



ردیابی مسیر زمانی برای ربات ترکتور-تریلر به روش کنترل پیش بین

ارسلان بابایی رباط¹، خلیل عالی پور^{2*}، بهرام تارویردی زاده²، نفیسه محمدیان افتح¹

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکاترونیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 1439957131، k.alipour@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 مرداد 1396

پذیرش: 13 مهر 1396

ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:

ترکتور-تریلر

غیرهولونومیک

کنترل پیش بین

ردیابی مسیر زمانی

تناسبی-انتگرال گیر-مشتق گیر

چکیده

سیستم ترکتور-تریلر یک ربات پایه متحرک چرخدار متشکل از یک واحد چرخدار مجهز به عملگر به نام ترکتور و یک یا چند واحد چرخدار دیگر به نام تریلر است که به وسیله یک پین غیرفعال به هم متصل شده اند. در این مقاله فرض بر این است که رانش سیستم بر عهده ترکتور است و تریلر غیرفعال می باشد. در این پژوهش به مدل سازی در سطح سینماتیک پرداخته شده است؛ بنابراین سرعت خطی تریلر و سرعت زاویه ای ترکتور ورودی های سیستم فرض شده است. به دلیل فرض غلش خالص در چرخ ها با یک سیستم غیرخطی تحت قیود غیرهولونومیک روبه رو هستیم. در این مقاله برای اولین بار کنترل پیش بین جهت کنترل حرکت ترکتور-تریلر به کار برده شده است و هدف ردیابی مسیر زمانی تریلر خواهد بود. پس از استخراج مدل سینماتیکی ترکتور-تریلر یک مسیر هندسی قابل حصول به عنوان مسیر مرجع فرض می شود با خطی سازی معادلات سیستم حول مسیر مرجع و استفاده از روش کنترل پیش بین مدل مینا که بر پایه کنترل بهینه استوار است، یک قانون کنترلی برای تعقیب مسیر هندسی مرجع پیشنهاد می شود که همواره تابع هدف تعریف شده را کمینه می کند. با در نظر گرفتن اشباع عملگری در ورودی های سیستم، یک مسأله بهینه سازی مفید به صورت عددی حل خواهد شد. کنترل طراحی شده در این مقاله با کنترلر مرسوم و متداول تناسبی-انتگرال گیر-مشتق گیر مقایسه و کارایی بهتر آن نشان داده خواهد شد. در پایان صحت و قوام کنترل طراحی شده نسبت به اغتشاش و نامعینی در پارامترها با شبیه سازی سیستم در نرم افزار متلب تصدیق خواهد شد.

Trajectory tracking of a tractor-trailer robot using model predictive control

Arsalan Babaei Robat¹, Khalil Alipour^{2*}, Bahram Tarvirdizadeh², Nafiseh Mohammadian Aftah¹

1- Aerospace Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

2- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 1439957131 Tehran, Iran, k.alipour@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 30 July 2017

Accepted 05 October 2017

Available Online 18 November 2017

Keywords:

Tractor-Trailer

Nonholonomic

Model Predictive Control

Trajectory Tracking

PID

ABSTRACT

The tractor-trailer system is a wheeled mobile robot (WMR), including one wheeled unit named tractor that is equipped with actuators and one or some wheeled units named trailer that are connected to each other with a passive joint. In this paper, it is assumed that the system locomotion is by tractor, and trailer is completely passive. In this paper, we develop the kinematic model of tractor-trailer; so the inputs of system are supposed to be tractor angular velocity and trailer linear velocity. Because of pure rolling condition between wheel and ground surface, we encounter a nonholonomic system. In this paper Model Predictive Control (MPC) is used in control designing of Tractor-Trailer for the first time and the goal is trajectory tracking of trailer position. First, the kinematic equations of tractor-trailer are developed. Then a feasible reference geometrical path is considered. After linearizing the system equations around reference path and using MPC that is an optimal control based method, a tracking controller is designed that minimizes a predefined cost function. Considering actuator saturation in system inputs, we solve a constrained optimization problem using numerical methods. The controller designed in this paper, will be compared against classic controller PID and its better performance is presented. Finally, the effectiveness and robustness of controller against disturbances and parameter uncertainties is proved using MATLAB software results.

1- مقدمه

مناسبی برای استفاده از آن در سیستم های رباتیکی است. امروزه استفاده از ربات های پایه متحرک چرخدار¹ در خط تولید ماشین سازی های بزرگ، امری رایج و مشهود است. این ربات ها سهم عمده ای نیز در اکتشافات فضایی دارند و بودجه های زیادی برای استفاده از این ربات ها در مأموریت های فضایی هزینه می شود. کاربردهای این ربات ها و نیاز به هوشمندسازی و قدرتمند کردن آن انگیزه ای برای کارهای پژوهشی در این زمینه است. در سال های

ربات های پایه متحرک امروزه نقش مهم و روبه افزایشی در زندگی بشر دارند. این ربات ها به طور فزاینده ای در صنعت، ربات های خدمت رسان، ربات های مورد استفاده در منازل (جاروها، ماشین های چمن زنی)، در کاربردهای با دسترسی سخت و خطرناک (فضا، کارهای نظامی، تمیز کردن زباله های هسته ای) و همچنین برای سرگرمی (نبردهای رباتیکی، ربات های فوتبال لیست) مورد استفاده واقع شده اند [1]. سادگی مکانیزم چرخ دلیل

¹ Wheeled mobile robot

Please cite this article using:

A. Babaei Robat, Kh. Alipour, B. Tarvirdizadeh, N. Mohammadian Aftah, Trajectory tracking of a tractor-trailer robot using model predictive control, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 210-218, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

