
2	FLC	959.34	8.22	0.46	804.67
	LQR	1699.5	21.2	1.83	940.54
3	FLC	857.04	9.22	0.48	768.29
	LQR	1874.1	18.95	1.7	883.8
4	FLC	6.8	0.7973	0.0036	71.33
	LQR	18.92	1.81	0.017	78.85
5	FLC	8.08	0.8	0.0034	57.42
	LQR	18.56	1.74	0.016	59.84
6	FLC	165.6	4.36	0.09	372.47
	LQR	523.1	11.85	0.6153	392.26

در طراحی کنترل غیرخطی خطی سازی پس‌خور این مطلب مشخص شد که نخست برای این که معادله ورودی کنترلی (28) برای کنترل سیستم غیرخطی، همواره قابل محاسبه باشد، باید ماتریس $E(x)$ دارای دترمینانی غیرصفر باشد.

پس براساس رابطه (29) مؤلفه q_4 نباید صفر باشد. دوم برای دستیابی به یک سیستم خطی مناسب باید نگاشت z یک هموارریختی باشد که با بررسی این مورد نیز نتیجه‌ای مشابه مورد پیشین به دست می‌آید. یعنی مؤلفه q_4 نباید صفر باشد.

همان‌طور که در قسمت تعیین بهره‌های کنترلی بیان شد تلاش شده تا تغییر وضعیت در بازه شبیه‌سازی به مقادیر مطلوب رسیده و زمان‌های نشست در هر دو روش تا حد امکان یکسان باشند. این مطلب به وضوح در کردارهای شکل‌های 4 و 5 مربوط به مانور یک قابل تشخیص است. هر دو تئوری کنترلی توانسته‌اند تقریباً با زمان نشست حدوداً 40 ثانیه‌ای سیستم را به سمت زوایای فرمانی هدایت کنند. در شکل‌های 6 و 7 کردار تغییرات پارامترهای کوآترنیون برای هر دو روش نشان داده شده است.

