مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1396، دوره 17، شماره 12، ص‌ص 514-522

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی ارتعاشات غیرخطی میکروتیر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک با استفاده از مدل کاهش مرتبه و شبیه‌سازی اجزای محدود

محمد رضا صالحی کلاهی[1]، حسین معین خواه[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

* زاهدان، صندوق پستی 987-98155، hmoein@eng.usb.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 18 مهر 1396
پذیرش: 14 آذر 1396
ارائه در سایت: 01 دی 1396

کلید واژگان:
سیستم‌های میکروالکترومکانیکی
میکروتیر منحنی
دوپایا
مدل کاهش مرتبه
کامسول مولتی‌فیزیکس

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی یک میکروتیر دو سرگیردار با شکل اولیه منحنی و تحت تحریک الکترواستاتیک پله پرداخته شده است. میکروتیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند و این ویژگی اساس پیدایش سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا می‌باشد. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون استخراج شده و سپس با استفاده از پارامترهای بی‌بعد سازی مناسب، در فرم بی‌بعد نوشته شده است. با استفاده از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین، معادله بی‌بعد به دست آمده گسسته سازی شده و به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی تبدیل شده است. روش رانگ-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به‌کار برده شده است. برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی‌فیزیکس استفاده شده است. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف نظیر پارامتر ولتاژ، میرایی، خیز اولیه نقطه میانی و طول گپ بر روی رفتار دینامیکی میکروتیر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش خیز اولیه نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده شد که افزایش پارامتر میرایی از انتقال به دومین حالت پایدار جلوگیری می‌کند.

Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation

Mohammad Reza Salehi Kolahi, Hossein Moeinkhah*

Department of Mechanical Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran
* P.O.B. 98155-987, hmoein@eng.usb.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 October 2017
Accepted 05 December 2017
Available Online 22 December 2017

Keywords:
Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)
Curved Microbeam
Bi-stable
Reduced Order Model
COMSOL Multiphysics

ABSTRACT

In this research, the dynamic behavior and nonlinear vibration of a clamped-clamped initially curved microbeam under electrostatic step actuation is investigated. The initially curved microbeams under transverse loading may exhibit two different stable states and this is the basis of the emergence of bi-stable micro electro mechanical systems (MEMS). The equation of motion is derived based on energy method and Hamiltonian principle, and re-written in non-dimensional form by using appropriate non-dimensional parameters. The resultant equation of motion in non-dimensional form is discretized and converts to a system of nonlinear ordinary differential equations by using a reduced order model based on the Galerkin procedure. Runge-kutta method of order four is employed to solve the resulting system of nonlinear ordinary differential equations. COMSOL Multiphysics software is used for finite element simulation. Then, the effect of various parameters including voltage parameter, damping, initial midpoint elevation and gap length is investigated. It is concluded that the critical voltage of pull-in is decreased by increasing of the initial midpoint elevation. Also The results depict that by increasing of the damping parameter, the possibility of transition between two stable stats is eliminated.

1- مقدمه

امروزه سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی[1] با ویژگی‌های منحصر به فرد خود نظیر اندازه کوچک، دقت بالا و توان مصرفی پایین مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند [1]. در اکثر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی سیلیکون به دلیل داشتن خواص مکانیکی و فیزیکی مناسب به عنوان ماده اصلی کاربرد دارد [2]. یکی از ساختارهای موجود در این سیستم‌ها، استفاده از میکروتیر تخت به عنوان الکترود متحرک بوده که توسط یک فضای دی‌الکتریک از الکترود ثابت جدا می‌شود [4,3]. اعمال ولتاژ بین دو الکترود منجر به ایجاد فشار کولمب[2] (فشار الکترواستاتیک) بر روی الکترودها و در نتیجه تغییر شکل الکترود متحرک می‌گردد. با رسیدن ولتاژ به یک مقدار

[1] Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)

[2] Coulomb Pressure

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. R. Salehi Kolahi, H. Moeinkhah, Non-linear vibration of curved microbeam under electrostatic actuation by using reduced order model and finite element simulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 514-522, 2018 (in Persian)

معین نیروهای داخلی میکروتیر از تعادل با فشار کولمب خارج شده و باعث می‌شوند که میکروتیر به سمت الکترود ثابت کشیده شده (پدیده پولین[1]) و با آن تماس پیدا کند [5]. در سال‌های اخیر سیستم‌های الکترومکانیکی دوپایا که بر پایه میکروتیرهای منحنی پدیدار شده‌اند، به دلیل داشتن کاربردهای گوناگونی مانند حسگر، کلید نوری[2]، میکروشیر[3] و حافظه غیر فرار[4] به طور فزاینده‌ای در کانون توجه قرار گرفته‌اند [6-8]. ساختارهای دوپایا ساختارهایی هستند که تحت بارگذاری عرضی یکسان ممکن است دو حالت پایدار از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ-ترو[5] می‌گویند [9]. میکروتیرهای دوپایا لزوما از بدو ساخت به شکل منحنی نیستند، شکل منحنی می‌تواند ناشی از بارگذاری محوری میکروتیر تخت و در نتیجه کمانش آن نیز باشد [10]. یکی از مزیت‌های استفاده از میکروتیرهای دوپایا امکان استفاده بیش‌تر از فاصله بین الکترود ثابت و تکیه‌گاه میکروتیر می‌باشد. میکروتیرهای دوپایا می‌توانند تا 84% این فاصله را بدون این‌که به سمت الکترود ثابت کشیده شوند، به خود اختصاص دهند. این در حالی است که این مقدار برای میکروتیرهای تخت حدود 75% می‌باشد [12,11].

مطالعات آزمایشگاهی و عددی گسترده‌ای برای بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروتیرهای تخت انجام شده است، و این در حالی است که کم‌تر به تحلیل رفتار میکروتیرهای منحنی پرداخته شده است.