با نتایج شبیه‌سازی کنترلر پیشنهادی ارائه شده است. در مرجع [10] ضمن معرفی سیستم ربات ترک‌تور - تریلر، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ربات با فرض قیود غیرهولونومیک و شرط عدم لغزش در چرخ‌ها استخراج می‌شود؛ سپس برای رديابی مسیر زمانی مجاز یک کنترلر سینماتیکی لیاپانوف-مبنا طراحی می‌شود. پس از آن یک کنترلر دینامیکی را به نحوی طراحی می‌کند تا ورودی سینماتیکی، قانون کنترلر طراحی شده در مرحله قبل را رديابی کند. در سیستم‌های دینامیکی وجود اغتشاشات و نامعینی‌ها عملکرد مدل‌سازی و کنترل را کاهش می‌دهد. کنترل تطبیقی مقاوم سیستم ترک‌تور - تریلر با در نظر گرفتن نامعینی‌ها و اغتشاشات محدود در [11,10] پرداخته شده است. کنترل بهینه نیز منطقی است که در طراحی کنترلر بسیاری از سیستم‌های مکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است. حل مسأله کنترلر در منطق کنترلر بهینه با کمینه کردن یک تابع هدف⁸ حاصل می‌شود. مرجع [12] با استفاده از کنترلر بهینه به مسأله طراحی مسیر زمانی بهینه برای یک بازوی رباتیکی پایه متحرک حمل بار سنگین پرداخته است. نویسندگان در این مقاله با روش‌های عددی یک مسأله بهینه‌سازی با شرایط مرزی مشخص را حل کرده و مسیر زمانی بهینه و پایدار را برای زوایای مفصلی و حرکت پایه ربات استخراج کرده‌اند. کنترلر پیش‌بین⁹ یکی از روش‌های کنترلر بر پایه منطق کنترلر بهینه است که در هر گام زمانی پیش‌بینی از وضعیت سیستم در چند گام زمانی آینده صورت می‌گیرد. ورودی‌های کنترلر براساس این پیش‌بینی به گونه‌ای استخراج می‌شوند که تابع هدف در گام‌های زمانی پیش‌بینی شده آینده کمینه شود [13]. کنترلر پیش‌بین در سال‌های اخیر پاسخ‌گوی بسیاری از مدل‌های واقعی بوده است [14]. مصداق این منطق در [14,1] انجام شده است که با تعریف یک تابع مربعی¹⁰ از خطای حالت‌ها و تلاش کنترلر و نیز فرض اشباع ورودی‌های سیستم، یک قانون کنترلر برای رديابی مسیر زمانی یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی طراحی می‌شود. سالمون و همکاران یک مدل سینماتیکی ساده از ربات ترک‌تور - تریلر با تریلر رانش فرمانی به همراه یک کنترلر پیش‌بین غیرخطی ارائه دادند. در مدل ارائه شده سرعت ربات یک مقدار ثابت و زاویه فرمان تریلر به عنوان ورودی سیستم فرض شده است [15]. کایاسیان و همکاران یک مدل سینماتیکی برای سیستم ترک‌تور - تریلر با هر دو پلتفرم رانش فرمانی با کاربردهای کشاورزی را در نظر گرفته و به خطی‌سازی آن حول مسیر زمانی پرداخته و در نهایت یک مدل خطی از خطای سیستم به دست آوردند. پس از آن با استفاده از روش کنترلر پیش‌بین خطی یک قانون کنترلر بهینه برای پایدار کردن تابع خطا در صفر پیشنهاد کردند. آن‌ها با طراحی و اضافه کردن دو ورودی پیشخور و مقاوم به سیگنال کنترلر، قوام کنترلر پیشنهادی را ارتقا دادند [16]. یکی دیگر از کارهای اخیر روی سیستم ترک‌تور - تریلر با استفاده از کنترلر پیش‌بین مرجع [17] است. نویسندگان یک مدل سینماتیکی برای ربات ترک‌تور - تریلر با فرض رانش فرمانی بودن ترک‌تور و نیز زاویه فرمان ترک‌تور به عنوان تنها ورودی سیستم ارائه کرده و سپس با خطی‌سازی سیستم براساس برخی فرضیات ساده‌کننده قانون کنترلر پیش‌بین را بر آن اعمال کرده‌اند. یکی از ضعف‌های این پژوهش این است که تنها جهت‌گیری تریلر و مؤلفه عرضی موقعیت تریلر در تابع هزینه لحاظ شده است؛ بنابراین کنترلر قادر به کاهش خطای طولی موقعیت تریلر نخواهد بود. ضعف دیگر این مقاله کوچک فرض کردن برخی مقادیر زاویه‌ای در مدل سیستم برای خطی‌سازی است و طبیعی

آخر تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. مدل‌سازی‌های مختلفی برای ربات‌های پایه‌متحرک انجام شده است و متناسب با مدل‌های ارائه شده، روش‌های کنترلر متنوعی به کار گرفته شده است. مرجع [2] یک قالب کلی برای مدل‌سازی دینامیکی و سینماتیکی برای ربات‌های دو چرخه دیفرانسیلی با دو روش معادلات نیوتون-اولر¹ و روش لاگرانژ² ارائه می‌دهد. در مرجع [3] یک چهارچوب کلی عمومی برای فرمول‌بندی و مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی با قیود هولونومیک³ و غیرهولونومیک⁴ استخراج و به صورت بیان فضای حالت ارائه شده است. در مقاله [4] با تمرکز بر ویژگی‌های کنترلر سیستم‌های مکانیکی غیرهولونومیک یک چهارچوب تئوری برای کنترل این سیستم‌ها پایه‌گذاری شده است و ضمن ارائه یک ساختار عمومی برای مدل‌سازی و کنترل این‌گونه سیستم‌ها نشان داده شده است که پایداری یک سیستم با قیود غیرهولونومیک با یک قانون کنترلر هموار امکان‌پذیر نیست. مرجع [5] مسأله کنترلر فیدبک را برای یک ارباب دو چرخ با قید غیرهولونومیک در فضای کارترین بررسی کرد و نشان داد پایداری سیستم در مسأله رديابی مسیر زمانی⁵ هم برای رديابی حالت⁶ و نیز رديابی نقطه‌ای⁷ امکان‌پذیر است مشروط به این که سیستم دارای حرکت باشد. مرجع [6] چهار نوع مختلف از ربات‌های پایه‌متحرک چرخ‌دار را براساس نحوه حرکت، مورد بررسی قرار می‌دهد و برای هر کدام حرکت‌پذیری و فرمان‌پذیری را به صورت کمی توصیف می‌کند. این پژوهش پس از مدل‌سازی سینماتیکی لغزش‌های طولی و عرضی را به عنوان اغتشاش در ورودی سیستم وارد می‌کند. با این کار یک مدل عمومی برای انواع این ربات‌ها جهت طراحی و تحلیل‌های کنترلر ارائه می‌دهد. در مرجع [8,7] نویسندگان به موضوع کنترلر سیستم‌های مکانیکی با قید غلتش خالص پرداخته‌اند و پس از مدل‌سازی سینماتیکی ربات، روشی یکپارچه برای کنترلر سیستم‌های مکانیکی تحت هر دو قید هولونومیک و غیرهولونومیک ارائه کرده‌اند. برای کنترلر مسیر ربات چرخ‌دار و تریلر روش‌های مختلفی تا به حال پیشنهاد شده است که می‌توان به کنترلر مود لغزشی، کنترلر پیش‌بین، کنترلر فازی، شبکه عصبی و کنترل تطبیقی اشاره کرد. ربات ترک‌تور - تریلر یک ربات پایه متحرک چرخ‌دار متشکل از دو یا چند پلتفرم متحرک چرخ‌دار است. به طور خاص سیستم مورد بحث در این مقاله از دو ربات چرخ‌دار تشکیل می‌شود که هرکدام دارای دو چرخ در عقب برای رانش ربات و یک چرخ در جلو جهت تعادل سیستم است. پیش‌رانش سیستم بر عهده ترک‌تور و چرخ‌های تریلر کاملاً غیرفعال است. مسأله رديابی مسیر هندسی هم در زمینه کاربردهای صنعتی و هم در زمینه کارهای تئوری به شدت مورد توجه قرار گرفته است. راه حل این مسأله پتانسیلی برای هدایت خودکار بخش بزرگی از وسایل نقلیه صنعتی مثل واگن‌های معدن، ماشین‌آلات راه‌سازی و وسایل نقلیه عمومی مثل اتوبوس‌هاست [9]. مرجع [9] به حل مسأله پایدارسازی مجانبی برای حرکت سیستم ترک‌تور - تریلر حول مسیر هندسی مطلوب پرداخته است. در مقاله یادشده نویسنده معادلات سینماتیکی برای یک ربات ترک‌تور - تریلر با دو ورودی سینماتیکی استخراج می‌کند. با استخراج دینامیک خطا در فاصله ربات از مسیر و جهت‌گیری آن از مسیر مطلوب رویه ریاضیاتی برای طراحی قانون کنترلر مناسب با استفاده از قضایای لیاپانوف صورت می‌پذیرد. در نهایت