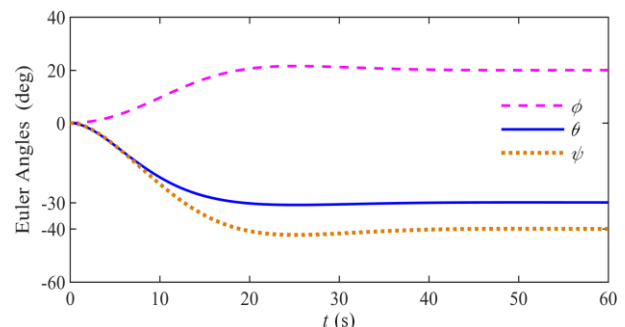


Fig. 4 The Euler angles in maneuver 1 and FLC method

شکل 4 تغییرات زوایای اوایلر در مانور یک با روش خطی سازی پس‌خور

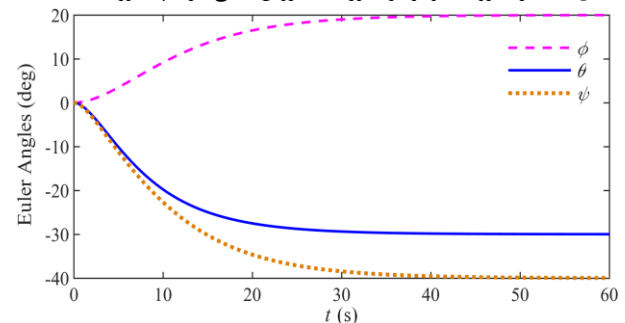


Fig. 5 The Euler angles in maneuver 1 and LQR method

شکل 5 تغییرات زوایای اوایلر در مانور یک با روش کنترل بهینه

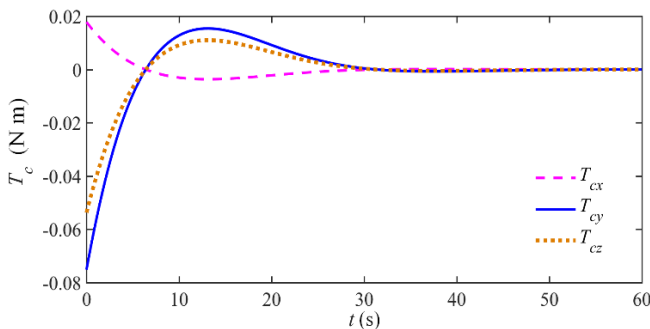


Fig. 12 The command torques in maneuver 1 and FLC method

شکل 12 گشتاورهای فرمانی در مانور یک با روش خطی سازی پس‌خورد

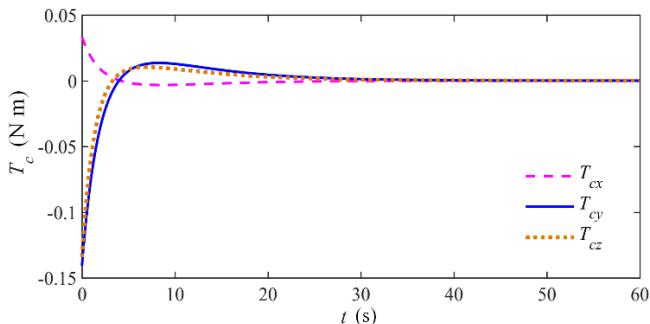


Fig. 13 The command torques in maneuver 1 and LQR method

شکل 13 گشتاورهای فرمانی در مانور یک با روش کنترل بهینه

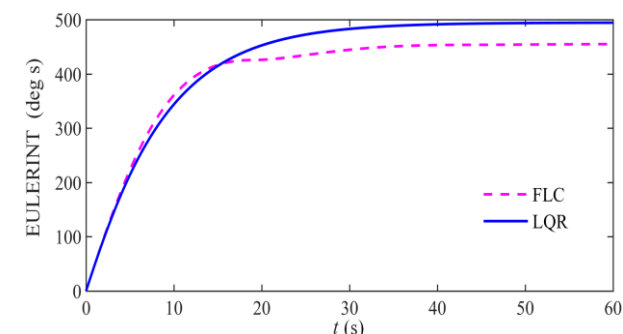


Fig. 14 EULERINT for FLC and LQR method

شکل 14 تغییرات اولر اینت روش خطی سازی پس‌خورد و روش تنظیم کننده مربعی خطی در مانور یک

کمتری است. برای مثال در مانور یک توان مصرفی مجموع برای کنترل کننده بهینه برابر با 741.5 وات بوده و این مقدار برای روش خطی سازی پس‌خورد برابر با 357.3 وات محاسبه شده است. پس روش خطی سازی پس‌خورد که در قسمت خطی آن از کنترل بهینه استفاده شده نه تنها روش سریع‌تری است، بلکه این در حالی است که میزان مصرف توان و انرژی و تلاش عملگرها نیز در آن کمتر از روش کنترل بهینه به‌تنهایی است.

در نهایت همان‌طور که بیان شد برای اطمینان از نتایج به‌دست‌آمده مانورهای متعددی طراحی و شبیه‌سازی شده که شامل مانورهای زاویه بزرگ و کوچک است و در همه مانورها که نتایج آن‌ها در جدول 2 ثبت شده است، نتایج بر عملکرد سریع‌تر و بهینه‌تر کنترل خطی سازی پس‌خورد دلالت دارد. مقایسه اثر استفاده از تئوری‌های خطی متفاوت در طراحی کنترل کننده خطی ساز پس‌خورد با توجه به معیارهای بیان شده و استفاده از این روش کنترل غیرخطی همراه با روش‌های کنترل مقاوم موضوعاتی است که می‌توان در ادامه مسأله تعریف شده در این پژوهش به آن‌ها پرداخت.