پژوهش‌های انجام گرفته پیرامون بررسی رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروتیرهای منحنی نشان می‌دهند که، امکان گذار بین دو حالت پایدار به پارامترهایی چون میزان انحنای اولیه، ضخامت و شرایط مرزی وابسته می‌باشد [13]. پارک و ها با بررسی‌های تئوری نشان دادند که وجود دو حالت پایدار به تنش مانده محوری نیز بستگی دارد [14]. داس و باترا با استفاده از یک مدل اجزای محدود به این نتیجه دست یافتند که برای ولتاژهای زیاد امکان گذار بین دو حالت پایدار از بین می‌رود [15]. در سال 2010 کریلو و دیک با بررسی رفتار الکترودینامیکی میکروتیر منحنی با میرایی ویسکوز، نشان دادند که میزان انحنای اولیه مورد نیاز برای گذار از حالت پایدار اولیه به ثانویه در بارگذاری دینامیکی نسبت به بارگذاری شبه استاتیکی بیش‌تر می‌باشد [16].

در سال 2008 کریلو و همکارانش نتایج تئوری و آزمایشگاهی پژوهش خودشان در زمینه تحلیل رفتار استاتیکی میکروتیرهای منحنی را منتشر کردند . تطابق خوبی بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی این پژوهش مشاهده شد [11]. هو و همکاران با ارائه یک مدل که در آن تغییر شکل‌های غیر خطی نادیده گرفته شده بودند، به بررسی ناپایداری پولین در حالت استاتیکی پرداختند [17]. در سال 2012 مقیمی زند با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی ناپایداری پولین برای میکروتیرهای منحنی در حالت دینامیکی و تحت تحریک ولتاژ پله پرداخت [18]. ساری و پاکدمیرلی پاسخ دینامیکی میکروتیر منحنی بر روی بستر الاستیک و دارای شرایط مرزی غیر ایده‌آل را مورد بررسی قرار دادند. وجود تغییر شکل، شیب و یا گشتاور در تکیه‌گاه می‌تواند دلیل شرط مرزی غیر ایده‌آل باشد [19]. در سال 2013 رزیکنی و همکاران با تحلیل نمودارهای فازی و مطالعه پاسخ فرکانسی یک میکروتیر تحت بارگذاری محوری، که آن را با استفاده از نیروی الکترواستاتیک هارمونیک تحریک کرده بودند، نتیجه گرفتند که مدل کاهش مرتبه[6] با یک درجه آزادی برای پیش‌بینی پاسخ میکروتیر به تحریک قابل قبول می‌باشد [20]. مدینا و همکاران با استفاده از مدل کاهش مرتبه، به تحلیل رفتار الکترواستاتیکی میکروتیر با شکل منحنی ناشی از کمانش پرداختند [21]. در سال 2017 تجددیان فر و همکاران از آنالیز هموتوپی برای یافتن حل تحلیلی- تقریبی برای پاسخ فرکانسی میکروتیرهای تخت و منحنی استفاده کردند [22].

در مطالعه حاضر رفتار دینامیکی میکروتیر منحنی دوسر گیردار، تحت تحریک الکترواستاتیک پله، بررسی شده است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که بیشتر رفتار استاتیکی میکروتیر منحنی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این‌که پدیده‌های اسنپ- ترو و پولین ذاتا پدیده‌هایی دینامیکی هستند، بنابراین تحلیل و شناسایی رفتار دینامیکی میکروتیرهای منحنی با توجه به کاربرد حساس آن‌ها در سیستم‌های میکرو اهمیت ویژه‌ای دارد. با استفاده از اصل همیلتون معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حرکت میکروتیر به دست آمده است. از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش تجزیه گالرکین، برای گسسته سازی و تبدیل معادله حرکت به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی استفاده شده است. از روش‌های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می‌توان برای حل معادله حرکت استفاده کرد، اما استفاده از این روش‌ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی‌باشد. روش رانگ-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات به‌کار برده شده است. برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس[7] استفاده شده است. تا جایی که مطالعات نگارنده نشان می‌دهد، تا کنون برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی و الکترودینامیکی میکروتیرهای منحنی از نرم‌افزار کامسول استفاده نشده است. نرم‌افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای شبیه‌سازی و تحلیل پروژه‌های بین رشته‌ای مناسب می‌باشد.

در ادامه رفتار دینامیکی میکروتیر به همراه تأثیر پارامترهای مختلف با رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و فضای فاز نشان داده شده است. علاوه بر بررسی تغییر شکل، از شبیه‌سازی اجزای محدود برای محاسبه تنش و فرکانس‌های طبیعی نیز استفاده شده است. این پژوهش می‌تواند برای طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا مورد استفاده قرار گیرد.

2- مدل سازی

در این بخش یک میکروتیر منشوری انعطاف‌پذیر و دارای شکل اولیه منحنی، به طول L و سطح مقطع مستطیلی A با پهنای $\bar{b}$ و ضخامت $\bar{d}$ مطابق با شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. فرض ما بر این خواهد بود که میکروتیر از جنس ماده‌ای همگن و همسانگرد با الاستیسیته خطی، مدول یانگ E و چگالی ρ ساخته شده باشد. از آن‌جایی که در میکروتیرها پهنا $\bar{b}$ از ضخامت $\bar{d}$ خیلی بزرگ‌تر است، می‌بایست از مدول یانگ مؤثر $\tilde{E} = E/(1-\upsilon^2)$ استفاده کرد (حالت کرنش صفحه‌ای). لازم به ذکر است که υ نسبت پواسون می‌باشد. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌شود، $\bar{w}_0$ شکل اولیه میکروتیر ($\bar{t}=0$)، $\bar{w}$ شکل میکروتیر پس از بارگذاری، g_0 فاصله الکترود ثابت تا تکیه‌گاه مکیروتیر (گپ)، و $\bar{f}^{e}$ بار گسترده الکترواستاتیک ناشی از اعمال ولتاژ می‌باشد. علامت ($\bar{}$) نشان دهنده این است که کمیت مورد نظر دارای بعد می‌باشد.

