مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند1396، دوره 17، شماره 12، ص‌ص 275-285

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی رفتار دینامیک غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی غوطه‌ور درون مایع براساس تئوری گرادیان کرنشی

بهزاد سعیدی[1]، رامین وطن‌خواه[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

* شیراز، صندوق پستی 713481154، rvatankhah@shirazu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 شهریور 1396

پذیرش: 21 آبان 1396

ارائه در سایت: 99 اردیبهشت 9999

کلید واژگان:

تئوری گرادیان کرنشی

تئوری اویلر- برنولی

پارامتر مقیاس طولی

دینامیک غیرخطی

میکروسکوپ نیروی اتمی

چکیده

در این پژوهش رفتار غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی غوطه‌ور درون استون، آب، تتراکلوریدکربن و بوتانول، با در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این تئوری شامل پارامتر مقیاس طولی مواد است که اثر اندازه را در بررسی رفتار سیستم در نظر می‌گیرد. رفتار غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی ناشی از غیرخطی‌گری موجود در نیروی دافعه/جاذبه واندروالس بین نوک پروب و نمونه می‌باشد. رفتار میکروتیر غوطه‌ور در سیال به‌دلیل وجود نیروی هیدرودینامیکی به‌طور کلی با رفتار آن‌ها در هوا و خلاء متفاوت است. در این مقاله پاسخ فرکانسی، شکل مود، معادلات حرکت پاره‌ای و معمولی، شرایط مرزی، تحلیل پایداری، تابع پتانسیل و همچنین صفحه فاز سیستم به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آید. علاوه بر این نتایج مدل فعلی با تئوری تنش کوپل بهبود یافته مقایسه شده است. برای این منظور میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی و نوک پروب متصل به انتهای آزاد آن به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته می‌شود. انتهای گیردار این میکروتیر از طریق المان پیزوالکتریک به‌صورت هارمونیک تحریک شده و معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر برنولی و همچنین با استفاده از اصل همیلتون به‌دست می‌آید. با استفاده از روش گلرکین فرم دیفرانسیل معمولی معادله حرکت سیستم به‌دست خواهد آمد و با استفاده از رویکرد انحراف جزئی به‌صورت تحلیلی حل خواهد شد.

Nonlinear dynamic analysis of an atomic force microscope submerged in liquid based on strain gradient theory

Behzad Saeedi, Ramin Vatankhah*

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran
* P.O.B. 713481154, Shiraz, Iran, rvatankhah@shirazu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 September 2017
Accepted 12 November 2017
Available Online 15 December 2017

Keywords:
Strain gradient theory
Euler-Bernoulli theory
Length scale parameter
Nonlinear dynamic
Atomic force microscope

ABSTRACT

In this study, nonlinear behavior of an atomic force microscopes (AFM) immersed in acetone, water, carbon tetrachloride (CCl4), and 1-butanol is investigated using non-classical strain gradient theory. In this theory, the size effect of system is taking into account by means of material length scale parameter. The nonlinear behavior of the AFM is due to the nonlinearity of the AFM tip–sample interaction caused by the Van der Waals attraction/repulsion force. Behavior of micro beam immersed in liquid is completely different with its behavior in air and vacuum due to the existence of hydrodynamic force. The Resonant frequencies, mode shapes, governing nonlinear partial and ordinary differential equations (PDE and ODE) of motion, stability analysis, boundary conditions, potential function and phase-plane of the system are obtained analytically in the present study. Furthermore, the results are compared with the one obtained by the modified couple stress theory. For this purpose, the AFM and the probe at the free end of micro beam are modeled as a lumped mass. The fixed end of micro beam is excited by piezoelectric element. The nonlinear PDE of motion is derived based on Euler-Bernoulli theory by employing the Hamilton principle. The Galerkin method is utilized to gain the governing nonlinear ODE of motion and the obtained ODE is analytically solved by means of perturbation techniques.

1- مقدمه

میکروسکوپ های نیروی اتمی[1] برای اولین بار توسط باینینگ [1] در سال 1986 اختراع شده است. این میکروسکوپ‌ها در محیط‌های متفاوتی نظیر هوا، خلاء و مایع مورد استفاده قرار گرفته است. میکروسکوپ‌های نیروی اتمی دارای قابلیت قابل توجهی در تصویربرداری با وضوح بالا در مقیاس نانو می‌باشند [2-4] و به‌طور گسترده‌ای برای دست‌کاری[2] در ابعاد نانو و همچنین نانولیتوگرافی[3] در سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیکال[4] مورد

[1] Atomic force microscope

[2] Nano-manipulation
[3] Nano-lithography
[4] Micro/Nano-electromechanical systems

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

B. Saeedi, R. Vatankhah, Nonlinear dynamic analysis of an atomic force microscope submerged in liquid based on strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 275-285, 2018 (in Persian)

استفاده قرار می‌گیرند [5-7]. از دیگر کاربردهای میکروسکوپ‌های نیروی اتمی بررسی خواص و ساختار مواد رسانا، عایق، نرم، سخت، منسجم، پودری و اندازه‌گیری ویژگی‌های سطح، توزیع چسبندگی، اصطحکاک و ناخالصی سطح نمونه در ابعاد نانو می‌باشد [8].

حالت‌های عملیاتی در میکروسکوپ نیروی اتمی به دو دسته ایستا[1] و پویا[2] تقسیم می‌شوند. در حالت ایستا، میکروتیر به‌صورت ثابت تا زاویه معینی خم می‌شود و این مقدار تنظیم شده خمش، هنگام روبش حفظ می‌شود. در حالت‌های ایستا، نوک پروب به‌صورت فیزیکی سطح را لمس می‌کند. بنابراین، حالت‌های ایستا از نوع تماسی[3] [9] هستند. مبنای عملکرد میکروسکوپ‌های نیروی اتمی در حالت تماسی براساس انحراف تیر ناشی از نیروی دافعه واندروالس بین نمونه و پروب می‌باشد. در حالت‌های پویا، میکروتیر در فرکانسی مشخص نوسان می‌کند و مقدار تنظیم شده دامنه نوسان، هنگام روبش حفظ می‌شود. حالت‌های پویا شامل انواع ضربه‌ای[4] و غیرتماسی[5] هستند. حالت ضربه‌ای [10] امکان آسیب رسیدن به نمونه را هنگام روبش کاهش می‌دهد و می‌تواند علاوه بر پستی بلندی‌های سطحی، اطلاعاتی در مورد خصوصیت‌های شیمیایی و فیزیکی را نیز فراهم کند. در حالت غیرتماسی [11] میکروتیر با محرک پیزوالکتریک[6] تحریک می‌شود تا در فرکانس تشدید یا نزدیک به آن نوسان کند. نوک پروب در حال لرزش در نزدیکی سطح نمونه قرار می‌گیرد، به‌طوری که سطح را لمس نمی‌کند تا نیروی جاذبه ضعیف بین نوک پروب و نمونه را میکروتیر حس کند. البته حالت غیرتماسی نمی‌تواند در محیط مایع کار کند. حتی در هوا نیز، اتصال مایع به نوک پروب سبب ناموفق شدن عملیات می‌شود.

امروزه به‌دلیل رشد سریع در حوزه نانو زیست‌شناسی[7] و نیاز به بررسی خواص مکانیکی و ریخت‌شناسی[8] مواد زیست‌محیطی در محیط مایع، استفاده از میکروسکوپ‌های نیروی اتمی در چنین محیط‌هایی افزایش یافته است. به‌طوری که محیط مایع امکان زنده ماندن نمونه را در طول تحقیق محقق کرده است. از دیگر مزایای تحقیق در محیط مایع حذف نیروی مویینگی [12] و کاهش نیروی واندروالس [13] و همچنین کاهش آلودگی نوک سوزن و نمونه مورد بررسی می‌باشد [14]. از آن‌جایی که مولکول‌های نمونه در طول تصویربرداری در محیط هوا به نوک پروب می‌چسبند موجب کاهش وضوحیت تصویر می‌گردند. اما این مولکول‌ها در محیط مایع دیگر به نوک پروب نچسبیده و موجب افزایش دقت و کیفیت تصاویر گردیده‌اند. تصاویر اولیه از نمونه‌های قرار گرفته در محیط مایع به‌وسیله‌ی میکروسکوپ‌های نیروی اتمی در حالت تماسی به‌دست آمده اند به‌طوری که در حالت تماسی ممکن است نوک پروب در طول تحقیق به نمونه آسیب برساند. میکروسکوپ‌های نیروی اتمی در حالت ضربه‌ای در محیط مایع برای اولین‌بار توسط پوتمن و همکاران [15] انجام شده است. در این نوع از حالت کاری علاوه‌بر جلوگیری از آسیب رسیدن به نمونه، چسبندگی و اصطکاک نیز حذف شده و کیفیت تصویر برداری بهتر شده است. سرعت تصویربرداری و کیفیت آن به فرکانس تشدید و حساسیت میکروتیر بستگی دارد. از این‌رو بررسی رفتار دینامیکی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی ضروری می‌باشد. تحقیقات نشان می‌دهد که نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های گسسته نظیر مدل‌سازی جرم متمرکز در فرکانس‌های بالای تحریک، اختلاف بالایی با نتایج آزمایشگاهی دارند [16]. علاوه بر این مدل جرم متمرکز تنها پاسخی برای جابجایی عمودی تیر را ارائه می‌کند در حالی که در آزمایشگاه سیستم تشخیص میکروسکوپ نیروی اتمی زاویه‌ی چرخش میکروتیر را نیز اندازه‌گیری می‌کند. از این‌رو برای حذف این مشکل از تئوری اویلر-برنولی برای مدل‌سازی میکرو تیر استفاده می‌گردد [17]. به‌دلیل وجود نیروی غیرخطی بین نوک پروب و نمونه، حل تحلیلی معادلات پاره‌ای حاکمه ناممکن است، از این رو برای تحلیل دینامیکی سیستم موردنظر روش‌هایی نظیر المان محدود و گلرکین موردنیاز است [18].