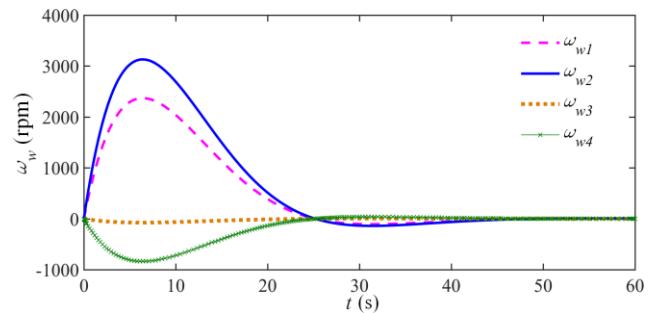


Fig. 8 Angular velocity of actuators in maneuver 1 and FLC method

شکل 8 تغییرات سرعت عملگرها در مانور یک با روش خطی سازی پس‌خورد

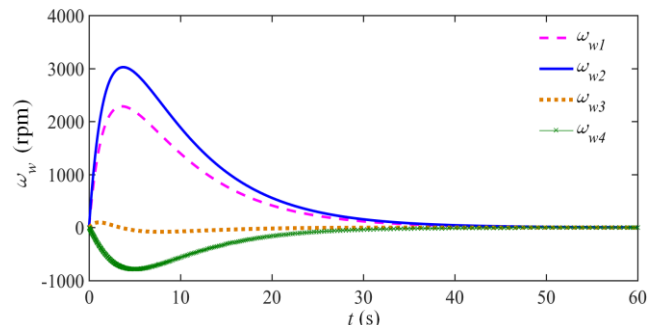


Fig. 9 Angular velocity of actuators in maneuver 1 and LQR method

شکل 9 تغییرات سرعت عملگرها در مانور یک با روش کنترل بهینه

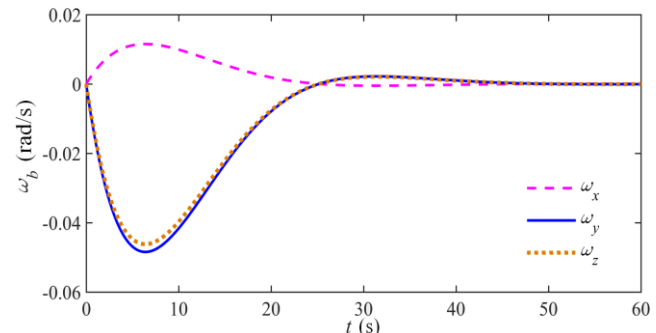


Fig. 10 Angular velocity of spacecraft in maneuver 1 and FLC method

شکل 10 سرعت‌های زاویه‌ای بدنی در مانور یک با روش خطی سازی پس‌خورد

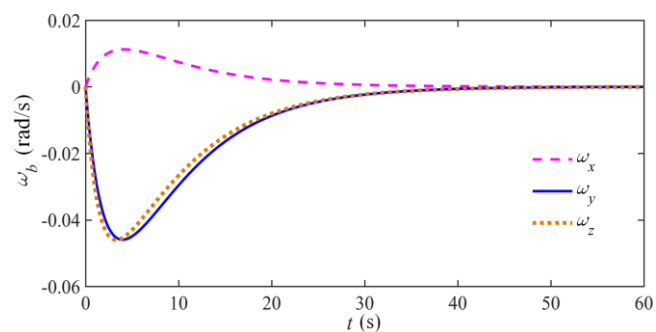


Fig. 11 Angular velocity of spacecraft in maneuver 1 and LQR method

شکل 11 سرعت‌های زاویه‌ای بدنی در مانور یک با روش کنترل بهینه

اولر اینت برای هر دو روش کنترلی و در شش مانور مجزا ثبت شده که در همه آن‌ها مقدار این پارامتر در تئوری خطی سازی پس‌خورد کمتر است.