[1] Pull-in
[2] Optical Switch
[3] Micro-valve
[4] Non-volatile Memory
[5] Snap-through
[6] Reduced Order Model
[7] COMSOL Multiphysics

Fig. 1 Schematic model of curved microbeam under electrostatic actuation

شکل 1 مدل شماتیک میکروتیر منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک

رابطه (1) شکل اولیه میکروتیر را توصیف می‌کند.

$$\bar{w}_0(\bar{x}) = \bar{w}(\bar{x},0) = \bar{h}_0 z_0(\bar{x}) \tag{1}$$

که $\bar{h}_0$ خیز اولیه نقطه میانی میکروتیر نسبت به نقاط انتهایی، و z_0 یک تابع بدون بعد بوده و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\max_{0\le x\le L}[Z_0(\bar{x})] = 1$ باشد. لازم به ذکر است که جابه‌جایی عرضی هر نقطه از میکروتیر برابر $\bar{w} - \bar{w}_0$ می‌باشد. با فرض $\bar{h}_0 \ll L$ و $\bar{d} \ll L$ و نیز کوچک بودن تغییر شکل‌ها در برابر طول و ضخامت میکروتیر می‌توان در چارچوب تئوری تیر اویلر-برنولی و ترکیب آن با تقریب کمان‌های کم عمق[1] رفتار میکروتیر را توصیف کرد [24,23].

3- معادلات حاکم

با استفاده از اصل همیلتون تعمیم یافته می‌توان معادله حرکت میکروتیر را استخراج کرد [25]. این اصل در رابطه (2) نشان داده شده است.

$$\delta \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (U - T - W_e)\, d\bar{t} = 0 \tag{2}$$

که T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل کرنشی و W_e کار نیروی خارجی می‌باشد.

3-1- انرژی جنبشی

با توجه به این که هدف بررسی رفتار دینامیکی میکروتیر می‌باشد، بنابراین انرژی جنبشی از جمله انرژی‌های مبادله شده در طول حرکت میکروتیر می‌باشد. رابطه (3) نشان دهنده انرژی جنبشی میکروتیر می‌باشد.

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}\right)^2 d\bar{x} \tag{3}$$

لازم به ذکر است در محاسبه انرژی جنبشی، از اثر اینرسی محوری به دلیل ناچیز بودن صرف‌نظر شده است.

3-2- انرژی پتانسیل کرنشی

انرژی پتانسیل کرنشی ناشی از خمش و کشیدگی صفحه میانی[2] میکروتیر بوده و به صورت رابطه (4) قابل محاسبه است [23].

$$U = \frac{\tilde{E} I_{yy}}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2}\right)^2 d\bar{x}$$

$$+ \frac{\tilde{E} A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right)^2 d\bar{x} \tag{4}$$

که I_{yy} ممان دوم سطح و $\bar{u}$ جابه‌جایی در راستای محور $\bar{x}$ می‌باشد.

3-3- کار نیروی خارجی

نیروی خارجی در واقع همان بار گسترده الکترواستاتیک $\bar{f}^e$ می‌باشد. کار این نیرو در رابطه (5) نشان داده شده است.

$$W_e = \int_0^L -\bar{f}^e\, (\bar{w} - \bar{w}_0)\, d\bar{x} \tag{5}$$

3-4- معادله حرکت

با جایگذاری روابط (3) و (4) و (5) در رابطه (2) و با لحاظ کردن اثر میرایی ویسکوز رابطه (6) بدست می‌آید.

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \{\frac{\tilde{E} I_{yy}}{2} \int_0^L 2\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2}\right) \delta\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2}\right) d\bar{x}\}\, d\bar{t}$$

$$+ \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \{\frac{\tilde{E} A}{2} \int_0^L 2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right) \delta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right) d\bar{x}\}\, d\bar{t}$$

$$- \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \{\frac{1}{2}\rho A \int_0^L 2\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}\right) \delta\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}\right) d\bar{x}\}\, d\bar{t} + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \{\bar{c} \int_0^L \delta\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}\right) d\bar{x}\}\, d\bar{t}$$

$$- \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \{\int_0^L -\bar{f}^e\, \delta\, (\bar{w} - \bar{w}_0)\, d\bar{x}\}\, d\bar{t} = 0 \tag{6}$$

حال با استفاده از انتگرال جزء به جزء رابطه (6) ساده شده و معادلات حاکم بر رفتار میکروتیر به شکل روابط (8,7) حاصل می‌شوند [23].

$$-\tilde{E} A \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right) = 0 \tag{7}$$

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{c}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \tilde{E} I_{yy}\left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4}\right)$$

$$-\tilde{E} A\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}^e = 0 \tag{8}$$

این امکان وجود دارد که روابط (7) و (8) را به صورت یک رابطه مجزا نوشت. رابطه (7) نشان می‌دهد که کرنش ناشی از کشیدگی صفحه میانی فقط تابعی از زمان می‌باشد، بنابراین می‌توان از آن نسبت به $\bar{x}$ انتگرال گرفت. با انتگرال‌گیری از رابطه (7)، رابطه (9) بدست می‌آید.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2 \tag{9}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (9) در طول میکروتیر رابطه (10) حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{L}(\bar{u}(L,\bar{t}) - \bar{u}(0,\bar{t}) + \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x}) \tag{10}$$

با توجه به این‌که میکروتیر دو سرگیردار می‌باشد بنابراین $\bar{u}$ در نقاط ابتدایی و انتهایی در هر لحظه، برابر صفر می‌باشد.

$$\varepsilon_x(\bar{t}) = \frac{1}{2L}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x} \tag{11}$$

[1] Shallow arch approximation
[2] Mid-plane stretching

با جایگذاری رابطه (11) در رابطه (8) معادله حرکت میکروتیر به شکل رابطه (12) به دست می‌آید.

$$\rho A\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{t}^2}+\bar{c}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}+\tilde{E}I_{yy}\left(\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}-\frac{\partial^4\bar{w}_0}{\partial\bar{x}^4}\right)-\frac{\tilde{E}A}{2L}\left\{\int_0^L\left[\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right)^2-\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial\bar{x}}\right)^2\right]dx\right\}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\bar{f}^{\mathrm{e}}=0 \quad (12)$$

رابطه‌های (13) و (14) شرایط مرزی و اولیه را نشان می‌دهند.

$$\bar{w}(0,\bar{t})=\bar{w}(L,\bar{t})=0 \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(0,\bar{t})=\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(L,\bar{t})=0 \quad (13)$$

$$\bar{w}(\bar{x},0)=\bar{w}_0 \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}(\bar{x},0)=0 \quad (14)$$

برای سادگی کار از اثرات حاشیه‌ای میدان الکتریکی چشم پوشی کرده و بار گسترده الکترواستاتیک $\bar{f}^e$، با فرمول خازن‌های موازی تقریب زده می‌شود [26].

$$\bar{f}^{\mathrm{e}}(\bar{x},\bar{t})=\frac{\epsilon_0\bar{b}V^2}{2(g_0+\bar{w}(\bar{x},\bar{t}))^2} \quad (15)$$

که $\epsilon_0=8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ ضریب گذردهی فضای آزاد و V ولتاژ اعمال شده بین الکترود ثابت و میکروتیر می‌باشد.