تیرهای استفاده شده در سیستم‌های میکرو/ نانوالکترومکانیکال دارای ضخامت‌هایی در اندازه میکرون و زیر میکرون است. آزمایشات نشان می‌دهد که در سیستم‌هایی با چنین ابعادی، تغییر شکل و ارتعاشات وابسته به اندازه می‌باشد. طبق نتایج آزمایشگاهی به‌دست آمده، رفتار وابسته به اندازه یک خاصیت ذاتی مواد می‌باشد و زمانی که اندازه مشخصه سیستم تفاوت زیادی با مقیاس طولی ماده[9] ندارد دارای اثر قابل توجهی می‌باشد. از این‌رو تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک قادر به پیش‌بینی و توضیح رفتار وابسته به اندازه در سیستم‌های با ابعاد میکرون و زیر میکرون نمی‌باشد [19].

تئوری‌های غیرکلاسیک مانند تئوری الاستیسیته غیرمحلی[10]، تئوری گرادیان کرنشی[11]، تئوری تنش کوپل بهبود یافته[12] به‌طور مناسبی رفتارهای وابسته به اندازه را ارائه می‌کنند. تئوری گرادیان کرنشی برای اولین بار توسط لم [20] معرفی شده است. در این تئوری سه پارامتر مقیاس طولی مربوط به سازه‌های در ابعاد میکرو شامل گرادیان چرخشی، گرادیان اتساع و گرادیان کششی در نظر گرفته شده است. وطن‌خواه [21] از تئوری گرادیان کرنشی در مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده است و با استفاده از تئوری انحراف جزئی[13] ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروتیر دوسر مفصل را با در نظر گرفتن اثر کشیدگی صفحه میانی بررسی کرده است. کنگ [22] رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای اویلر برنولی را براساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی کرده است. ونگ [22] ارتعاشات میکروتیر مدل شده براساس تئوری تیموشنکو و تئوری گرادیان کرنشی را بررسی کرده است. کهروبائیان [23] معادلات غیرخطی حاکم بر میکروتیر را با در نظر گرفتن اثر کشیدگی صفحه میانی براساس تئوری گرادیان کرنشی به‌دست آورده است. عباسی [24] با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی فرکانس رزونانس و همچنین حساسیت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی را مورد بررسی قرار داده و نشان داده است در صورتی که ضخامت میکروتیر نزدیک پارامتر مقیاس طولی باشد و علاوه بر آن سفتی تماسی نیز زیاد باشد استفاده از تئوری گرادیان کرنشی برای تحلیل دینامیکی میکروتیر نیاز می‌باشد. عباسی در [25] رفتار ارتعاشی میکروتیر ارائه شده توسط دایا [26] براساس تئوری گرادیان کرنشی را مورد بررسی قرار داده و نشان داده است که حساسیت و فرکانس رزونانس این میکروتیر به اندازه وابسته است. کهروبائیان [27] با استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته رفتار دینامیکی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی را بررسی کرده است.

مدل‌سازی حالت ضربه‌ای در محیط مایع نسبت به محیط هوا مشکل‌تر می‌باشد. رفتار میکروتیر در محیط مایع تحت تاثیر ضریب میراکننده

[1] static
[2] dynamic
[3] Contact mode
[4] Tapping-mode
[5] Non-contact mode
[6] piezoelectric
[7] Nano-Biotechnology
[8] morphology

[9] Length scale material
[10] Non-local Elasticity
[11] Strain gradient
[12] Modified couple stress
[13] perturbation

هیدرودینامیکی[1] و همچنین جرم اضافی سیال می‌باشد. فرخ‌پیام [28] فرکانس رزونانس و همچنین حساسیت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی با مقطع مستطیل شکل را به‌طوری که درون سیال غوطه‌ور می‌باشد با در نظر گرفتن تغیرات سختی سطح مورد بررسی قرار داده است. کورایم [29] ارتعاشات میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی غوطه‌ور درون سیال را با درنظر گرفتن دو لایه پیزوالکتریک متصل به دو طرف میکروتیر تحلیل کرده و نشان داده است که مود اول برای سفتی تماسی پایین حساس‌ترین مود بوده و بهترین تصویر با تحریک این مود به‌دست می‌آید. لی [30] حساسیت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی مدل شده براساس تئوری تنش کوپل بهبود یافته و غوطه‌ور درون مایع های متنوع را بررسی کرده و پارامتر مقیاس طولی میکرو تیر در این محیط‌ها را ارائه کرده است.

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی مدل شده براساس تئوری اویلر-برنولی و تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی در استون[2]، آب، تتراکلوریدکربن[3] و بوتانول[4] مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی حاکم بر جابجایی میکروتیر و همچنین شرایط مرزی حاکم بر آن با اعمال اصل همیلتون به‌دست می‌آید. علاوه بر این با استفاده از روش گلرکین و با درنظر گرفتن مود اول ارتعاشی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر میکروتیر به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده سپس با استفاده از رویکرد انحراف جزئی و با استفاده از روش مقیاس چندگانه[5] به‌صورت تحلیلی حل می‌گردد. در انتها رفتار دینامیک غیرخطی میکروتیر به ازای پارامترهای هندسی متفاوت مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل بهبود یافته مقایسه می‌گردد. شایان ذکر است با توجه به بررسی تحقیقات انجام شده، تا به حال موضوع ارتعاشات غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی مدل شده به وسیله تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی و در محیط مایع انجام نشده است به‌طوری که در این پژوهش هدف بررسی رفتار غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی با درنظر گرفتن اثر اندازه در محیط مایع می‌باشد.

2- مدل‌سازی ریاضی

در "شکل 1" مدل میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی نشان داده شده است.. پارامترهای L، z_0، $d(t)$، b، h، نشان داده شده در "شکل 1" به ترتیب بیانگر طول میکروتیر، فاصله محور افقی تا میانگین ناهمواری‌های سطح نمونه، نیروی تحریک اعمالی توسط پیزوالکتریک. عرض میکروتیر و ضخامت میکروتیر می‌باشد. محور افقی با x و محور عمودی با y نشان داده شده است.

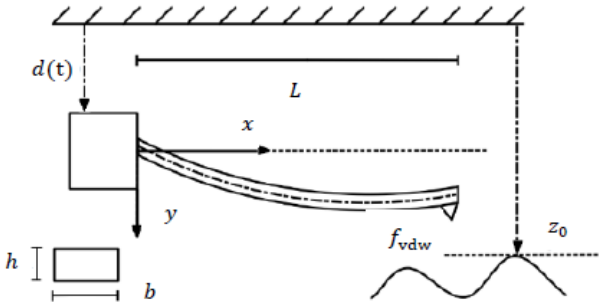


Fig. 1 Schematic of the atomic force microscope micro beam [21]

شکل 1 میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی [21]

[1] hydrodynamic
[2] acetone
[3] CCL_4
[4] 1-butanol
[5] multiple scales method

2-1- شکل مود و فرکانس طبیعی

در ابتدا با استفاده از روش ریلی-ریتز[6] [31] شکل مود میکروتیر و همچنین فرکانس طبیعی آن را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور ماکزیمم انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم برابر است با:

$$T_{\max} = \omega^2 T^*_{\max} \quad \text{(1-الف)}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\omega^2\left(\int_0^L \rho A y^2(x)dx + M_t y^2(L)\right) \quad (1)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\left(\int_0^L [s(y''(x))^2 + k(y'''(x))^2]\,dx\right) \quad (2)$$

در روابط (1) و (2)، $y(x)$ و ω به ترتیب نشان‌دهنده شکل مود و فرکانس طبیعی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی می‌باشند. مطابق با این روش شکل مود میکروتیر به‌صورت رابطه (3) فرض می‌گردد.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) \quad (3)$$

در رابطه (3)، $\varphi_i(x)$ تابعی دلخواه بوده که در شرایط مرزی میکروتیر صدق کرده و C_i ها ضرایب ثابتی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (3) در روابط (1) و (2) داریم که:

$$T^*_{\max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}C_iC_j \quad (4)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}C_iC_j \quad (5)$$

به‌طوری که در معادلات نشان داده شده M_{ij} و K_{ij} به ترتیب بیان‌گر ماتریس‌های جرم و سختی بوده و به‌صورت زیر ارائه می‌گردند.

$$M_{ij} = \int_0^L \rho A \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + M_t\varphi_i(L)\varphi_j(L) \quad (6)$$

$$K_{ij} = \int_0^L [s\varphi_i''(x)\varphi_j''(x) + k\varphi_i'''(x)\varphi_j'''(x)]dx \quad (7)$$

نماد $(.)'$ بیانگر مشتق نسبت به متغیر x می‌باشد. حال با استفاده از ماتریس‌های جرم و سختی به‌دست آمده از روابط (6) و (7) و جای‌گذاری در معادله زیر فرکانس طبیعی ω و همچنین ضرایب C_i به‌دست می‌آید.

$$(k_{ij} - \omega^2 M_{ij})C_j = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده از رابطه (8) در رابطه (3)، شکل مود سیستم به‌دست خواهد آمد.