پس از بررسی سرعت روش‌های کنترلی در قسمت پیشین، اکنون به بررسی میزان توان مصرف شده، انرژی و تلاش مجموع عملگرها می‌پردازیم. دوباره نتایج جدول 2 نشان می‌دهد که توان مصرفی و میزان تلاش کنترلی عملگرها با استفاده از کنترل غیرخطی طراحی شده برای تمام مانورها مقدار

8- نتیجه‌گیری

با بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها مشخص شد که کنترل غیرخطی خطی‌سازی پس‌خور و کنترل تنظیم‌کننده مربعی خطی طراحی شده برای مسأله کنترل وضعیت فضاپیما با احتساب دینامیک عملگر چرخ عکس‌العملی کارآمد هستند. از آن‌جا که یکی از اهداف مهم این مقاله مقایسه روش خطی‌ساز پس‌خور با تئوری خطی مورد استفاده در طراحی این کنترل غیرخطی است، تنظیم‌کننده مربعی خطی به عنوان یک روش کنترل خطی انتخاب شده است. از سویی طراحی کنترل‌کننده‌ها به‌گونه‌ای انجام شده تا نیازمندی‌های یکسانی نظیر زمان نشست، حداقل فراجش و توجه به محدودیت عملگرها را برآورده نماید. در نتیجه برای مقایسه دو روش طراحی شده از چند معیار استفاده شده است. اولر اینت نخستین معیار برای ارزیابی عملکرد ورودی‌های کنترلی است. کمتر بودن مقدار محاسبه شده این پارامتر در روش غیرخطی حاکی از سرعت بیشتر این روش کنترلی در اجرای مانورهای فرمانی است. در نهایت نیز به منظور بررسی تفاوت سرعت اجرای مانور تغییر وضعیت با دو روش کنترلی بر عملگرها، معیارهای انرژی، تلاش و توان مصرفی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مورد نیز استفاده از روش خطی‌سازی پس‌خور علاوه بر کاهش سرعت مانور موجب رفتار بهینه عملگرها از نظر معیارهای تلاش کنترلی و توان مصرفی نیز می‌شود.

9- فهرست علائم

A	ماتریس کسینوس هادی
e	مؤلفه‌های محور دوران اولر
h	مومنتم زاویه‌ای ($\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$)
I	ممان اینرسی (kgm^2)
L	ماتریس توزیع چیدمان
P	توان مصرفی موتور الکتریکی عملگر
q	پارامتر کوانترنیون
r	مرتبه یا درجه نسبی
T	گشتاور (Nm)
V	تابع لیاپانوف

علائم یونانی

α	زاویه دوران اولر (rad)
β	زاویه انحراف محور هر عملگر از صفحه $x_b - y_b$
η	متغیر دینامیک صفر
θ	زاویه دوران حول محور y_b
ξ	متغیر جدید سیستم خطی‌سازی شده
ϕ	زاویه دوران حول محور x_b
ψ	زاویه دوران حول محور z_b
Ω	ماتریس سرعت‌های زاویه‌ای بدنی
ω	سرعت زاویه‌ای (rad/s)

زیرنویس‌ها

b	مربوط به دستگاه بدنی
c	پارامترهای کنترلی
E	مربوط به خطا
f	نهایی
w	مربوط به چرخ عکس‌العملی