در نهایت به جهت سهولت رابطه (12) را به صورت بی‌بعد بازنویسی کرده و در ادامه از آن استفاده می‌شود (رابطه 16).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c\frac{\partial w}{\partial t}+\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)-\alpha\left\{\int_0^1\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\beta}{(1+w)^2}=0 \quad (16)$$

جدول 1 نشان دهنده تعریف پارامترهای بی‌بعد رابطه (16) می‌باشد.

4- مدل کاهش مرتبه

برای گسسته‌سازی معادله حرکت از یک مدل کاهش مرتبه بر مبنای روش گالرکین استفاده می‌شود. بدین منظور شکل میکروتیر در حالت اولیه و پس از بارگذاری به صورت سری‌های روابط (17) در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x,t)\approx\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\varphi_i(x) \qquad w(x,0)=\sum_{i=1}^{n}q_{0i}\,\varphi_i(x) \quad (17)$$

که در آن $q_i(t)$ مختصات تعمیم یافته زمانی و $\varphi_i(x)$ iامین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار می‌باشد.

$$\varphi_i(x)=C_i\left(\cos\lambda_i x-\cosh\lambda_i x-\frac{\cos\lambda_i-\cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i-\sinh\lambda_i}(\sin\lambda_i x-\sinh\lambda_i x)\right) \quad (18)$$

جدول 1 کمیت‌های بدون بعد

Table 1 Non-dimensional quantities

تعریف	کمیت بدون بعد
مختصه طول	$x=\bar{x}/L$
زمان	$t=\bar{t}\sqrt{\tilde{E}I_{yy}/(\rho AL^4)}$
شکل اولیه	$w_0=\bar{w}_0/g_0$
شکل پس از بارگذاری	$w=\bar{w}/g_0$
خیز نقطه میانی	$h_0=\bar{h}_0/g_0$
ضخامت	$d=\bar{d}/g_0$
پارامتر کشیدگی	$\alpha=(g_0^2A)/(2I_{yy})=6/d^2$
پارامتر میرایی	$c=\bar{c}\sqrt{L^4/(\rho A\tilde{E}I_{yy})}$
پارامتر ولتاژ	$\beta=(\epsilon_0\bar{b}V^2L^4)/(2\,g_0^3\tilde{E}I_{yy})$

که λ_i پاسخ معادله $1-\cos\lambda_i\cosh\lambda_i=0$ می‌باشد، و ضریب C_i طوری در نظر گرفته می‌شود که $\max_{0\le x\le1}[\varphi_i(x)]=1$ باشد.

شکل مودهای دقیق میکروتیر منحنی با استفاده از خطی سازی رابطه (16) به‌دست می‌آیند، و همچنین نشان داده شده است که تأثیر ناچیزی بر دقت نتایج دارند [27]. با جایگذاری رابطه (17) در رابطه (16) و با استفاده از روش گالرکین یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی به شکل رابطه (19) بدست می‌آید.

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{q}}+c\mathrm{M}\dot{\mathrm{q}}+\mathrm{B}(\mathrm{q}-\mathrm{q}_0)+\alpha\left(\mathrm{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{S}\mathrm{q}-\mathrm{q}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{S}\mathrm{q}_0\right)\mathrm{S}\mathrm{q}+\beta\mathrm{F}=0 \quad (19)$$

که $\mathrm{q}=\{q_i\}$ بردار مختصات تعمیم یافته زمانی و $()^{\mathrm{T}}$ نشان دهنده ترانهاده ماتریس می‌باشد. ماتریس‌های $\mathrm{B}=[b_{ij}]$ و $\mathrm{M}=[m_{ij}]$ و $\mathrm{S}=[s_{ij}]$ به ترتیب مربوط به سفتی خمشی، جرم و کشیدگی می‌باشند. مولفه‌های این سه ماتریس به همراه مؤلفه‌های بردار نیروی تعمیم یافته $\mathrm{F}=\{f_i^{\mathrm{e}}\}$ در رابطه‌های (20) و (21) نشان داده شده‌اند.

$$b_{ij}=\delta_{ij}\int_0^1\varphi_i''\varphi_j''\,dx \quad \text{(20- الف)}$$

$$m_{ij}=\delta_{ij}\int_0^1\varphi_i\varphi_j\,dx \quad \text{(20- ب)}$$

$$s_{ij}=\delta_{ij}\int_0^1\varphi_i'\varphi_j'\,dx \quad \text{(20- پ)}$$

$$f_i^{\mathrm{e}}=\int_0^1\frac{\varphi_i}{(1+\sum_{j=1}^{n}q_j\,\varphi_j)^2}dx \quad (21)$$

که δ_{ij} دلتای کرونکر می‌باشد. از رابطه (13) با برابر صفر قرار دادن ترم‌های مشتقات زمانی می‌توان برای تحلیل رفتار الکترواستاتیکی استفاده کرد.

ساده‌ترین مدل فشرده، مدل یک درجه آزادی می‌باشد که از رابطه (19) و تنها با در نظر گرفتن اولین ترم رابطه (17) حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که انتگرال رابطه (21) حتی در این مورد که ساده‌ترین شکل خود را دارد نیز حل تحلیلی ندارد، اما به طور جایگزین می‌توان φ_1 را به صورت تقریب زد $\varphi_1\approx[1-\cos(2\pi x)]/2$ [28] که در این صورت انتگرال مذکور حل تحلیلی خواهد داشت.

$$f_1^e=\int_0^1\frac{\varphi_1}{(1+q_1\varphi_1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{(1+q_1)^3}} \quad (22)$$

با در نظر گرفتن $h_0\varphi_1$ به عنوان شکل اولیه میکروتیر، یک معادله دیفرانسیل معمولی و غیرخطی بر حسب $q_1=q$ به صورت رابطه (23) به دست می‌آید.

$$m_{11}\ddot{q}+cm_{11}\dot{q}+b_{11}(q-h_0)+\alpha s_{11}^2(q^2-h_0^2)q+\frac{\beta}{2\sqrt{(1+q)^3}}=0 \quad (23)$$

که $b_{11}=198.462$، $m_{11}=0.396$ و $s_{11}=4.878$ بوده و دو شرط اولیه برای معادله به صورت $q(0)=h_0$ و $\dot{q}(0)=0$ می‌باشد. لازم به ذکر است که $-1\le q\le h_0$ می‌باشد.