2-2- مدل دینامیکی حاکم بر حرکت میکروتیر

برای به‌دست آوردن معادله دینامیکی حاکم بر حرکت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی فرضیات زیر درنظر گرفته می‌گردد:

- حالت کاری میکروسکوپ نیروی اتمی ضربه‌ای بوده به طوری که با دامنه ثابت سطح نمونه را روبش می‌کند.
- پروب متصل به انتهای آزاد میکروتیر کروی بوده و همچنین محیط کاری میکروسکوپ نیروی اتمی مایع می‌باشد.
- نیروی غیرخطی بین نمونه و نوک پروب واندروالس می‌باشد.
- مدل‌سازی میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی و اویلر-برنولی انجام شده و شرایط مرزی و معادله حاکم بر حرکت میکروتیر با استفاده از روش همیلتون استخراج شده است.

با توجه به مدل ارائه شده در "شکل 1"، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل میکروتیر براساس تئوری گرادیان کرنشی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

[6] Rayleigh-Ritz method

$$T=\frac{1}{2}m_s\left(\dot{y}(L,t)+\dot{d}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\int_0^L\rho A\left(\dot{y}(x,t)+\dot{d}(t)\right)^2dx \tag{9}$$

$$U=\frac{1}{2}\left(\int_0^L\left[s(y''(x,t))^2+k(y'''(x,t))^2\right]dx\right) \tag{10}$$

$y(x,t)$ بیان‌گر جابجایی هر نقطه دلخواه از میکروتیر بوده که در فاصله‌ی x از انتهای ثابت میکروتیر قرار دارد. از طرفی پارامترهای s و k موجود در رابطه (10) برابر است با:

$$s=EI+\mu A(2{l_0}^2+\frac{8}{15}{l_1}^2+{l_2}^2) \tag{11}$$

$$k=\mu I\left(2{l_0}^2+\frac{4}{5}{l_1}^2\right) \tag{12}$$

E، μ، A، I به ترتیب بیانگر مدول یانگ، مدول برشی، سطح مقطع میکروتیر و ممان اینرسی می‌باشند. به علاوه l_0، l_1، l_2، پارامترهای مقیاس طولی هستند.

کار اعمال شده بر میکروتیر به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$W=f_{\mathrm{vdw}}y(L,t)+\int_0^L f_{\mathrm{liq}}y(x,t)dx \tag{13}$$

f_{vdw} در رابطه (13) نیروی غیرخطی واندروالس بوده به طوری که بین نوک پروب و سطح نمونه اعمال می‌گردد. این نیرو شامل دو ترم دافعه و جاذبه بوده به‌طوری که توسط رابطه زیر به‌دست آمده است [33,32].

$$Z=z_0-y(L,t)-d(t) \tag{14}$$

$$f_{\mathrm{vdw}}=\frac{A_2R}{6(Z)^2}-\frac{A_1R}{180(Z)^8} \tag{15}$$

A_2,A_1,R در رابطه (15) بیانگر شعاع پروب و ثابت‌های هاماکر[1] می‌باشند. همچنین نیروی هیدرودینامیکی وارد بر میکروتیر از طرف سیال توسط f_{liq} در رابطه (13) نشان داده شده است. این نیرو شامل دو ترم مجزای جرم اضافی[2] و میرایی لزج[3] بوده [30] که به‌صورت رابطه (16) استخراج شده است.

$$f_{\mathrm{liq}}=-\rho_a\ddot{y}(x,t)-c_a\dot{y}(x,t) \tag{16}$$

در رابطه (16)، ρ_a و c_a به ترتیب جرم اضافی و ضریب میرایی را نشان می‌دهند به‌طوری که مقادیر آن‌ها برابر است با [34]:

$$\rho_a=\frac{\pi}{4}\rho_f b^2\mathrm{RE}[\Gamma(\omega)] \tag{17}$$

$$c_a=\frac{\pi}{4}\rho_f\omega b^2\mathrm{IM}[\Gamma(\omega)] \tag{18}$$

از طرفی $\mathrm{RE}[\Gamma(\omega)]$ و $\mathrm{IM}[\Gamma(\omega)]$ توسط روابط (19) و (20) به‌دست آمده‌اند.

$$\mathrm{RE}[\Gamma(\omega)]=a_1+\frac{a_2}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{19}$$

$$\mathrm{IM}[\Gamma(\omega)]=\frac{b_1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}+\frac{b_2}{\mathrm{Re}} \tag{20}$$

به‌طوری که $a_1=1.0553$ و $a_2=3.7997$ و $b_1=3.8018$ و $b_2=2.73642$ [35] بوده و همچنین Re بیانگر عدد رینولدز[4] است که از طریق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد [34].

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_f\omega b^2}{4\upsilon} \tag{21}$$

در معادلات ارائه شده منظور از ρ_f چگالی و υ لزجت سیال می‌باشد. جهت به‌دست آوردن معادله حاکم بر حرکت میکروتیر و همچنین شرایط مرزی حاکم بر آن از اصل همیلتون به‌صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U+w)\,dt=0 \tag{22}$$

با توجه به رابطه (22)، تغییرات و انتگرال‌گیری روی روابط (10,9) و (13) به‌صورت زیر اعمال خواهند شد.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=&-\int_{t_1}^{t_2}m_s\frac{\delta}{\delta t}\Big(\dot{y}(L,t)+\dot{d}(t)\Big)\delta y(L,t)dt\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho A\frac{\delta}{\delta t}\Big(\dot{y}(x,t)+\dot{d}(t)\Big)\delta y(x,t)dxdt\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta U\,dt=&\int_{t_1}^{t_2}ky'''(L,t)\delta y''(L,t)dt\\&-\int_{t_1}^{t_2}ky'''(0,t)\delta y''(0,t)dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\big(sy''''(x,t)-ky''''''(x,t)\big)\delta y(x,t)dxdt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(sy''(L,t)-ky''''(L,t))\delta y'(L,t)dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(-sy''(0,t)+ky''''(0,t))\delta y'(0,t)dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(-sy'''(L,t)+ky'''''(L,t))\delta y(L,t)dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(sy'''(0,t)-ky'''''(0,t))\delta y(0,t)dt\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta W\,dt=&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\big(f_{\mathrm{vdw}}\delta(L-x)\big)\delta y(x,t)dxdt\\&+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L f_{\mathrm{liq}}\delta y(x,t)dxdt\end{aligned} \tag{25}$$

عبارت $\delta(L-x)$ در رابطه (25) بیان گر تابع دلتای دیراک می‌باشد. با جایگذاری معادلات (23-25) در رابطه (22) معادله حاکم بر جابجایی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&sy''''(x,t)-ky''''''(x,t)+(\rho A+\rho_a)\ddot{y}(x,t)\\&+c_a\dot{y}(x,t)=f_{\mathrm{vdw}}\delta(L-x)-\rho A\ddot{d}(t)\end{aligned} \tag{26}$$

همچنین شرایط مرزی حاکم بر میکروتیر عبارت است از:

$$\begin{aligned}&-k'''''(L,t)+sy'''(L,t)=m_s(\ddot{y}(L,t)+\ddot{d}(t))\\&-sy''(L,t)+ky''''(L,t)=0\\&y(0,t)=y'(0,t)=y'''(0,t)=y''(L,t)=0\end{aligned} \tag{27}$$

شرایط مرزی نشان داده در رابطه (27) ناهمگن می‌باشد. از این‌رو با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر شرایط مرزی را همگن می‌کنیم:

$$y(x,t)=w(x,t)+d(t)g(x) \tag{28}$$

در رابطه (28)، $g(x)$ تابعی دلخواه بوده که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}&g(L)=-1\\&g'''(0)=g'(0)=g(0)=0\\&g'''(L)=g''(L)=0\end{aligned} \tag{29}$$

از این رو روابط (15) و (26) و(27) به‌صورت زیر تبدیل خواهند شد:

$$\begin{aligned}&sw''''(x,t)-kw''''''(x,t)+(\rho A+\rho_a)\ddot{w}(x,t)\\&+c_a\dot{w}(x,t)=f_{\mathrm{vdw}}\delta(L-x)-c_a\dot{d}(t)g(x)\\&-\rho A\ddot{d}(t)-(\rho A+\rho_a)\ddot{d}(t)g(x)\\&+kd(t)g''''''(x)-sd(t)g''''(x)\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&-kw'''''(L,t)+sw'''(L,t)=m_s\ddot{w}(L,t)\\&w(0,t)=w'(0,t)=w'''(0,t)=0\\&w''''(L,t)=w''(L,t)=0\end{aligned} \tag{31}$$

$$f_{\mathrm{vdw}}=\frac{A_2R}{6(z_0-w(L,t))^2}-\frac{A_1R}{180(z_0-w(L,t))^8} \tag{32}$$

[1] Haymaker constant
[2] added mass
[3] Viscous damper
[4] Reynold's number

با اعمال روش گلرکین بر رابطه (30)، معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر حرکت میکروتیر به‌دست می‌آید. برای این منظور تابع جواب به‌صورت رابطه (33) فرض می‌گردد.

$$w(x,t)=\sum_i \varphi_i(x)q_i(t) \tag{33}$$

به‌طوری که $\varphi_i(x)$ بیانگر مجموعه مودهای ارتعاشی بوده که با قرار دادن C_i به‌دست آمده از رابطه (8) و جایگذاری در رابطه (3) به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن تنها شکل مود اول و جایگذاری رابطه (33) در رابطه (30)، معادله حاکم بر حرکت میکروتیر تبدیل به (34) خواهد شد.