¹ Newton-Euler

² Lagrange

³ Holonomic

⁴ Nonholonomic

⁵ Trajectory tracking

⁶ Posture tracking

⁷ Point tracking

⁸ Objective function

⁹ Model Predictive Control

¹⁰ Quadratic

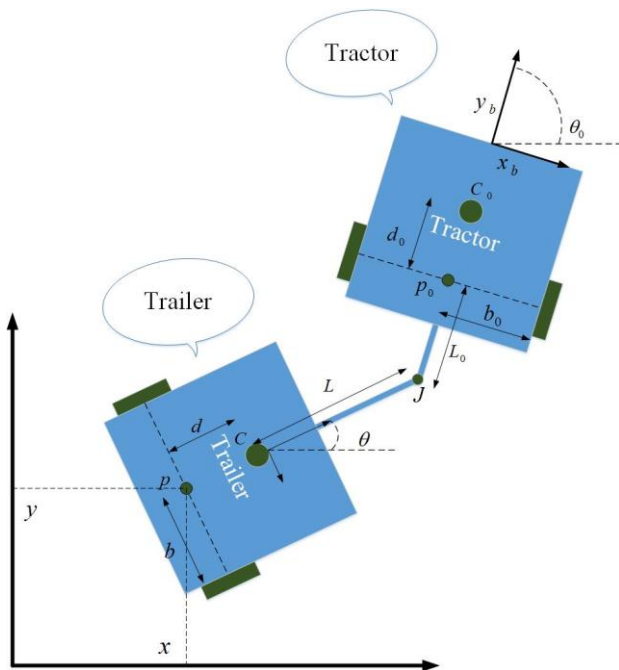


Fig. 1 The geometrical parameters of the considered Tractor-Trailer

شکل 1 ربات ترک‌تور تریلر با مشخصات هندسی

را هولونومیک گویند اگر انتگرال‌پذیر بوده و در نهایت به یک رابطه جبری بین مختصات تعمیم یافته سیستم منجر شود. قیودی را غیرهولونومیک گویند که قابل انتگرال‌گیری نبوده و فقط به صورت یک معادله دیفرانسیل بین مختصات تعمیم یافته و سرعت‌های تعمیم یافته باقی بماند.

این قیود را می‌توان به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل روی مختصات تعمیم یافته سیستم نوشت. در این دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه اول بوده و برحسب سرعت‌های تعمیم یافته از درجه اول است؛ بنابراین تمام قیود حاکم بر سیستم را می‌توان به صورت رابطه (2) نوشت.

$$W(\dot{q}, \dot{q}) = 0 \Rightarrow A(q)\dot{q} = 0$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & -d \cos(\theta_0 - \theta) & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ماتریس $A_{4 \times 2}$ ماتریس قیود نامیده می‌شود و رتبه آن 2 است؛ بنابراین می‌توان مقادیر مستقلی را یافت که بتوان تمامی سرعت‌های تعمیم یافته را برحسب آن‌ها نوشت. اگر این مقادیر مستقل را ورودی‌های سینماتیکی سیستم در نظر بگیریم و به صورت $u = [u_1 \ u_2]^T$ تعریف کنیم، آن‌گاه از فیزیک مسأله می‌توان دریافت، v سرعت خطی نقطه P تریلر و ω سرعت زاویه‌ای ترک‌تور می‌توانند مقادیر مستقل یادشده باشند. پس بردار ورودی را به صورت رابطه (4) تعریف می‌کنیم.

$$u = [u_1 \ u_2]^T = [v \ \omega]^T \quad (3)$$

فرض کنید $s_1(q), s_2(q)$ بردارهای مستقل خطی و متعلق به فضای پوچی³ ماتریس $A(q)$ باشند، آن‌گاه رابطه (4) را به صورت زیر داریم.

$$A(q)s_i(q) = 0, i = 1, 2 \quad (4)$$

با تعریف ماتریس $S(q) = [s_1(q) \ s_2(q)]$ رابطه (5) نتیجه می‌شود.

$$A(q)S(q) = 0 \quad (5)$$

اگر Δ به صورت فضایی فرض شود که به وسیله بردارهای $s_1(q), s_2(q)$ اسپن شده باشد، رابطه (6) را به صورت زیر داریم.

$$\Delta = \text{span}\{s_1(q), s_2(q)\} \quad (6)$$

از روابط (2) نتیجه می‌شود که بردار $\dot{q}$ در هر لحظه در داخل فضای Δ قرار می‌گیرد. دقت داشته باشید که Δ در هر لحظه و موقعیت مشخص، فضای

است این کار سیستم را از مدل واقعی دور خواهد کرد. در سال 2017 خانپور و همکاران یک سیستم ترک‌تور-تریلر را که در آن ترک‌تور دارای چرخ‌های دیفرانسیلی استاندارد و تریلر دارای چرخ‌های کروی است مورد مطالعه قرار دادند. پس از استخراج معادلات دینامیکی و سینماتیکی سیستم با یک روش جدید تحت عنوان لیاپانوف-پی‌آی-دی برگرفته از درک فیزیکی یک قانون کنترلی برای ردیابی مسیر مرجع پیشنهاد کردند [18].