از روش‌های دیگری مانند آنالیز اغتشاش و یا حل عددی مستقیم نیز می‌توان برای حل رابطه (16) استفاده کرد، اما استفاده از این روش‌ها به دلیل طولانی بودن پروسه حل مقرون به صرفه نمی‌باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده‌تر از سایر روش‌ها می‌باشد.

5- شبیه‌سازی اجزای محدود

برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس استفاده شده است. نرم‌افزار کامسول به دلیل چند منظوره بودن برای پژوهش‌های بین رشته‌ای مناسب می‌باشد. البته نرم‌افزارهای چند فیزیکی دیگری نیز موجود می‌باشند، اما نقطه قوت نرم‌افزار کامسول در این است که، مدل سازی سیستم‌هایی که معادلات حاکم برآن‌ها از حوزه‌هایی کاملا متفاوت می‌باشد، بسیار ساده‌تر و سریع‌تر انجام می‌گیرد. دلیل این امر آن است که به صورت پیش‌فرض ماژول‌هایی برای شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌ها در نظر گرفته شده است.

در نرم‌افزار کامسول ماژول مخصوصی که برای شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در نظر گرفته شده، یکی از زیر شاخه‌های فیزیک مکانیک ساختاری[1] با عنوان الکترومکانیک[2] می‌باشد.

مزیت دیگر نرم‌افزار کامسول این است که در این نرم‌افزار امکان ترسیم اشکال هندسی توسط روابط ریاضی وجود دارد، بنابراین شکل میکروتیر بررسی شده توسط نرم‌افزار دقیقاً همان $h_0\varphi_1$ می‌باشد.

مدل‌سازی انجام شده در نرم‌افزار به صورت دو بعدی بوده و سایر فرض‌ها مانند همگن و همسانگرد و با الاستیک خطی بودن میکروتیر و حالت کرنش صفحه‌ای از طریق گزینه‌های موجود در نرم‌افزار نیز برای شبیه‌سازی اعمال شده است. با توجه به شکل هندسی میکروتیر از مش مثلثی و با درجه کیفیت خیلی خوب استفاده شده است.

6- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات (19) به همراه نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود، برای تحلیل رفتار الکترودینامیکی یک میکروتیر منحنی زنگوله‌ای شکل ($w_0 = h_0\varphi_1$)، از جنس پلی سیلیکون با ابعاد و مشخصات داده شده در جدول 2 ارائه شده است. به منظور رسم نمودارهای تاریخچه زمانی، دستگاه معادلات (19) با در نظر گرفتن سه ترم اول رابطه (17) و با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل شده است. روش رانگ-کوتا یک روش قوی و پرکاربرد برای حل انواع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. از مدل یک درجه آزادی نیز برای رسم فضای فاز متناظر استفاده شده است.

برای اطمینان از درستی نتایج به دست آمده، ولتاژ اسنپ- ترو و پولین در حالت استاتیکی مورد بحث قرار می‌گیرد. در پژوهش آقایان اوکاد و یونس [29] برای میکروتیر مورد نظر ولتاژ استاتیکی اسنپ- ترو برابر $V_S = 88\ V$ و ولتاژ استاتیکی پولین برابر $V_{PI} = 106\ V$ گزارش شده است. در تحقیق حاضر با توجه به شکل 2 ولتاژ استاتیکی اسنپ- ترو برابر $V_S = 90.7\ V$ و ولتاژ استاتیکی پولین برابر $V_{PI} = 111.6\ V$ می‌باشد (بر حسب پارامتر ولتاژ $\beta_S = 185$ و $\beta_{PI} = 280$). درصد خطا برای ولتاژ اسنپ- ترو برابر 3% و برای ولتاژ پولین برابر 5% می‌باشد. مشاهده می‌شود که تطابق خوبی وجود دارد. همچنین همان‌طور که در شکل 2 مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی نیز بین مدل کاهش مرتبه و شبیه‌سازی اجزای محدود دیده می‌شود. مقادیر ولتاژ استاتیکی اسنپ- ترو و پولین محاسبه شده توسط نرم‌افزار کامسول به ترتیب برابر $V_S = 88.8\ V$ و $V_{PI} = 107\ V$ می‌باشد. این نتایج با تعداد مش 12407 حاصل شده است. لازم به ذکر است به دلیل کوچک بودن ابعاد میکروتیر، تعداد مش تأثیری کمتر از 1% بر دقت نتایج دارد.

[1] Structural Mechanics
[2] Electromechanics

جدول 2 مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیر منحنی

Table 2 Geometrical and mechanical properties of the curved microbeam

پارامتر	مقدار
طول (L)	1000 μm
پهنا ($\bar{b}$)	30 μm
ضخامت ($\bar{d}$)	2.4 μm
خیز اولیه نقطه میانی ($\bar{h}_0$)	3.5 μm
گپ (g_0)	10.1 μm
چگالی (ρ)	2332 kgm^{-3}
مدول یانگ موثر ($\tilde{E}$)	166 GPa

Fig. 2 Non-dimensional midpoint elevation of the curved microbeam versus different voltage parameter

شکل 2 خیز بی‌بعد نقطه میانی میکروتیر بر حسب مقادیر مختلف پارامتر ولتاژ

در شکل 3 بیشترین مقدار تنش در طول میکروتیر نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است در هنگام وقوع ناپایداری پولین احتمال شکست از ناحیه تکیه‌گاه‌ها به دلیل مقدار بالای تنش وجود دارد.