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{vdw}}\varphi(L)&=\left(\int_0^L(\rho A+\rho_a)\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)\ddot{q}(t)\\&+\left(\int_0^L c_a\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)\dot{q}(t)\\&+\left(\int_0^L\left(s\varphi''''(x)-k\varphi''''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)q(t)\\&+\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)\ddot{d}(t)\\&+\left(\int_0^L\left(-c_ag(x)\right)\varphi(x)dx\right)\dot{d}(t)\\&-\left(\int_0^L\left(kg''''''(x)-sg''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)d(t)\end{aligned} \tag{34}$$

ضریب $q(t)$ در رابطه (34) با استفاده از شرایط مرزی (31) به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^L\left(s\varphi''''(x)-k\varphi''''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)=\\&\left(s\varphi'''\varphi\Big|_0^L-k\varphi'''''\varphi\Big|_0^L+s\int_0^L(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)\\&=m_s\left(\varphi(L)\right)^2\ddot{q}+\left(\int_0^L s(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)q\end{aligned} \tag{35}$$

با جایگذاری رابطه (35) در رابطه (34) معادله حاکم بر حرکت سیستم به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^L(\rho A+\rho_a)\left(\varphi(x)\right)^2dx+m_s\left(\varphi(L)\right)^2\right)\ddot{q}(t)\\&+\left(\int_0^L c_a\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)\dot{q}(t)\\&+\left(\int_0^L s(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)q(t)\\&+\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)\ddot{d}(t)\\&+\left(\int_0^L\left(-c_ag(x)\right)\varphi(x)dx\right)\dot{d}(t)\\&-\left(\int_0^L\left(kg''''''(x)-sg''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)d(t)\\&=f_{\mathrm{vdw}}\varphi(L)\end{aligned} \tag{36}$$

تغییر متغیر زیر برای جابجایی نوک میکروتیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\zeta(t)=\varphi(L)q(t)+d(t) \tag{37}$$

به‌طوری که با جایگذاری رابطه (37) در رابطه (36) داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2}\ddot{\zeta}+\\&\frac{\left(\int_0^L c_a\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2}\dot{\zeta}+\\&\frac{\left(\int_0^L s(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2}\zeta+\\&\frac{\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)}{\varphi(L)}\ddot{d}(t)+\\&\frac{\left(\int_0^L\left(-c_ag(x)\right)\varphi(x)dx\right)}{\varphi(L)}\dot{d}(t)-\\&\frac{\left(\int_0^L\left(kg''''''(x)-sg''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)}{\varphi(L)}d(t)=f_{\mathrm{vdw}}\end{aligned} \tag{38}$$

از طرفی نیروی واندروالس f_{vdw} به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f_{\mathrm{vdw}}=\frac{A_2R}{6(z_0-\zeta)^2}-\frac{A_1R}{180(z_0-\zeta)^8} \tag{39}$$

از آنجایی که هدف به‌دست آوردن مدل پارامتر محدود[1] میکروتیر به‌صورت "شکل 2" می‌باشد، فرم معادله حاکم بر سیستم به‌صورت زیر خواهد بود.

با توجه به معادلات (38) و (40) خواهیم داشت:

$$m_{\mathrm{eq}}\ddot{\zeta}+b_{\mathrm{eq}}(\dot{\zeta}-\dot{d})+k_{\mathrm{eq}}(\zeta-d)=f_{\mathrm{vdw}} \tag{40}$$

$$\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)=0 \tag{41}$$

$$\frac{\left(\int_0^L c_a\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)}{\varphi(L)}=\left(\int_0^L\left(-c_ag(x)\right)\varphi(x)dx\right)$$

$$\left(\int_0^L\left(kg''''''(x)-sg''''(x)\right)\varphi(x)dx\right)= \tag{42}$$

$$\frac{\left(\int_0^L s(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)}{\varphi(L)} \tag{43}$$

$$m_{\mathrm{eq}}=\frac{\left(\int_0^L\left(\rho A+(\rho A+\rho_a)g(x)\right)\varphi(x)dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2} \tag{44}$$

$$c_{\mathrm{eq}}=\frac{\left(\int_0^L c_a\left(\varphi(x)\right)^2dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2} \tag{45}$$

$$k_{\mathrm{eq}}=\frac{\left(\int_0^L s(\varphi'')^2dx+k\int_0^L(\varphi''')^2dx\right)}{\left(\varphi(L)\right)^2} \tag{46}$$

$d(t)$ در معادلات ارائه شده نشان‌دهنده تحریک اعمال شده بر انتهای ثابت میکروتیر توسط المان پیزوالکتریک بوده که از طریق رابطه (47) نشان

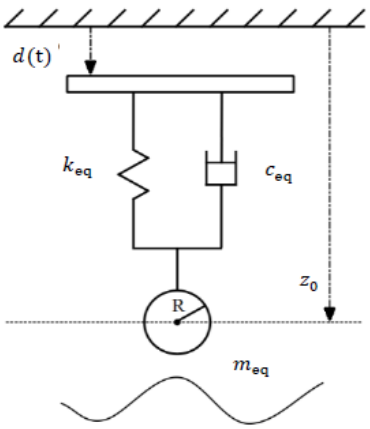


Fig. 2 The equivalent lumped-parameters model of the AFM micro beam.[36]

شکل 2 مدل پارامتر محدود میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی [36]

[1] Lumped parameters model

داده می‌شود.

$$d(\mathrm{t}) = A_{\mathrm{exc}}\sin(\omega_{\mathrm{exc}}t) \tag{47}$$

A_{exc} و ω_{exc} در رابطه (47) به ترتیب نشان‌دهنده دامنه و فرکانس تحریک می‌باشند. برای بررسی رفتار غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی پارامترهای بی‌بعد زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\eta = \frac{\zeta}{L_0}, \tau = \omega_1 t, \Omega = \frac{\omega_{\mathrm{exc}}}{\omega_1}, q = \frac{A_{\mathrm{exc}}}{L_0}, \alpha = \frac{z_0}{L_0},$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{eq}}}{m_{\mathrm{eq}}}}, p = \frac{b_{\mathrm{eq}}}{m_{\mathrm{eq}}\omega_1} \tag{48}$$

به طوری که L_0 برابر است با [8]:

$$L_0 = \frac{3}{2}(D)^{\frac{1}{3}}, D = \frac{A_2 R}{3k_{\mathrm{eq}}} \tag{49}$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد شده (48) رابطه (40) به رابطه (50) تبدیل خواهد شد.

$$\ddot{\eta} + p\dot{\eta} + \eta = \hat{f}_{\mathrm{vdw}} + K\cos(\Omega\tau + \theta) \tag{50}$$

به طوری‌که:

$$K = \sqrt{q^2 + (qp\Omega)^2}, \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{p\Omega}\right) \tag{51}$$

$$\hat{f}_{\mathrm{vdw}} = \frac{h_2}{(\alpha-\eta)^2} - \frac{h_1}{(\alpha-\eta)^8} \tag{52}$$

$$h_2 = \left(\frac{A_2 R}{6L_0 k_{\mathrm{eq}}}\right)\frac{k_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{classic}}}{k_{\mathrm{eq}}}, h_1 = \left(\frac{A_1 R}{180L_0 k_{\mathrm{eq}}}\right)\frac{k_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{classic}}}{k_{\mathrm{eq}}} \tag{53}$$

3-تحلیل پایداری

با حذف ترم تحریک اعمال شده از طریق پیزوالکتریک و همچنین ترم‌های وابسته به زمان در رابطه (50)، معادله استاتیکی حاکم بر میکروتیر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\eta = \frac{h_2}{(\alpha-\eta)^2} - \frac{h_1}{(\alpha-\eta)^8} \tag{54}$$

با حل رابطه‌ی (54) نقاط تعادل میکروتیر به‌دست می‌آید. با توجه به کوچک بودن ترم دافعه نیروی واندروالس در مقایسه با ترم جاذبه، سیستم حداکثر سه نقطه تعادل خواهد داشت. از این رو نسبت به مقادیر h_2 و α پایداری و نقاط تعادل سیستم تغییر می‌کند. برای تحلیل پایداری به‌صورت عددی، نمودار تغییر پارامتر η برحسب h_2 در حالتی که $z_0 = L_0$ می‌باشد در "شکل 3" نشان داده شده است. با توجه به بی‌بعد شدن معادله حاکم بر سیستم مقادیر بزرگتر از $\eta = \alpha$ تعبیر فیزیکی نداشته از این‌رو از آن‌ها صرف‌نظر می‌گردد و اصلاح شده "شکل 3" به صورت "شکل 4" ارائه می‌گردد.