ردیابی مسیر زمانی حالت‌ها برای سیستم ترک‌تور-تریلر مسأله‌ای است که در این پژوهش به آن در سطح سینماتیک پرداخته شده است. از کنترل بهینه بارها برای کنترل ربات‌های پایه متحرک استفاده شده است. در این تحقیق برای نخستین بار از کنترل پیش‌بین برای ردیابی مسیر زمانی ربات ترک‌تور-تریلر استفاده شده و یک قانون کنترل سینماتیکی بهینه با لحاظ اشباع در ورودی‌های سیستم طراحی شده است. سپس عملکرد کنترلر طراحی شده با کنترلر مرسوم تناسبی-انتگرال‌گیر-مشتق‌گیر مقایسه می‌شود؛ بنابراین دستاورد این مقاله تعمیم قانون کنترلی پیش‌بین با ورودی‌های مقید برای ربات ترک‌تور-تریلر است. یکی از تفاوت‌های این مقاله با کنترل‌های پیش‌بین طراحی شده در کارهای پیشین استفاده از مدل رانش دیفرانسیلی به جای رانش فرمانی برای ترک‌تور است، همچنین برخلاف برخی کارهای پیشین که تنها زاویه فرمان ترک‌تور را ورودی فرض می‌کنند، در این پژوهش دو ورودی بهینه به طور هم‌زمان برای ربات طراحی می‌شود.

ادامه مقاله به این صورت است که در بخش دوم ضمن معرفی ساختار سیستم ترک‌تور-تریلر به تشریح پارامترهای هندسی آن پرداخته و مدل سینماتیکی برای سیستم استخراج می‌شود. در بخش سوم با شرح الگوریتم کنترل پیش‌بین با خطی‌سازی سیستم حول مسیر مرجع یک قانون کنترلی بهینه با در نظر گرفتن اشباع در ورودی‌ها طراحی خواهد شد. بخش چهارم حاوی نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیستم است که جهت اثبات عملکرد کنترلر در شرایط بدون اغتشاش و همراه اغتشاش آورده شده است. مقایسه کنترلر پیش‌بین طراحی شده با کنترلر تناسبی-انتگرال‌گیر-مشتق‌گیر¹ نیز در این بخش صورت می‌گیرد. در نهایت نتیجه‌گیری و کارهای پیش‌رو در بخش پنجم آورده شده است.

2- تشریح و مدل‌سازی سیستم

سیستم مورد مطالعه در این پژوهش شامل یک ربات چرخ‌دار به نام ترک‌تور است که به وسیله دو چرخ دیفرانسیلی² کنترل می‌شود و همچنین یک واحد چرخ‌دار دیگر به اسم تریلر که با یک پین غیرفعال به ترک‌تور متصل شده است. در هر دو ربات از یک چرخ غیرفعال کروی برای تعادل استفاده شده است. در شکل 1 نقاط C_0 و C به ترتیب نشان‌دهنده مرکز جرم ترک‌تور و تریلر است. d_0 و d به ترتیب فاصله میان نقاط P_0 و C_0 و C و P فاصله نقاط C و P را نمایش می‌دهند. b_0 و b نیز به ترتیب نصف فاصله چرخ‌ها در ترک‌تور و تریلر است. همان‌گونه که دیده می‌شود تمام پارامترها برای ترک‌تور با اندیس صفر و برای تریلر بدون اندیس مشخص شده‌اند. بردار توصیف‌کننده پیکره سیستم به صورت رابطه (1) در نظر گرفته شده است.

$$q = [x \ y \ \theta \ \theta_0]^T \quad (1)$$

(x, y) مختصات نقطه P در دستگاه اینرسی، θ و θ_0 جهت‌گیری ترک‌تور و تریلر را نشان می‌دهد. حرکت‌پذیری ربات‌های چرخ‌دار تحت تأثیر قیودی است که به دو نوع هولونومیک و غیرهولونومیک دسته‌بندی می‌شود. قیودی

¹ PID

² Differential drive

³ Null space

صورت رابطه (15) خواهد بود.

$$\{\tilde{u}^*(k|k), \dots, \tilde{u}^*(k+N-1|k)\} \quad (15)$$

از آن‌جا که مقادیر حالت‌ها و ورودی در چند گام زمانی در تابع هدف فوق دیده می‌شود، بهتر است بردارهای (16) را تعریف و از آن‌ها در تابع هدف استفاده نمود.

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{x}(k+1|k) \\ \bar{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \bar{x}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \bar{u}(k|k) \\ \bar{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \bar{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \quad (16)$$

با تعریف بردار حالت و ورودی جدید، معادله (14) به شکل رابطه (17) تبدیل می‌شود.

$$\theta(k) = \bar{x}^T(k+1)\bar{Q}\bar{x} + \bar{u}^T(k)\bar{R}\bar{u}(k) \quad (17)$$

در رابطه فوق ماتریس‌ها به صورت رابطه (18) می‌باشند.

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{bmatrix} \quad (18)$$

حال معادله حالت سیستم را برای ورودی‌ها و حالت‌های جدید تعریف شده در رابطه (16) به صورت رابطه (19) بازنویسی می‌کنیم.

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{x}(k|k) + \bar{B}(k)\bar{u}(k) \quad (19)$$

ماتریس حالت و ماتریس ورودی جدید به شکل رابطه (20) استخراج شده است.

$$\bar{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k|k) \\ A(k|k)A(k+1|k) \\ \vdots \\ \Gamma(k,0) \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k|k) & 0 & \dots & 0 \\ A(k+1|k)B(k|k) & B(k+1|k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(k,1)B(k|k) & \Gamma(k,2)B(k+1|k) & \dots & B(k+N-1|k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k|k) \\ A(k|k)A(k+1|k) \\ \vdots \\ \Gamma(k,0) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(k,j) = \prod_{i=j}^{N-1} A(k+i|k) \quad (20)$$

اثبات روابط بالا با جای‌گذاری ماتریس‌ها به سادگی صورت می‌گیرد. با جای‌گذاری معادله حالت (19) در رابطه (14) تابع هدف به فرم رابطه (21) تبدیل می‌شود [14,1].

$$\theta(k) = \frac{1}{2} \bar{u}^T(k) \mathcal{H}(k) \bar{u}(k) + \mathcal{F}^T(k) \bar{u}(k) + \mathcal{J}(k) \quad (21)$$

که در آن رابطه (22) را داریم.

$$\mathcal{H}(k) = 2(B^*{}^T(k) Q B^*(k) + R^*) \\ \mathcal{F}(k) = 2\bar{B}^T(k) \bar{Q} \bar{A}(k) \bar{x}(k|k) \\ \mathcal{J}(k) = \bar{x}^T(k|k) \bar{A}^T(k) \bar{Q} \bar{A}(k) \bar{x}(k|k) \quad (22)$$

$\mathcal{H}$ ماتریس هسیان¹ و یک ماتریس مثبت معین است و ضرایب بخش مربعی تابع هدف را نشان می‌دهد. $\mathcal{F}$ بخش خطی تابع هدف را مشخص می‌کند و $\mathcal{J}$ یک مقدار اسکالر و مستقل از ورودی است [14]. همان‌طور که از رابطه فوق مشخص است، تابع هدف فقط به مقادیر حالت‌های اولیه سیستم و مقادیر ورودی در پله‌های زمانی وابسته است. اشباع عملکردی پدیده‌ای است که در هنگام کنترل سیستم‌های واقعی اتفاق می‌افتد؛ بنابراین مقید کردن