در تحقیق حاضر برای بررسی رفتار الکترودینامیکی میکروتیر، تحریک به صورت ناگهانی و توسط ولتاژ پله‌ای صورت می‌گیرد. رابطه (23) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای این حالت می‌باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) \tag{24}$$

که $H(t)$ تابع پله‌ای هویساید و β_1 بزرگی پارامتر ولتاژ می‌باشد.

اگرچه می‌توان بارگذاری‌های دینامیکی گوناگونی (ضربه‌ای، هارمونیک) را جهت تحریک در نظر گرفت، اما اغلب پایداری سازه‌ها در حالت بارگذاری ناگهانی برای یک مدت زمان نامحدود سنجیده می‌شوند. البته این نوع تحریک اهمیت کاربردی نیز دارد، برای مثال در سوییچ‌ها زمان عملکرد باید حداقل باشد و بارگذاری به شکل تابع پله موثر خواهد بود. در شکل 4 سه پاسخ ممکن برای میکروتیر مورد نظر با نسبت میرایی $\zeta = 0.05$ تحت تحریک رابطه (23) نشان داده شده است. پارامتر میرایی توسط رابطه $c = 2\zeta\lambda_1^2$ توصیف می‌شود که در آن λ_1 فرکانس طبیعی پایه و بی‌بعد تیر تخت دو سرگیردار می‌باشد.

در شکل 4 برای سه مقدار متفاوت ولتاژ رفتار دینامیکی میکروتیر نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 4-a مشاهده می‌شود، برای یک مقدار ولتاژ پایین ($\beta_1 = 154$)، میکروتیر حول یک موقعیت پایدار نزدیک به موقعیت اولیه نوسان می‌کند. برای ولتاژ با مقداری بیش‌تر از یک مقدار بحرانی مشخص ($\beta_1 > \beta_S$)، که با عنوان ولتاژ دینامیکی اسنپ- ترو شناخته

می‌شود، انتقال میکروتیر به حالت پایدار دوم مشاهده می‌شود. در نهایت با افزایش ولتاژ به یک مقدار بزرگ ($\beta_1 = \beta_{PI}$) میکروتیر دچار ناپایداری پولین شده و با الکترود ثابت تماس پیدا می‌کند. در شکل 4-b فضای فاز متناظر نشان داده شده است. برای هر سه حالت مشاهده می‌شود که نمودار فاز به موقعیت نهایی میکروتیر همگرا می‌باشد.

در شکل 5 تأثیر تعداد ترم‌های رابطه (17) بر پاسخ دینامیکی میکروتیر بررسی شده است. همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود مدل یک درجه آزادی با دقت مطلوبی می‌تواند رفتار سیستم را توصیف نماید. دلیل این امر آن است که نحوه بارگذاری به گونه ای می‌باشد که سیستم تنها شکل مود اول را تجربه می‌کند.

افزایش میرایی ضمن کاهش مدت و دامنه نوسان می‌تواند، از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین نیز جلوگیری کند، این اثر در شکل 6 برای $\beta_1 = 169$، که ولتاژ دینامیکی اسنپ- ترو برای $\zeta = 0.05$ می‌باشد، نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 6-a مشخص است، کاهش میرایی تأثیری بر پدیده اسنپ – ترو نداشته و تنها باعث افزایش مدت و دامنه نوسان شده است. این در حالی است که افزایش میرایی از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار جلوگیری کرده است.

تغییرات میرایی بر روی ناپایداری پولین نیز اثر مشابهی دارد. کاهش میرایی باعث می‌شود تا میکروتیر سریع‌تر به سمت الکترود ثابت جذب شود. و افزایش آن تا حد مشخصی می‌تواند از ناپایداری پولین جلوگیری کند. در شکل 7 برای $\beta_1 = 237$، که ولتاژ دینامیکی پولین برای $\zeta = 0.05$ می‌باشد، اثر افزایش میرایی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود از ناپایداری پولین جلوگیری شده است.

در شکل 8 اثر مقدار خیز اولیه نقطه میانی، با ثابت بودن سایر ابعاد بر پدیده‌های اسنپ- ترو و پولین نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش خیز نقطه میانی، ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد.

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود میکروتیر تخت بیشترین مقدار ولتاژ پولین را داراست. از طرف دیگر وجود دومین حالت پایدار برای مقادیر کوچک خیز اولیه نقطه میانی امکان پذیر نیست و می‌بایست مقدار خیز اولیه نقطه میانی از حد مشخصی بیشتر باشد. دلیل این مورد این است که با کوچک‌تر شدن h_0 شکل منحنی میکروتیر به حالت تخت نزدیک‌تر می‌شود و بنابراین رفتاری مانند میکروتیر تخت خواهیم داشت. با توجه به شکل 8 برای

Fig. 3 Maximum von Mises stress for snap-through and pull-in configuration

شکل 3 ماکزیمم تنش در معیار ون مایسس برای حالت‌های اسنپ- ترو و پولین

Fig. 4 Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b)

شکل 4 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتیر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)

Fig. 5 Comparison between dynamic response of the microbeam to step actuation using first mode shape and three first mode shapes for $\beta_1 = 154$ & $\zeta = 0.05$

شکل 5 مقایسه بین پاسخ دینامیکی میکروتیر به تحریک پله با در نظر گرفتن شکل مود اول و سه شکل مود اول برای $\zeta = 0.05$ و $\beta_1 = 154$

$h_0 < 0.28$ میکروتیر به دومین حالت پایدار انتقال نمی‌یابد و تنها دچار ناپایداری پولین می‌گردد.

در شکل 9 اثر طول گپ بر رفتار دینامیکی میکروتیر نشان داده شده

Fig. 6 Time history response of the microbeam to step actuation (a),(b) and corresponding phase plane (c),(d) for two different damping ratio, (a) & (c) for $\zeta = 0.005$, (b) & (d) for $\zeta = 0.5$, $\beta_1 = 169$

شکل 6 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتیر به تحریک پله (a),(b) و فضای فاز متناظر (c),(d) برای دو نسبت میرایی متفاوت، (a),(c) برای $\zeta = 0.005$ و (b),(d) برای $\zeta = 0.5$، برای هر دو نسبت میرایی $\beta_1 = 169$

Fig. 7 Time history response of the microbeam to step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for $\zeta = 0.5$ & $\beta_1 = 237$

شکل 7 نمودار تاریخچه زمانی پاسخ میکروتیر به تحریک پله (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای $\zeta = 0.5$ و $\beta_1 = 237$

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ابتدا با افزایش طول گپ ولتاژ بحرانی پولین کاهش می‌یابد و سپس از نقطه‌ای که پدیده اسنپ- ترو مشاهده می‌شود، روندی افزایشی به خود می‌گیرد. دلیل این امر تأثیر غیرخطی سفتی خمشی و کشیدگی صفحه میانی بر رفتار میکروتیر می‌باشد. با توجه به شکل 9 پدیده اسنپ- ترو به طول گپ نیز وابسته می‌باشد.