معادله (50) معادله‌ای بی‌بعد بوده و برای هر دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک مشترک می‌باشد. در حالی که مقدار پارامتر بی‌بعد h_2 در تئوری‌های مختلف به ازای پارامتر های فیزیکی یکسان، مقدار متفاوتی دارد. همان‌طور که در "شکل 4" نشان داده شده است سیستم به ازای $h_2 <$ 0.1488 حول نقطه تعادل متناظر با آن نوسان می‌کند.

تابع پتانسیل میکروتیر با حذف ترم‌های وابسته به زمان و در حالتی که تحریک پیزوالکتریک وجود ندارد به‌صورت رابطه (56) به‌دست می‌آید.

$$f(\eta) = \eta - \left(\frac{h_2}{(\alpha-\eta)^2} - \frac{h_1}{(\alpha-\eta)^8}\right) \tag{55}$$

$$F(\eta) = \int f(\eta)\, d\eta \tag{56}$$

"شکل 5" نمودار تابع پتانسیل $F(\eta)$ را به ازای مقادیر مختلف η نشان

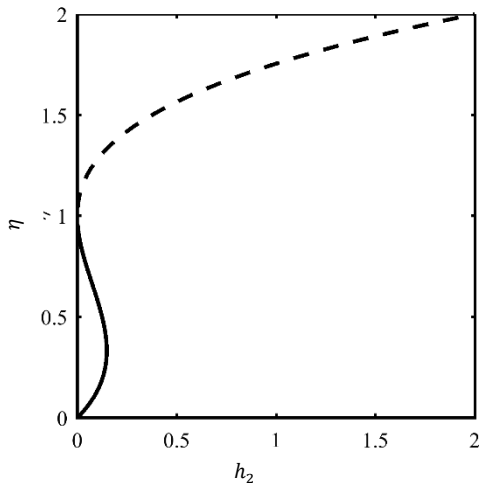


Fig. 3 Bifurcation diagram of equilibrium points according to variation of h_2

شکل 3 نمودار چندشاخگی نقاط تعادل براساس تغییر پارامتر h_2

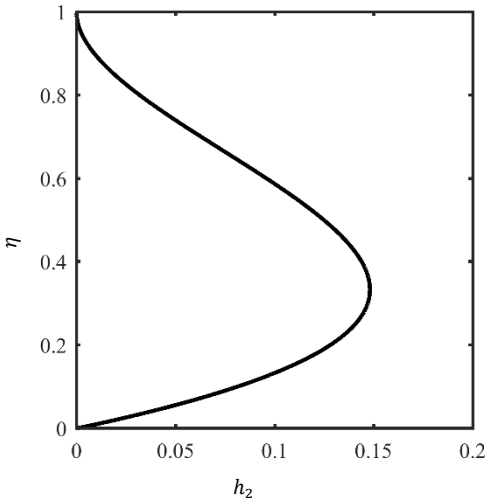


Fig. 4 Corrected bifurcation diagram of equilibrium points according to variation of h_2

شکل 4 نمودار اصلاح شده چندشاخگی نقاط تعادل براساس تغییر پارامتر h_2

می‌دهد. همان‌طور که در "شکل 5" نشان داده شده است نمودار تابع پتانسیل دارای 3 نقطه اکسترمم شامل یک نقطه ماکزیمم و دو نقطه مینیمم می‌باشد.

برای نشان دادن رفتار دینامیکی میکرو تیر حول نقاط تعادل، صفحه فاز سیستم در "شکل 6" رسم شده است. برای این منظور با حذف ترم تحریک از رابطه (50) معادله حرکت میکروتیر به صورت رابطه (57) نوشته می‌شود.

$$\ddot{\eta} + p\dot{\eta} + f(\eta) = 0 \tag{57}$$

با در نظر گرفتن متغیرهای حالت $x = \eta$ و $y = \dot{\eta}$ معادله فضای حالت سیستم به صورت رابطه (58) به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -py - \left(\frac{h_2}{(\alpha-x)^2} - \frac{h_1}{(\alpha-x)^8}\right)\end{bmatrix} \tag{58}$$

به طوری که با حل رابطه (58) به ازای یک دسته شرایط اولیه، صفحه فاز میکرو تیر مطابق "شکل 6" به‌دست می‌آید. در "شکل 6"، نقاط C و A از نوع نقطه تعادل مارپیچ[1] پایدار بوده و نقطه B نقطه تعادل زینی[1] را نشان

[1] focus point

می‌دهد. از آن‌جایی که دامنه نقطه C در مقایسه با نقطه A زیاد می‌باشد مفهوم فیزیکی ندارد. از این رو نقطه تعادل استاتیکی میکروتیر نقطه A می‌باشد.

4- تحلیل دینامیک غیرخطی

برای تحلیل دینامیک غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی روش‌های متعددی نظیر رویکرد انحراف جزئی [37] و روش‌های عددی ترکیبی[2] [38] توسط محققان انجام گرفته است. در این قسمت معادله غیرخطی حاکم بر حرکت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی با استفاده از رویکرد انحراف جزئی و با استفاده از روش مقیاس چندگانه حل می‌گردد.

نقطه تعادل استاتیکی میکروتیر با حذف ترم تحریک و پارامترهای وابسته به زمان از طریق حل معادله (59) به‌دست می‌آید.

$$\eta_1 - \frac{h_2}{(\alpha-\eta_1)^2} + \frac{h_1}{(\alpha-\eta_1)^8} = 0 \tag{59}$$

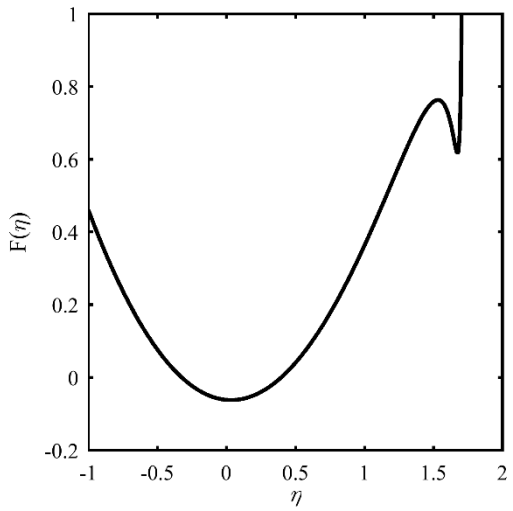


Fig. 5 The potential function of nonlinear governing equation of atomic force microscope micro beam

شکل 5 تابع پتانسیل معادله غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی

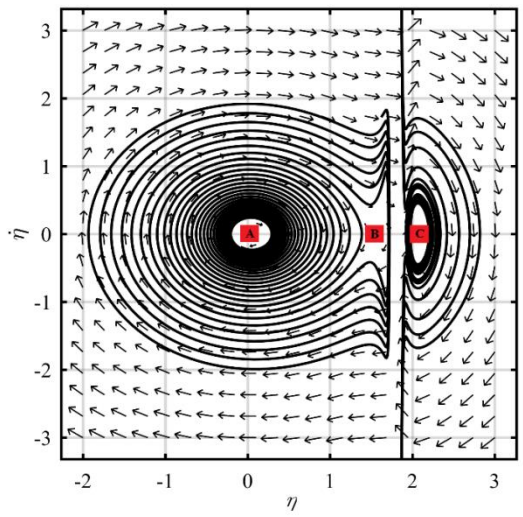


Fig. 6 Phase plane diagram of micro beam

شکل 6 نمودار صفحه فاز میکرو تیر

[1] Saddle point
[2] hybrid numerical methods

به‌طوری که η_1 نشان‌دهنده نقطه تعادل میکروتیر می‌باشد. نیروی غیرخطی واندروالس حول نقطه تعادل اول η_{11}، با استفاده از بسط تیلور به رابطه (60) تبدیل می‌گردد.

$$\frac{h_2}{(\alpha-\eta)^2} - \frac{h_1}{(\alpha-\eta)^8} = \eta_{11} + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 \tag{60}$$

$$\beta_1 = \frac{2h_2}{(\alpha-\eta_{11})^3} - \frac{8h_1}{(\alpha-\eta_{11})^9} \tag{61}$$

$$\beta_2 = \frac{3h_2}{(\alpha-\eta_{11})^4} - \frac{36h_1}{(\alpha-\eta_{11})^{10}} \tag{62}$$

$$\beta_3 = \frac{4h_2}{(\alpha-\eta_{11})^5} - \frac{120h_1}{(\alpha-\eta_{11})^{11}} \tag{63}$$

به‌طوری در معادله (60)، $y = \eta - \eta_{11}$ می‌باشد. با جای‌گذاری رابطه (60) و همچنین تغییر متغیر y در رابطه (50) معادله حاکم بر حرکت میکروتیر به صورت رابطه (64) بیان می‌گردد.

$$\ddot{y} + p\dot{y} + (\omega_{\text{new}})^2 y = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + K\cos(\Omega\tau + \theta) \tag{64}$$

به طوری که $\omega_{\text{new}} = \sqrt{1-\beta_1}$ می‌باشد. برای حل معادله (64) با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای $k = \varepsilon^3\hat{k}$، $p = 2\varepsilon^2\hat{p}$ و $y = \varepsilon u$ و جایگذاری آن‌ها در معادله (64)، رابطه (65) حاصل می‌گردد.