پوچی ماتریس A در همان لحظه خواهد بود. در نتیجه در هر لحظه و هر موقعیت می‌توان بردار $\dot{q}$ را به صورت رابطه (7) نوشت [19,8,7].

$$\dot{q} \in \Delta \Rightarrow \dot{q} = s_1 u_1 + s_2 u_2 \quad (7)$$

در نهایت برای ربات ترک‌تور - تریلر معادله سینماتیکی حالت با توجه به ورودی‌های سینماتیکی فرض شده و ماتریس $S(q)$ به صورت رابطه (8) است [11,10].

$$\dot{q} = Su = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ \frac{1}{d}\tan(\theta_0 - \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

3- طراحی کنترل‌کننده

اساس روش کنترل پیش‌بین بهینه‌کردن یک شاخص براساس پیش‌بینی رفتار سیستم در چند پله زمانی جلوتر است. بر این اساس توالی از مقادیر ورودی که بهینه‌ترین شاخص را در طی افق زمانی مورد نظر دهد، به عنوان ورودی بهینه محاسبه می‌شود. برای طراحی کنترلر، پس از خطی‌سازی سیستم و گسسته‌سازی معادلات یک تابع هدف طوری تعیین می‌شود که شامل خطای حالت‌ها و ورودی‌های سیستم از مقادیر مرجع است. کنترلر در هر پله زمانی بردار ورودی کنترلی بهینه را با حل یک مسئله بهینه‌سازی برای چند پله زمانی محاسبه می‌کند؛ سپس اولین عنصر از بردار ورودی تولید شده به سیستم اعمال می‌شود. در پله زمانی بعدی مسئله بهینه‌سازی با در نظر گرفتن مدل به‌روز شده سیستم و افق زمانی جلو رفته، دوباره حل می‌شود. این فرآیند تا نقطه پایان شبیه‌سازی تکرار می‌شود [13]. در این مقاله برای سهولت فرض بر این است که حالت‌های سیستم قابل اندازه‌گیری هستند. اگر معادلات سیستم را به صورت رابطه (9) فرض کنیم:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (9)$$

رفتار سیستم با ورودی مرجع u_r به صورت مسیر مرجع x_r به صورت رابطه (10) است.

$$\dot{x}_r = f(x_r, u_r) \quad (10)$$

حال با نوشتن بسط تیلور برای معادله (9) حول مسیر مرجع (10) و حذف جملات درجه بالا رابطه (11) حاصل خواهد شد.

$$\dot{x} = f(x_r, u_r) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_r, u_r} (x - x_r) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_r, u_r} (u - u_r) \\ = f(x_r, u_r) + f_{x_r}(x - x_r) + f_{u_r}(u - u_r) \quad (11)$$

که f_{x_r} و f_{u_r} ماتریس جاکوبین f نسبت به x و u است که در هر نقطه از مسیر مرجع (x_r, u_r) محاسبه شده است. با فرض $\tilde{x} = x - x_r$ و $\tilde{u} = u - u_r$ ، معادله دینامیک خطی شده به صورت رابطه (12) نوشته می‌شود.

$$\dot{\tilde{x}} = f_{x_r} \tilde{x} + f_{u_r} \tilde{u} \quad (12)$$

با گسسته‌سازی رابطه (12)، رابطه تفاضلی حالت (13) حاصل می‌شود.

$$\tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + B(k)\tilde{u}(k) \quad (13)$$

با توصیف سیستم به صورت رابطه بالا می‌توان مقادیر حالت‌های سیستم را در هر گام زمانی محاسبه کرد. همان‌طور که پیشتر گفته شد، ابتدا تابع هدف $\theta(x, u)$ را طوری تعریف می‌کنیم که رفتار سیستم در افق زمانی مشخص را به درستی به صورت رابطه (14) توصیف کند.

$$\theta(k) = \sum_{i=1}^N x^T(k+i|k) Q x(k+i|k) + u^T(k+i-1|k) R u(k+i-1|k) \quad (14)$$

که در آن N افق زمانی مورد نظر، $R \geq 0$ ، $Q \geq 0$ ماتریس‌های وزنی هستند. منظور از عبارت $\psi(\phi|\xi)$ مقدار ψ در پله ϕ ، پیش‌بینی شده در لحظه ξ است. با حل مسئله بهینه‌سازی بالا بردار ورودی‌های بهینه محاسبه شده به

¹ Hessian

جدول 1 مقادیر پارامترهای هندسی ترک‌تور - تریلر

Table 1 The geometrical parameters values of the tractor-trailer

مقدار	توصیف	پارامتر
0.24(m)	نصف فاصله چرخ‌ها در ترک‌تور	b_0
0.1(m)	فاصله‌ی مرکز جرم از محور چرخ‌ها در ترک‌تور	d_0
0(m)	فاصله مرکز جرم تا پین J	L_0
0.24(m)	نصف فاصله چرخ‌ها در تریلر	b
0.1(m)	فاصله مرکز جرم از محور چرخ‌ها در ترک‌تور	d
0.5(m)	فاصله مرکز جرم تا پین J	L

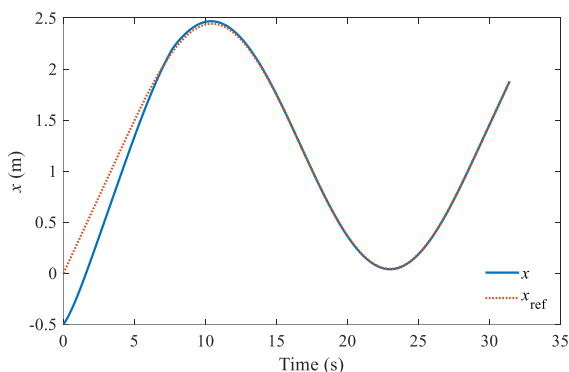


Fig. 3 The longitudinal trajectory of the trailer

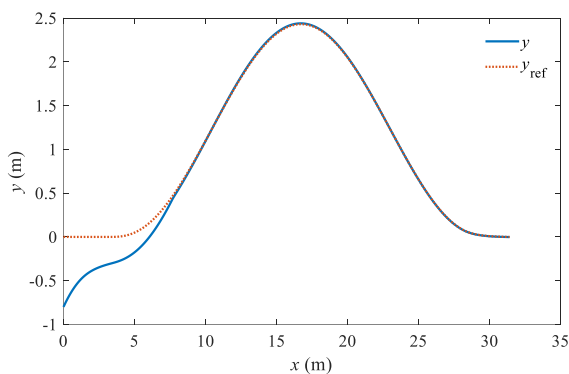


Fig. 4 The lateral trajectory of the trailer

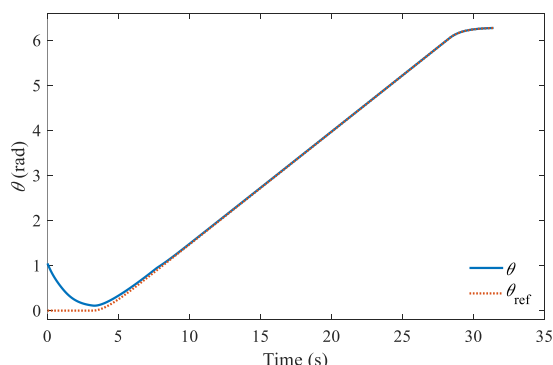


Fig. 5 The orientation trajectory of the trailer

مقادیر کنترلی برای جلوگیری از پدیده یادشده ضروری خواهد بود که در برخی پژوهش‌ها نظیر [11,10] نادیده گرفته می‌شود. با محدود کردن مقادیر ورودی به صورت رابطه (23) است.