نرم‌افزار کامسول اطلاعات مفید دیگری که محاسبه آن‌ها به صورت عددی مشکل است را می‌تواند در اختیار ما قرار دهد. به طور مثال در تحریک هارمونیک میکروتیر، تابع ولتاژ به شکل زیر می‌باشد.

$$V(t) = V_{\mathrm{DC}} + V_{\mathrm{AC}} \cos(2\pi f t) \tag{25}$$

در این نوع تحریک، میکروتیر برای انتقال به دومین حالت پایدار علاوه بر مقدار ولتاژ به فرکانس تحریک نیز وابسته می‌باشد. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که در فرکانس‌های تحریک نزدیک به فرکانس‌های طبیعی میکروتیر پدیده اسنپ- ترو رخ می‌دهد. بنابراین در طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا برای کاربردهایی که از این نوع تحریک استفاده می‌شود (مانند فیلتر و تشدیدگر) دانستن فرکانس‌های طبیعی اهمیت زیادی دارد. در جدول 3 پنج فرکانس طبیعی اول میکروتیر مورد نظر که توسط نرم‌افزار محاسبه شده‌اند با مقادیر گزارش شده توسط مرجع [27] مقایسه شده‌اند. برای مقایسه با مرجع مقادیر بی‌بعد شده در جدول آورده شده است.

Fig. 8 Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different initial midpoint elevation

شکل 8 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ- ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف خیز اولیه نقطه میانی

Fig. 9 Critical dynamic snap-through & dynamic pull-in values of the voltage parameter versus different gap values

شکل 9 مقادیر بحرانی ولتاژ دینامیکی اسنپ- ترو و پولین بر حسب مقادیر مختلف گپ

فرکانس‌های طبیعی میکروتیر تابعی از ولتاژ نیز هستند. تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب ولتاژ در شکل 10 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ولتاژ فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این اثر با عنوان نرم شدگی فنری شناخته می‌شود [27].

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد یکی از مزیت‌های میکروتیرهای منحنی نسبت به میکروتیرهای تخت، امکان نزدیک‌تر شدن میکروتیر منحنی به الکترود ثابت بوده بدون این‌که دچار ناپایداری پولین گردد. از تحریک‌های مختلفی جهت این کار می‌توان استفاده کرد، یکی از انواع این تحریک‌ها تحریک دو پله‌ای می‌باشد.

رابطه (26) نشان دهنده پارامتر ولتاژ برای تحریک دو پله‌ای می‌باشد.

$$\beta(t) = \beta_1 H(t) - (\beta_1 - \beta_2) H(t - t_1) \tag{26}$$

که β_2 بزرگی پارامتر ولتاژ پله دوم بوده و پس از گذشت بازه زمانی t_1 جایگزین β_1 می‌شود. در شکل 11 یک حالت از پاسخ دینامیکی میکروتیر مورد بحث به این تحریک نشان داده شده است. در این حالت شاهد رفتار پیچیده‌تری از میکروتیر نیز هستیم، به‌طوری که در شکل 11 نشان داده شده است، میکروتیر ابتدا به حالت پایدار دوم منتقل شده و پس از تعدادی نوسان به موقعیتی نزدیک به حالت اولیه باز می‌گردد.

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر با شکل اولیه منحنی تحت تحریک الکترواستاتیک پله بررسی شد. از یک مدل کاهش مرتبه جهت گسسته سازی معادله حرکت میکروتیر و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شد. دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از مدل کاهش مرتبه نسبتاً ساده بوده و پروسه حل آن به مراتب ساده‌تر از سایر روش‌ها می‌باشد. همچنین از نرم‌افزار کامسول برای شبیه‌سازی اجزای محدود استفاده شد. با رسم نمودارهای تاریخچه زمانی و فضای فاز، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار دینامیکی میکروتیر بررسی شد. میکروتیرهای منحنی تحت بارگذاری عرضی، ممکن است دو حالت پایدار را از خود نشان دهند. به طور رایج انتقال بین دو حالت پایدار را اسنپ- ترو می‌گویند. ناپایداری پولین هنگامی اتفاق می‌افتد که نیروهای داخلی میکروتیر از تعادل با فشار الکترواستاتیک خارج شده و میکروتیر به سمت الکترود ثابت کشیده شده و با آن تماس پیدا می‌کند. نتایج نشان داد که افزایش میرایی ویسکوز تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی میکروتیر منحنی دارد، به طوری که می‌تواند از انتقال میکروتیر به دومین حالت پایدار و یا حتی ناپایداری پولین جلوگیری کند. بنابراین به هنگام طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا باید به کم فشار یا پر فشار بودن محیط استفاده از این سیستم‌ها توجه شود. از طرفی دیگر رفتار دینامیکی میکروتیر به هندسه نیز وابسته می‌باشد، در ترسیم مقادیر بحرانی ولتاژ اسنپ- ترو و پولین برحسب خیز اولیه نقطه میانی مشاهده شد که با کم‌تر شدن خیز اولیه نقطه میانی از مقداری خاص امکان انتقال به دومین حالت پایدار از بین می‌رود. همچنین مشاهده شد که طول گپ نیز بر رفتار دینامیکی میکروتیر تأثیر دارد. مطابق شکل‌های 7 و 8 گذار به دومین حالت پایدار به ازای حداقلی از مقدار خیز اولیه و طول گپ امکان پذیر می‌باشد. بدین معنی که با کم‌تر شدن مقدار خیز اولیه و طول گپ از مقداری مشخص امکان صورت گرفتن پدیده اسنپ- ترو از بین می‌رود. تغییر نوع تحریک نیز بر رفتار دینامیکی