$$\ddot{u} + 2\varepsilon^2\hat{p}\dot{u} + (\omega_{\text{new}})^2 u = \beta_2\varepsilon u^2 + \beta_3\varepsilon^2 u^3 + \varepsilon^2\hat{k}\cos(\Omega\tau + \theta) \tag{65}$$

با توجه به روش مقیاس چندگانه متغیرهای زیر در نظر گرفته شود [37].

$$T_n = \varepsilon^n\tau, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{66}$$

مشتق نسبت به τ با در نظر گرفتن روابط (67) و (68) به مشتق نسبت به T تبدیل می‌گردد.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots, \tag{67}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\left({D_1}^2 + 2D_0 D_2\right) + \cdots, \tag{68}$$

به‌طوری که $D_n = \partial/\partial T_n$ می‌باشد. حل معادله (65) به‌صورت رابطه (69) به‌دست می‌آید به‌طوری که ترم تحریک $O(\varepsilon^2)$ می‌باشد.

$$u(\tau,\varepsilon) = u_0(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon u_1(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0,T_1,T_2) \tag{69}$$

با توجه به این‌که $\Omega - \omega_{\text{new}}$ در $O(\varepsilon^2)$ قرار دارد برای فرکانس اولیه داریم که:

$$\Omega = \omega_{\text{new}} + \varepsilon^2\sigma \tag{70}$$

در این رابطه σ پارامتر انحراف تشدید[3] نامیده می‌شود و مقدار اختلاف بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی خطی سیستم مربوطه را نشان می‌دهد. با توجه به رابطه (66)، $\Omega\tau$ به صورت رابطه (71) قابل بیان است.

$$\Omega\tau = \omega_{\text{new}}\tau + \varepsilon^2\sigma\tau = \omega_{\text{new}}T_0 + \sigma T_2 \tag{71}$$

با جایگذاری روابط (69) و (71) در رابطه (65) و جداسازی ضرایب توان‌های مختلف ε معادلات زیر به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon^0 \rightarrow {D_0}^2 u_0 + u_0 {\omega_{\text{new}}}^2 = 0 \tag{72}$$

$$\varepsilon^1 \rightarrow 2D_0 D_1 u_0 + {D_0}^2 u_1 - {u_0}^2\beta_2 + u_1 {\omega_{\text{new}}}^2 = 0 \tag{73}$$

$$\varepsilon^2 \rightarrow -\hat{k}\cos(\sigma T_2 + T_0\omega_{\text{new}}) + 2\hat{p}D_0 u_0 + {D_1}^2 u_0 + 2D_0 D_2 u_0 + 2D_0 D_1 u_1 + {D_0}^2 u_0 - 2u_0 u_1\beta_2 - {u_0}^3\beta_3 + u_2 {\omega_{\text{new}}}^2 = 0 \tag{74}$$

به طوری که جواب رابطه (72) برابر خواهد بود با:

$$u_0 = e^{iT_0\omega_{\text{new}}}A(T_1,T_2) + e^{-iT_0\omega_{\text{new}}}\bar{A}(T_1,T_2) \tag{75}$$

[3] Detuning parameter

$\bar{A}$ بیانگر مزدوج مختلط A می‌باشد. با جایگذاری رابطه (75) در رابطه (73) داریم که:

$$\left(D_0{}^2+\omega_{\text{new}}{}^2\right)u_1=-2i\omega_{\text{new}}D_1A(T_1,T_2)e^{iT_0\omega_{\text{new}}}+\beta_2\left\{A^2(T_1,T_2)e^{2iT_0\omega_{\text{new}}}+A(T_1,T_2)\bar{A}(T_1,T_2)\right\}+CC \tag{76}$$

CC در رابطه (76) بیانگرمزدوج مختلط می‌باشد. ترم زمان‌رو[1] از رابطه (76) به صورت زیر حذف می‌گردد.

$$D_1A=0\rightarrow A=A(T_2) \tag{77}$$

از این رو جواب خصوصی رابطه (76) با حذف ترم زمان‌رو به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_1=\frac{\beta_2}{\omega_{\text{new}}{}^2}A\bar{A}-\frac{\beta_2A^2}{3\omega_{\text{new}}{}^2}e^{2iT_0\omega_{\text{new}}}+cc \tag{78}$$

با جایگذاری u_1 و u_0 در رابطه‌ی (74) داریم:

$$\left(D_0{}^2+\omega_{\text{new}}{}^2\right)u_2=-\left\{2i\omega_{\text{new}}(A'+\hat{p}A)+\left(3\beta_3+\frac{10\beta_2{}^2}{3\omega_{\text{new}}{}^2}\right)A^2\bar{A}-\frac{\hat{k}e^{i(\sigma T_2+\theta)}}{2}\right\}+\text{CC}+\text{NST} \tag{79}$$

NST در رابطه (79) بیانگر ترم‌های غیر زمان‌رو می‌باشد. همچنین $(.)'$ در رابطه (79) بیانگر مشتق نسبت به T_2 است. برای حذف ترم زمان‌رو از رابطه (79) عبارت زیر باید برابر صفر گردد:

$$2i\omega_{\text{new}}(A'+\hat{p}A)+\left(3\beta_3+\frac{10\beta_2{}^2}{3\omega_{\text{new}}{}^2}\right)A^2\bar{A}-\frac{\hat{k}e^{i(\sigma T_2+\theta)}}{2} \tag{80}$$

پارامتر A در فرم قطبی به صورت زیر در نظر گرفته می‌گردد:

$$A=\frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)} \tag{81}$$

به‌طوری که a و β اعداد حقیقی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (81) در رابطه (80) و برابر صفر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی آن، روابط زیر ایجاد می‌گردد:

$$a'=-\hat{p}a+\frac{\hat{k}}{2\omega_{\text{new}}}\sin(\sigma T_2-\tilde{\beta}) \tag{82}$$

$$a\beta'=-\frac{9\beta_3\omega_{\text{new}}{}^2+10\beta_3{}^2}{24\omega_{\text{new}}{}^3}a^3-\frac{\hat{k}\cos(\sigma T_2-\tilde{\beta})}{2\omega_{\text{new}}} \tag{83}$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\gamma=\sigma T_2-\tilde{\beta}$ معادلات (82) و (83) به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$a'=-\hat{p}a+\frac{\hat{k}}{2\omega_{\text{new}}}\sin(\gamma) \tag{84}$$

$$a\gamma'=a\sigma+\frac{9\beta_3\omega_{\text{new}}{}^2+10\beta_3{}^2}{24\omega_{\text{new}}{}^3}a^3+\frac{\hat{k}\cos(\gamma)}{2\omega_{\text{new}}} \tag{85}$$

با در نظر گرفتن شرایط حالت ماندگار، $\beta'=a'=0$ خواهند بود. به طوری که معادلات (84) و (85) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\hat{p}a=\frac{\hat{k}}{2\omega_{\text{new}}}\sin(\gamma) \tag{86}$$

$$-\left(a\sigma+\frac{9\beta_3\omega_{\text{new}}{}^2+10\beta_3{}^2}{24\omega_{\text{new}}{}^3}a^3\right)=\frac{\hat{k}\cos(\gamma)}{2\omega_{\text{new}}} \tag{87}$$

و در نهایت با توجه به دو معادله فوق معادله زیر حاصل خواهد شد.

$$\left(\sigma+\frac{9\beta_3\omega_{\text{new}}{}^2+10\beta_3{}^2}{24\omega_{\text{new}}{}^3}a^2\right)^2+\hat{p}^2=\left(\frac{\hat{k}}{2\omega_{\text{new}}}\right)^2 \tag{88}$$

[1] Secular

معادله (88) پاسخ فرکانسی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی را در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه نشان می‌دهد. این معادله به دامنه ارتعاشات، دامنه تحریک و پارامتر انحراف تشدید وابسته است. در این بخش جهت بررسی تاثیر پارامترهای هندسی و همچنین اثر اندازه در رفتار دینامیک غیرخطی میکروتیر، نمودار دامنه و فاز پاسخ با استفاده از مقادیر جدول 1 ارائه می‌گردد.

با افزایش ضخامت میکروتیر در سیال‌های ارائه شده در جدول 2 [30]، دامنه پاسخ سیستم کاهش یافته و نمودار فاز پاسخ به سمت چپ متمایل می‌گردد. رفتار میکروتیر در سیال‌های با لزجت متفاوت فرق دارد به این صورت که با کاهش لزجت دامنه ارتعاش سیستم افزایش می‌یابد. همان‌طور که از نمودارهای ارائه شده در "شکل‌های 7-10" مشخص است به ازای فرکانس و دامنه تحریک ثابت، دامنه ارتعاش در بوتانول به‌دلیل دارا بودن کمترین لزجت بیشترین بوده و به‌ترتیب این دامنه به ازای قرار گرفتن در استون، آب و تتراکلوریدکربن کاهش می‌یابد.

در نمودارهای "اشکال 7-10" با افزایش نسبت h/l، رفتار میکروتیر مدل شده براساس تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی به رفتار تئوری تنش کوپل بهبودیافته ($h/l=\infty$) نزدیک می‌گردد به طوری که می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضخامت میکروتیر تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک بر هم منطبق می‌گردند. از این‌رو تئوری گرادیان کرنشی تاثیر اثر اندازه را در رفتار دینامیکی سیستم‌های با ابعاد نانو و میکرو نسبت به تنش کوپل بهبود یافته و همچنین تئوری کلاسیک بهتر نمایش می‌دهد.