10- مراجع

- [1] M. Navabi, S. Soleymanpour, Standard and robust backstepping control of a spacecraft with inertial uncertainty (revision), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 112-124, 2015. (in Persian فارسی)
- [2] M. Navabi, M. Tavana, H. Mirzaei, Attitude control of spacecraft by state dependent riccati equation and power series expansion of riccati methods, *Space Science and Technology*, Vol. 7, No. 4, pp. 39-49, 2015. (in Persian فارسی)
- [3] A. Iyer, S. N. Singh, Minimal realizations from MFDs and attitude control of spinning satellite using gyrotorquers, *Proceedings of The 26th Institute of Electrical and Electronics Engineers Conference on Decision and Control*, Los Angeles, United States of America, pp. 1269-1274, December 9-11, 1987.
- [4] Y. P. Chen, S. C. Lo, Sliding-Mode controller design for spacecraft attitude tracking maneuvers, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 4, pp. 1328-1333, 1993.
- [5] J. J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, pp. 207-271, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [6] Y. N. Fei, Q. H. Wu, Tracking control of robot manipulators via output feedback linearization, *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, Vol. 1, No. 3, pp. 329-335, 2006.
- [7] S. John, J. O. Pedro, Hybrid feedback linearization slip control for anti-lock braking system, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 10, No. 1, pp. 81-99, 2013.
- [8] Y. Long, S. Lytle, N. Pagano, D. J. Cappelleri, Design and quaternion-based attitude control of the omnicopter MAV using feedback linearization, *Proceedings of The American Society of Mechanical Engineers International Design Engineering Technical Conference*, Chicago, United States of America, August 12-15, 2012.
- [9] H. Bang, J. S. Lee, Y. J. Eun, Nonlinear attitude control for a rigid spacecraft by feedback linearization, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 18, No. 2, pp. 203-210, 2004.
- [10] M. Navabi, N. Nasiri, Modeling and simulating the earth magnetic field utilizing the 10th generation of IGRF and comparison the linear and nonlinear transformation in order to use in satellite attitude control, *Space Science and Technology*, Vol. 3, No. 4, pp. 45-52, 2011. (in Persian فارسی)
- [11] I. Kök, *Comparison and Analysis of Attitude Control Systems of a Satellite Using Reaction Wheel Actuators*, Master Thesis, Department of Computer Science Electrical and Space Engineering, Luleå University of Technology, Sweden, 2012.
- [12] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory an Introduction*, pp. 209-219, New York: Dover Publications, 2004.
- [13] M. Navabi, H. R. Mirzaei, Dynamic modeling and nonlinear adaptive control of mesicopter flight, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1-12, 2015. (in Persian فارسی)
- [14] J. Kim, J. Crassidis, A comparative study of sliding mode control and time-optimal control, *Proceedings of The American Institute of Aeronautics and Astronautics/American Astronautical Society, Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Boston, United States of America, August 10-12, 1998.
- [15] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, pp. 95-169, New York: Cambridge university press, 1997.
- [16] M. Navabi, N. Nasiri, Attitude control of microsatellite in terms of energy consumption for reaction wheel and magnetorquer actuators, *Proceedings of The 10th Conference of Iranian Aerospace Society*, Tehran, Iran, March 1-3, 2010. (in Persian فارسی)
- [17] M. Rahmani, A. Ghanbari, Computed torque control of a caterpillar robot manipulator using neural network, *Advanced Engineering Forum*, Vol. 15, pp. 106-118, 2016.
- [18] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third Edition, pp. 505-530, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [19] M. Navabi, S. Soleymanpour, Command filtered modular adaptive backstepping attitude control of spacecraft in presence of disturbance torque, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 285-296, 2015. (in Persian فارسی)
- [20] B. S. Anjali, A. Vivek, J. L. Nandagopal, Simulation and analysis of integral LQR controller for inner control loop design of a fixed wing micro aerial vehicle (MAV), *Procedia Technology*, Vol. 25, pp. 76-83, 2016.
- [21] Y. Yang, Analytic LQR design for spacecraft control system based on quaternion model, *Aerospace Engineering*, Vol. 25, No. 3, pp. 448-453, 2011.
- [22] B. D. Anderson, J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, pp. 70-77, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [23] Z. Shulong, A. Honglei, Z. Daibing, A new feedback linearization lqr control for attitude of quadrotor, *Proceedings of The 13th Institute of Electrical and Electronics Engineers International Conference on Control Automation Robotics & Vision*, Marina Bay Sands, Singapore, pp. 1593-1597, December 10-12, 2014.