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی میکروتیر

Table 3 Natural frequencies of the microbeam

فرکانس طبیعی f_i	شبیه‌سازی	روش عددی [27]	درصد خطا
f_1	44.1	42.46	3.86
f_2	63.2	61.64	2.53
f_3	131.3	128.76	1.97
f_4	204.7	201.37	1.69
f_5	306.8	300	2

Fig. 10 First natural frequency versus voltage

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب ولتاژ

Fig. 11 Time history response of the microbeam to two step actuation (a) and corresponding phase plane (b), for $\beta_1 = 270$, $\beta_2 = 140$, $t_1 = 0.1$ & $\zeta = 0.05$

شکل 11 نمودار پاسخ زمانی میکروتیر به تحریک دو پله‌ای (a) و فضای فاز متناظر (b)، برای $\beta_1 = 270$، $\beta_2 = 140$، $t_1 = 0.1$ و $\zeta = 0.05$

میکروتیر موثر است. مشاهده شد که تحریک الکترواستاتیک دو پله‌ای می‌تواند باعث شود که میکروتیر رفتار پیچیده‌تری را از خود نشان دهد.

مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج مدل کاهش مرتبه و برخی از پژوهش های انجام شده نشان داد که با دقتی بسیار بالا می‌توان از نرم‌افزار کامسول برای تحلیل و طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دوپایا استفاده کرد.

8- فهرست علائم

$\bar{b}$	پهنای میکروتیر (μm)
B	ماتریس سفتی خمشی
$\bar{d}$	ضخامت میکروتیر (μm)
E	مدول یانگ (GPa)
F	بردار نیروی تعمیم یافته
g_0	گپ (μm)
$\bar{h}_0$	خیز اولیه نقطه میانی (μm)
L	طول میکروتیر
M	ماتریس جرم
q	بردار مختصات تعمیم یافته زمانی
S	ماتریس سفتی کشیدگی
$\bar{w}_0$	شکل اولیه میکروتیر
$\bar{w}$	شکل میکروتیر پس از بارگذاری

علائم یونانی

α	پارامتر کشیدگی
β	پارامتر ولتاژ
ρ	چگالی (kgm^{-3})
φ_i	iامین تابع شکل مود تیر تخت دوسر گیردار
υ	نسبت پواسون
ζ	نسبت میرایی

9- مراجع

[1] X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces, *Acta Mechanica*, Vol. 218, No. 1-2, pp. 161-174, 2011.

[2] T. R. Hsu, *MEMS and Microsystems: Design, Manufacture, and Nanoscale Engineering*, pp. 1-27, New Jersey, John Wiley & Sons, 2008.

[3] R. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 6, pp. R23, 2007.

[4] A. Raheli, S. Azizi, S. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 374-384, 2017.(in persian فارسی)

[5] Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Snap-through and pull-in analysis of an electro-dynamically actuated curved micro-beam using a nonlinear beam model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 15, pp. 3821-3832, 2013.

[6] V. Intaraprasonk, S. Fan, Nonvolatile bistable all-optical switch from mechanical buckling, *Applied Physics Letters*, Vol. 98, No. 24, pp. 241104, 2011.

[7] C. Goll, W. Bacher, B. Büstgens, D. Maas, W. Menz, W. Schomburg, Microvalves with bistable buckled polymer diaphragms, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 77, 1996.

[8] D. Roodenburg, J. Spronck, H. Van der Zant, W. Venstra, Buckling beam micromechanical memory with on-chip readout, *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 18, pp. 183501, 2009.

[9] L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 13, pp. 1864-1876, 2012.

[10] S. Krylov, B. R. Ilic, S. Lulinsky, Bistability of curved microbeams actuated by fringing electrostatic fields, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 66, No. 3, pp. 403, 2011.

[11] S. Krylov, B. R. Ilic, D. Schreiber, S. Seretensky, H. Craighead, The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable microstructures, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 18, No. 5, pp. 055026, 2008.

[12] W. M. Zhang, H. Yan, Z. K. Peng, G. Meng, Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 214, pp. 187-218, 2014.

[13] X. Chen, S. Meguid, Snap-through buckling of initially curved microbeam subject to an electrostatic force, *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 471, No. 2177, pp. 20150072, 2015.

[14] S. Park, D. Hah, Pre-shaped buckled-beam actuators: theory and experiments, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186-192, 2008.

[15] K. Das, R. Batra, Pull-in and snap-through instabilities in transient deformations of microelectromechanical systems, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, No. 3, pp. 035008, 2009.

[16] S. Krylov, N. Dick, Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 445-468, 2010.

[17] Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 065030, 2010.

[18] M. M. Zand, The dynamic pull-in instability and snap-through behavior of initially curved microbeams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 485-491, 2012.

[19] G. Sarı, M. Pakdemirli, Vibrations of a slightly curved microbeam resting on an elastic foundation with nonideal boundary conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2013, 2013.

[20] L. Ruzziconi, M. I. Younis, S. Lenci, An efficient reduced-order model to investigate the behavior of an imperfect microbeam under axial load and electric excitation, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, No. 1, pp. 011014, 2013.

[21] L. Medina, R. Gilat, S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 11, pp. 2047-2061, 2014.

[22] F. Tajaddodianfar, M. R. H. Yazdi, H. N. Pishkenari, Nonlinear dynamics of MEMS/NEMS resonators: analytical solution by the homotopy analysis method, *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No. 6, pp. 1913-1926, 2017.

[23] P. Villaggio, *Mathematical Models for Elastic Structures*, pp. 267-302, New York, Cambridge University Press, 2005.

[24] G. J. Simitses, D. H. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability*, pp. 200-206, Amsterdam, Elsevier, 2006.

[25] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 107-119, New Jersey, John Wiley & Sons, 2007.

[26] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, pp. 58-103, New Jersey, Prentice Hall, 1981.

[27] H. M. Ouakad, M. I. Younis, The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 7, pp. 704-713, 2010.

[28] S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert, H. A. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed–fixed and fixed–free end conditions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 458, 2002.

[29] H. M. Ouakad, M. I. Younis, On using the dynamic snap-through motion of MEMS initially curved microbeams for filtering applications, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 2, pp. 555-568, 2014.