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (23)$$

و با توجه به این که $\tilde{u} = u - u_r$ رابطه نهایی (24) حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\min} &< \tilde{u} < \tilde{u}_{\max} \\ \tilde{u}_{\min} &= u_{\min} - u_r \\ \tilde{u}_{\max} &= u_{\max} - u_r \end{aligned} \quad (24)$$

آنچه که به عنوان ورودی نهایی سیستم در روابط ریاضیاتی ظاهر می‌شود، $\tilde{u}$ است؛ بنابراین با توجه به رابطه (16) حدود نهایی قابل اعمال به معادلات به صورت رابطه (25) خواهد بود.

$$\tilde{u}_{\min}(k) \cong \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\min}(k | k) \\ \tilde{u}_{\min}(k + 1 | k) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{\min}(k + N - 1 | k) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}_{\max}(k) \cong \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\max}(k | k) \\ \tilde{u}_{\max}(k + 1 | k) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{\max}(k + N - 1 | k) \end{bmatrix} \quad (25)$$

شکل 2 نمودار کنترلی طراحی شده را نشان می‌دهد.

4- نتایج شبیه‌سازی

با اعمال الگوریتم کنترلی توسعه داده شده در بخش قبل به ربات ترک‌تور - تریلر با مشخصات بیان شده قبلی، نتایج شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب در این بخش آمده است. برای بهینه‌سازی از ابزار کوادپراگ¹ در متلب استفاده شده است. در این شبیه‌سازی سیستم از شرایط اولیه $v(0) = 0$ و $\omega_0(0) = 0$ و $x(0) = [-0.5 \ -0.8 \ \pi/3 \ \pi/6]^T$ شروع به حرکت می‌کند. به علاوه ورودی سیستم با مقادیر $v_{\max} = v_{\min} = 0.2$ ، $\omega_{\max} = 0.3$ ، $\omega_{\min} = -0.3$ با مقادیر $Q = 0.4$ محدود شده است. ماتریس ضرایب تابع هدف، به صورت $R = \text{diag}(0.1, 0.1)$ و $\text{diag}(20, 20, 0.5, 0.2)$ لحاظ شده است، همچنین پیش‌بینی تابع هدف براساس 5 گام زمانی جلوتر ($N = 5$) محاسبه می‌شود. دیگر مشخصات هندسی سیستم در جدول 1 ارائه شده است. شکل‌های 3، 4، 5 به ترتیب مسیر زمانی مؤلفه طولی و عرضی نقطه‌ی p از تریلر را در کنار مسیر مرجع نشان می‌دهند. شرایط اولیه سیستم و مسیر مرجع برای بررسی کارایی کنترل طراحی شده متفاوت از هم در نظر گرفته شده است. همان‌طور که دیده می‌شود خطای شرایط اولیه به مرور به صفر همگرا می‌شود. جهت‌گیری ترک‌تور و تریلر در شکل‌های 5 و 6 آمده است. علاوه بر موقعیت در