جدول 1 مشخصات میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی

Table 1 Specifications of the AFM micro beam

17.6 μm	$\boldsymbol{h}$
352 μm	$\boldsymbol{L}$
35.2 μm	$\boldsymbol{b}$
1.44 GPa	$\boldsymbol{E}$
17.6 μm	$\boldsymbol{l}$
17.7×10^{-13}kg	$\mathbf{m_t}$
15 nm	$\boldsymbol{z_0}$
521.7 MPa	$\boldsymbol{\mu}$
2330 kg/m^3	$\boldsymbol{\rho}$
17.6 μm	$\boldsymbol{l_0=l_1=l_2}$
1.3596×10^{-70} Jm^6	$\boldsymbol{A_1}$
1.865×10^{-19} J	$\boldsymbol{A_2}$

جدول 2 مشخصات سیال‌های بررسی شده در پژوهش

Table 2 The properties of considered liquids in this study

آب	چگالی	997kg/m^3
	لزجت	8.59×10^{-4}kg/ms
	فرکانس	5.04kHz
استون	چگالی	785kg/m^3
	لزجت	3.08×10^{-4}kg/ms
	فرکانس	6.35kHz
تتراکلرید کربن	چگالی	590kg/m^3
	لزجت	8.79×10^{-4}kg/ms
	فرکانس	4.22kHz
بوتانول	چگالی	850kg/m^3
	لزجت	2.47×10^{-4}kg/ms
	فرکانس	3.93kHz

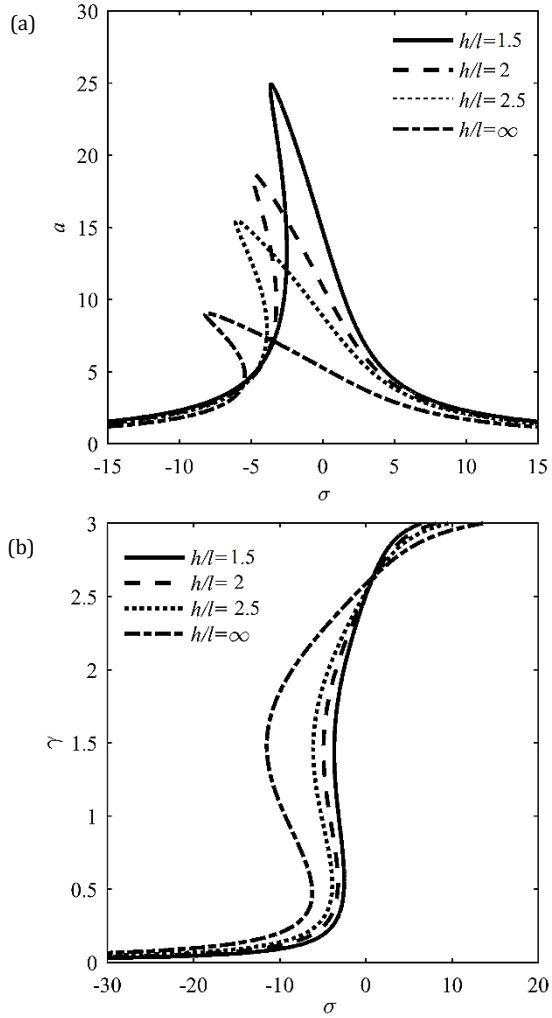
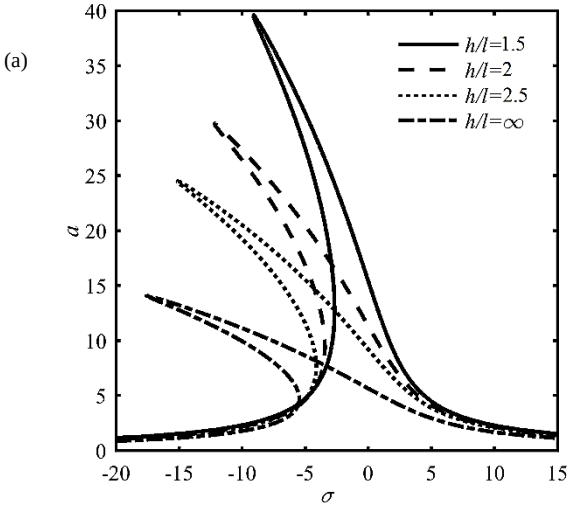


Fig. 7 The frequency-response of the micro-beam in water: (a) amplitude of response (b) phase of response

شکل 7 پاسخ فرکانسی میکروتیر در آب: (a) دامنه پاسخ (b) فاز پاسخ

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی درون آب، استون، تتراکلوریدکربن و بوتانول بررسی شده است. انتهای ثابت میکروتیر توسط المان پیزوالکتریک به‌صورت هارمونیک تحریک شده و نیروی غیرخطی



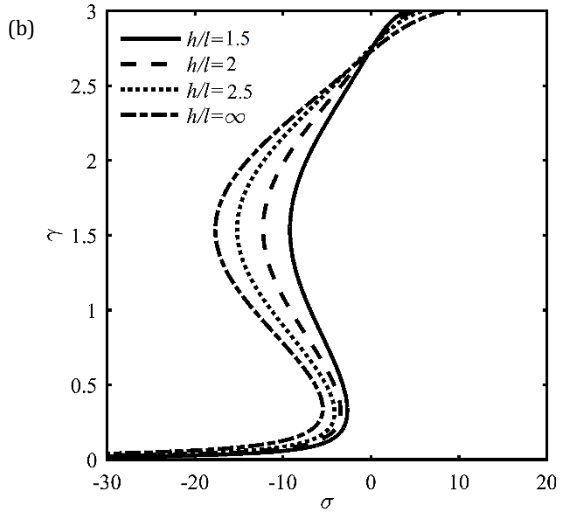


Fig. 8 The frequency-response of the micro-beam in acetone: (a) amplitude of response (b) phase of response

شکل 8 پاسخ فرکانسی میکروتیر در استون: (a) دامنه پاسخ (b) فاز پاسخ

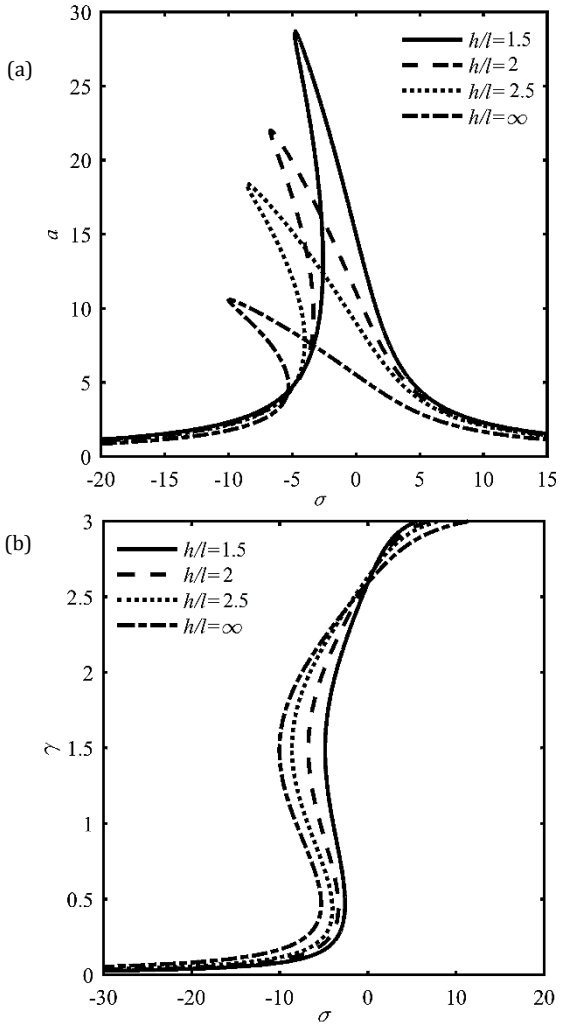


Fig. 9 The frequency-response of the micro-beam in CCL_4: (a) amplitude of response (b) phase of response

شکل 9 پاسخ فرکانسی میکروتیر در CCL_4 (a) دامنه پاسخ (b) فاز پاسخ

واندروالس بین نوک پروب و نمونه اعمال شده است. در گام اول شکل مود و فرکانس طبیعی میکروتیر براساس روش ریلی-ریتز به‌دست آمده است. در

[2] K. Holmberg, A. Mathews, Coatings tribology: A concept, critical aspects and future directions, *Thin Solid Films*, Vol. 253, No. 1-2, pp. 173-178, 1994.
[3] H. Liu, B. Bhushan, Nanotribological characterization of digital micromirror devices using an atomic force microscope, *Ultramicroscopy*, Vol. 100, No. 3, pp. 391-412, 2004.
[4] P. E. Mazeran, J. L. Loubet, Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: Implication in quantitative elastic and friction imaging, *Tribology Letters*, Vol. 7, No. 4, pp. 199-212, 1999.
[5] W. J. Chang, T. H. Fang, C. I. Weng, Inverse determination of the cutting force on nanoscale processing using atomic force microscopy, *Nanotechnology*, Vol. 15, No. 5, pp. 427, 2004.
[6] Z. J. Davis, G. Abadal, O. Hansen, X. Borise, N. Barniol, F. Perez-Murano, A. Boisen, AFM lithography of aluminum for fabrication of nanomechanical systems, *Ultramicroscopy*, Vol. 97, No. 1, pp. 467-472, 2003.
[7] T. H. Fang, W. J. Chang, Effects of AFM-based nanomachining process on aluminum surface, *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, Vol. 64, No. 6, pp. 913-918, 2003.
[8] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, pp. 330-334, Berlin: Springer, 2011.
[9] D. Rugar, P. Hansma, Atomic force microscopy, *Physics Today*, Vol. 43, No. 10, pp. 23-30, 1990.
[10] Q. Zhong, D. Inniss, K. Kjoller, V. Elings, Fractured polymer/silica fiber surface studied by tapping mode atomic force microscopy, *Surface Science*, Vol. 290, No. 1-2, pp. L688-L692, 1993.
[11] Y. Martin, C. Williams, H. K. Wickramasinghe, Atomic force microscope–force mapping and profiling on a sub 100-Å scale, *Journal of Applied Physics*, Vol. 61, No. 10, pp. 4723-4729, 1987.
[12] B. Drake, C. Prater, A. Weisenhorn, S. Gould, T. Albrecht, Imaging crystals, polymers, and processes in water with the atomic force microscope, *Science*, Vol. 243, No. 4898, pp. 1586, 1989.
[13] F. O. Goodman, N. Garcia, Roles of the attractive and repulsive forces in atomic-force microscopy, *Physical Review B*, Vol. 43, No. 6, pp. 4728, 1991.
[14] H. Hansma, J. Vesenka, Reproducible imaging and dissection of plasmid DNA under liquid with the atomic force microscope, *Science*, Vol. 256, No. 5060, pp. 1180, 1992.
[15] C. A. Putman, K. O. Van der Werf, B. G. De Grooth, N. F. Van Hulst, J. Greve, Tapping mode atomic force microscopy in liquid, *Applied Physics Letters*, Vol. 64, No. 18, pp. 2454-2456, 1994.
[16] U. Rabe, K. Janser, W. Arnold, Vibrations of free and surface-coupled atomic force microscope cantilevers: Theory and experiment, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 67, No. 9, pp. 3281-3293, 1996.
[17] H. J. Butt, M. Jaschke, Calculation of thermal noise in atomic force microscopy, *Nanotechnology*, Vol. 6, No. 1, pp. 1, 1995.
[18] R. Arinero, G. Lévêque, Vibration of the cantilever in force modulation microscopy analysis by a finite element model, *Review Of Scientific Instruments*, Vol. 74, No. 1, pp. 104-111, 2003.
[19] A. W. McFarland, J. S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1060, 2005.
[20] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
[21] R. Vatankhah, M. Kahrobaiyan, A. Alasty, M. Ahmadian, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18, pp. 8363-8382, 2013.
[22] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
[23] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 11, pp. 1256-1267, 2011.
[24] M. Abbasi, A. K. Mohammadi, Study of the sensitivity and resonant frequency of the flexural modes of an atomic force microscopy microcantilever modeled by strain gradient elasticity theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 228, No. 8, pp. 1299-1310, 2014.
[25] M. Abbasi, Size dependent vibration behavior of an AFM with sidewall and top-surface probes based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 03, pp. 1550046, 2015.
[26] G. Dai, H. Wolff, T. Weimann, M. Xu, F. Pohlenz, H. U. Danzebrink, Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano-and micro-structures, *Measurement science and Technology*, Vol. 18, No. 2, pp. 334, 2007.
[27] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1985-1994, 2010.
[28] A. F. Payam, Sensitivity of flexural vibration mode of the rectangular atomic force microscope micro cantilevers in liquid to the surface stiffness variations, *Ultramicroscopy*, Vol. 135, pp. 84-88, 2013.
[29] M. Korayem, M. Damircheli, The effect of fluid properties and geometrical parameters of cantilever on the frequency response of atomic force microscopy, *Precision Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 321-329, 2014.
[30] H. L. Lee, W. J. Chang, Sensitivity analysis of rectangular atomic force microscope cantilevers immersed in liquids based on the modified couple stress theory, *Micron*, Vol. 80, pp. 1-5, 2016.

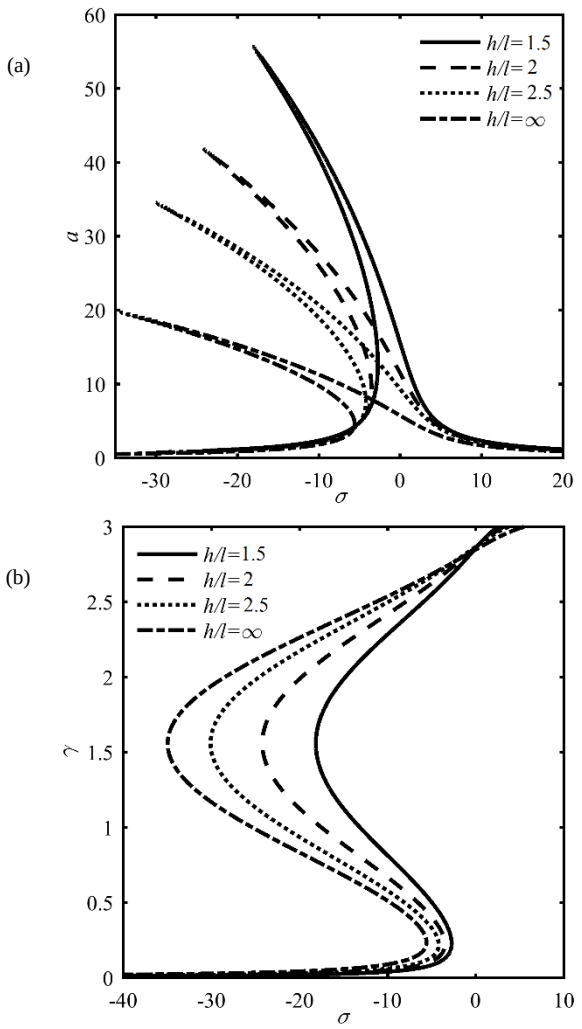


Fig. 10 The frequency-response of the micro-beam in butanol: (a) amplitude of response (b) phase of response

شکل 10 پاسخ فرکانسی میکروتیر در بوتانول: (a) دامنه پاسخ (b) فاز پاسخ

گام دوم مدل حاکم بر حرکت میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنشی و اویلر-برنولی و با استفاده از اصل همیلتون به‌دست آمده است. مدل به‌دست آمده از حرکت میکروتیر به صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بوده که با اعمال روش گلرکین معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر آن به‌دست آمده است. در گام سوم پایداری و صفحه فاز سیستم به ازای شرایط مختلف بررسی شده است و نشان داده شده که پارامتر h_2 وابسته به پارامتر اندازه میکروتیر بوده و در تئوری‌های مختلف مقدار متفاوتی دارد. در گام آخر معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر حرکت میکروتیر با رویکرد انحراف جزئی و با استفاده از روش مقیاس چندگانه حل شده و نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت میکروتیر و همچنین لزجت سیال دامنه پدیده جهش در تمام سیال های بررسی شده کاهش یافته است. همچنین فاز پاسخ نیز با افزایش ضخامت میکروتیر به سمت چپ متمایل شده است. با توجه به نمودارهای به‌دست آمده از دامنه و فاز پاسخ می‌توان نتیجه گرفت که تئوری گرادیان کرنشی با در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طولی l_0 و l_1 و l_2 دقت بیشتری نسبت به تئوری تنش کوپل بهبود یافته دارد به‌طوری که هرچه که ضخامت میکروتیر بیشتر گردد این دو تئوری به هم نزدیک خواهند شد.

6- مراجع

[1] G. Binnig, C. F. Quate, C. Gerber, Atomic force microscope, *Physical Review Letters*, Vol. 56, No. 9, pp. 930, 1986.

[31] W. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*: CRC Press, 1996.
[32] M. Dadfarnia, N. Jalili, D. M. Dawson, A fresh insight into the microcantilever-sample interaction problem in non-contact atomic force microscopy, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control(Transactions of the ASME)*, Vol. 126, No. 2, pp. 327-335, 2004.
[33] R. Vatankhah, Nonlinear vibration of AFM microcantilevers with sidewall probe, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, https://doi.org/10.1007/s40430-017+.823-8, pp. 1-14, 2017.
[34] J. E. Sader, Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope, *Journal of Applied Physics*, Vol. 84, No. 1, pp. 64-76, 1998.
[35] A. Maali, C. Hurth, R. Boisgard, C. Jai, T. Cohen-Bouhacina, J.-P. Aimé, Hydrodynamics of oscillating atomic force microscopy cantilevers in viscous fluids, *Journal of Applied Physics*, Vol. 97, No. 7, pp. 074907, 2005.
[36] M. Kahrobaiyan, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, Nonlinear dynamic analysis of a V-shaped microcantilever of an atomic force microscope, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 12, pp. 5903-5919, 2011.
[37] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*: John Wiley & Sons, pp. 56-59, 2008.
[38] C. C. Wang, Application of a hybrid numerical method to the nonlinear dynamic analysis of a micro gas bearing system, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 59, No. 4, pp. 695-710, 2010.