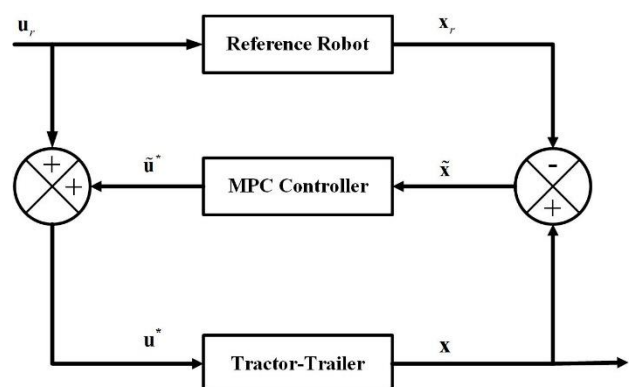


Fig. 2 The proposed MPC block diagram of the system

شکل 2 دیاگرام سیستم کنترلی پیش‌بین پیشنهادی

¹ Quadprog

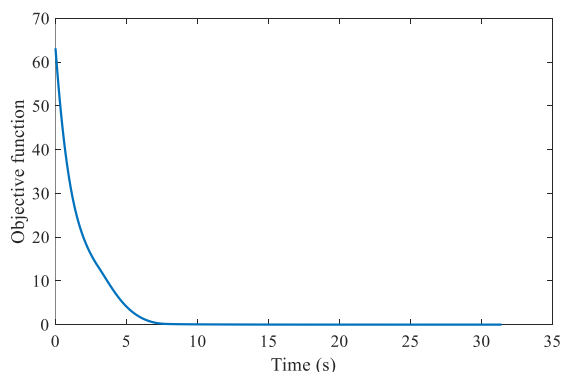


Fig. 9 The objective function trajectory

شکل 9 تغییرات زمانی تابع هدف

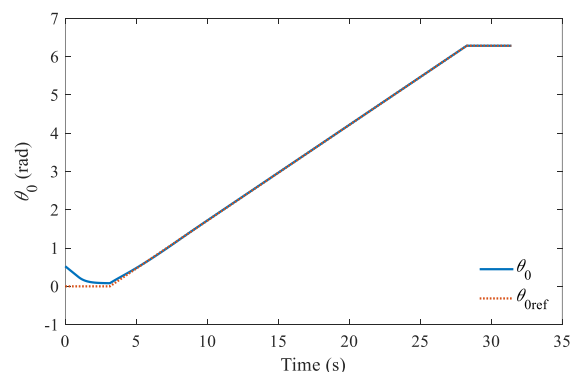


Fig. 6 The orientation trajectory of the tractor

شکل 6 مسیر زمانی جهت‌گیری ترک‌تور

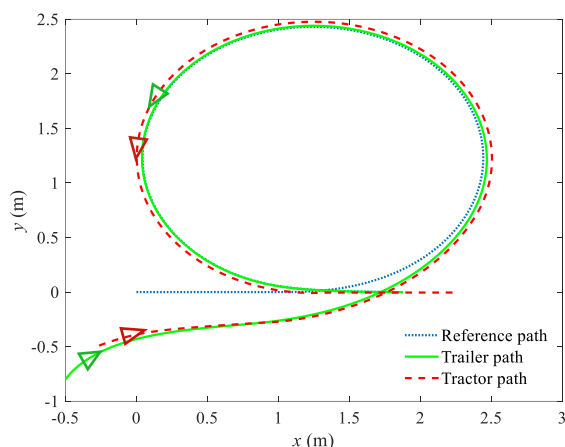


Fig. 10 The geometrical path of the robot under MPC controller

شکل 10 مسیر هندسی ربات با کنترل‌کننده پیش‌بین

برای درک بهتر از میزان کارایی کنترلر طراحی شده سیستم را با یک کنترلر تناسبی-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر کنترل و نتایج را بررسی می‌کنیم. برای این کار دو مؤلفه موقعیت تریلر به عنوان خروجی سیستم فرض می‌شود. در واقع سیستم را به صورت دو ورودی-دو خروجی در نظر می‌گیریم. بیان موقعیت تریلر در دستگاه قطبی¹ طراحی کنترل را راحت‌تر می‌کند، زیرا با این کار هر ورودی به صورت مستقل فقط بر یک خروجی اثر می‌گذارند. این امر موجب تفکیک سینماتیک سیستم می‌شود. موقعیت تریلر در دستگاه قطبی و کارترین با رابطه (26) به هم مرتبط می‌شوند.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (26)$$

ρ, ϕ به ترتیب مؤلفه‌ی دورانی و طولی موقعیت تریلر در دستگاه قطبی است. توابع خطا به شکل رابطه (27) قابل تعریف است.

$$E_\rho = \rho - \rho_{ref}, E_\phi = \phi - \phi_{ref} \quad (27)$$

اگر بردار خطا به صورت $e = \begin{Bmatrix} E_\rho \\ E_\phi \end{Bmatrix}$ فرض شود، آن‌گاه قانون کنترلی تناسبی-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر اصلاح شده را به صورت رابطه (28) به سیستم اعمال می‌کنیم.

$$u = u_{ref} - K_p e - K_i \int e dt - K_d \dot{e} \quad (28)$$

ماتریس‌های K_p, K_i, K_d ضرایب ثابت کنترلر و u_{ref} ورودی‌های مرجع سیستم هستند. از مدل خطی شده سیستم در معادلات بخش قبل می‌توان

جهت‌گیری ترک‌تور و تریلر نسبت به مسیر مرجع نیز اختلاف ایجاد کرده‌ایم تا باز هم کارایی کنترلر طراحی شده مورد بررسی قرار گیرد. همان‌طور که در شکل‌های 5 و 6 مشاهده می‌شود این اختلاف به مرور از بین رفته است. یکی از نقاط قوت کنترلر بهینه اعمال قید بر ورودی‌های سیستم و ایجاد مصالحه بین عملکرد و تلاش کنترلی است. شکل‌های 7 و 8 به ترتیب سرعت خطی نقطه p و سرعت زاویه‌ای ترک‌تور که ورودی‌های سیستم هستند را نشان می‌دهند. با توجه به شکل ورودی‌های کنترلی بین مقادیر مشخص شده محدود شده است و در نهایت به مقادیر مرجع همگرا می‌شود. شکل 9 نشان می‌دهد که تابع هدف در نظر گرفته شده با گذشت زمان به صفر همگرا می‌شود. در نهایت مسیر هندسی پیموده شده توسط ربات و مسیر مرجع در شکل 10 آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود تریلر پس از چند ثانیه ابتدای حرکت به مسیر مرجع همگرا می‌شود.

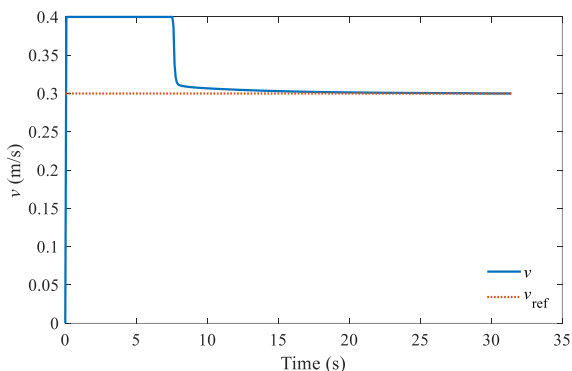


Fig. 7 The linear velocity of the trailer

شکل 7 مسیر زمانی سرعت خطی تریلر

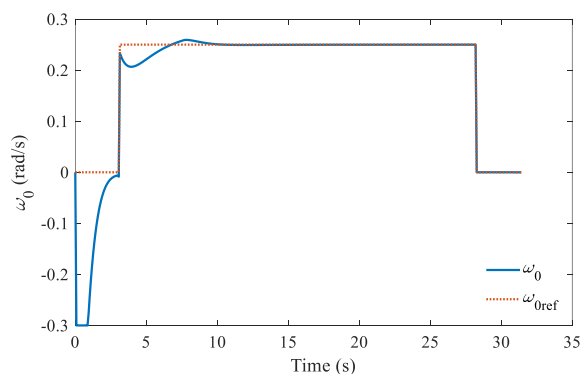


Fig. 8 The angular velocity of the tractor

شکل 8 مسیر زمانی سرعت زاویه‌ای ترک‌تور

¹ Polar coordinate

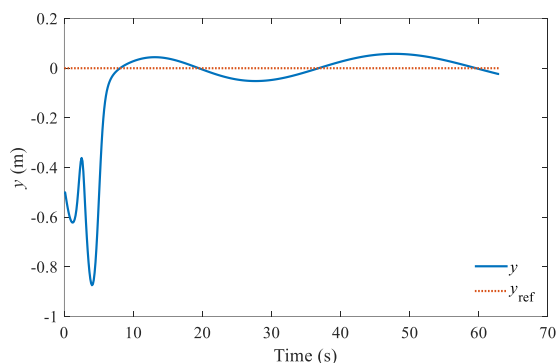


Fig. 13 The lateral trajectory of trailer in the caresian coordinate

شکل 13 مسیر زمانی مؤلفه عرضی موقعیت تریلر در مختصات دکارتی

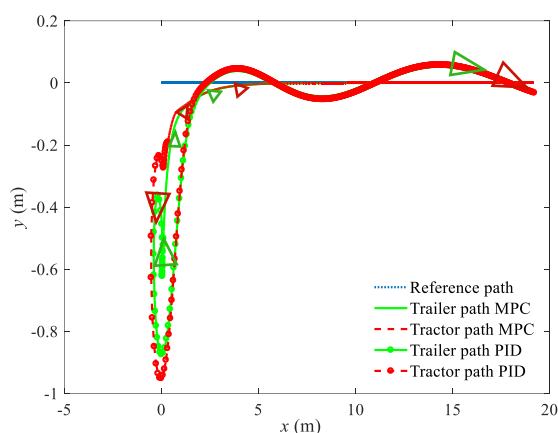


Fig. 14 The geometrical path of the robot under MPC and PID controllers

شکل 14 مسیر هندسی ربات با کنترل‌کننده پیش‌بین و تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر

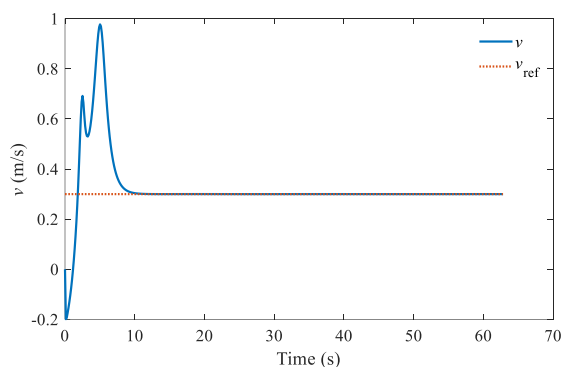


Fig. 15 The linear velocity of the trailer

شکل 15 مسیر زمانی سرعت خطی تریلر

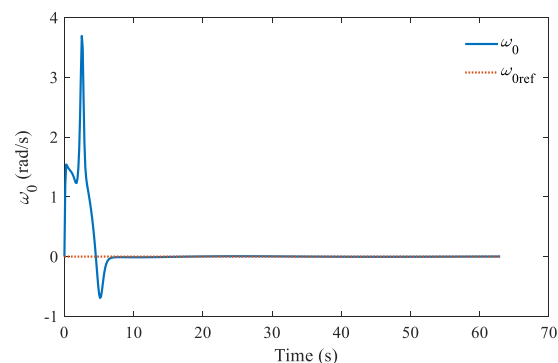


Fig. 16 The angular velocity of the tractor

شکل 16 مسیر زمانی سرعت زاویه‌ای ترک‌تور

دریافت که ماتریس‌های حالت و ورودی سیستم به مسیر مرجع وابسته است. مسیر مرجع ارائه شده در نتایج قبل باعث تغییرات زیادی در این می‌شود؛ بنابراین کنترلر تناسبی-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر با ضرایب ثابت توانایی کنترل سیستم را ندارد. نتایج شبیه‌سازی نیز حاکی از این امر است. برای ارائه نتایج کنترلر مذکور عملکرد آن با یک مسیر مرجع به نسبت ساده سنجیده شده است. ضرایب کنترلر با سعی و خطا تعیین شده و به صورت رابطه (29) است.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.69 & 0 \\ 0 & 0.49 \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6.1 \end{bmatrix}, K_d = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

شکل 11 توابع خطای مؤلفه‌های موقعیت تریلر را نشان می‌دهد که با حرکت از شرایط اولیه $x(0) = [0.1 \ -0.5 \ \pi/3 \ \pi/6]$ پس از 10 ثانیه اول شبیه‌سازی به صفر همگرا می‌شود. مسیر زمانی مؤلفه‌های طولی و عرضی تریلر در شکل‌های 12 و 13 آمده است. برای مقایسه بهتر عملکرد دو کنترلر، مسیر هندسی ربات کنترل شده تحت اثر هر دو کنترلر برای مسیر مرجع یکسان در شکل 14 آورده شده است. همان‌طور که در شکل‌های 13 و 14 مشخص است، کنترلر-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر عملکرد خوبی در پایدارسازی نداشته و کارایی بهتر کنترلر پیش‌بین طراحی شده کاملاً واضح است.

اگر از نقطه نظر تلاش کنترلی، کنترلر پیش‌بین طراحی شده را با کنترلر تناسبی-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر مقایسه کنیم باید شکل‌های 15 و 16 بررسی گردند که ورودی‌های طراحی شده با قانون کنترلی تناسبی-انتگرال-گیر-مشتق‌گیر را گزارش می‌کند. محدوده مقادیر ورودی‌ها در این کنترلر بیشتر از ورودی‌های کنترلر پیش‌بین است (مقایسه شکل‌های 15, 16 با شکل‌های 7, 8 متناظر با ورودی‌های کنترلر پیش‌بین). این نتایج حاکی از عملکرد ضعیف این کنترلر نسبت به کنترلر پیش‌بین بر سیستم ترک‌تور-تریلر است.

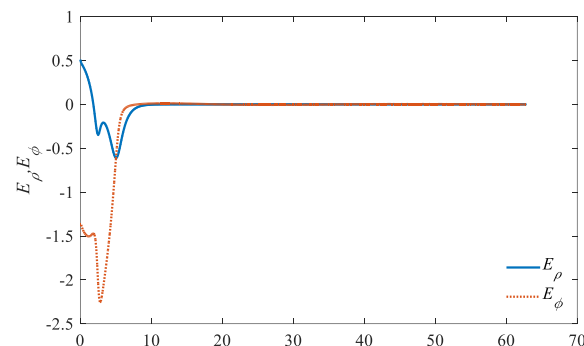


Fig. 11 The position error of trailer in the polar coordinate

شکل 11 مسیر زمانی خطای موقعیت تریلر در مختصات قطبی

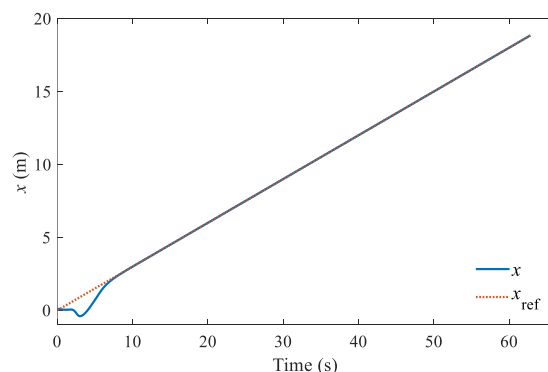


Fig. 12 The longitudinal trajectory of trailer in the caresian coordinate

شکل 12 مسیر زمانی مؤلفه طولی موقعیت تریلر در مختصات دکارتی

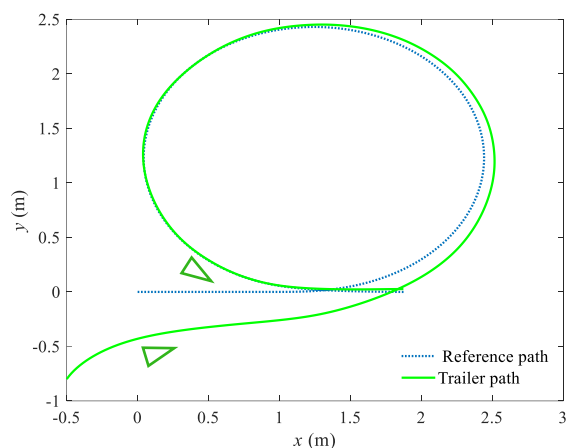


Fig. 20 The geometrical path of the trailer under MPC controller in presence of disturbances

شکل 20 مسیر هندسی تریلر با کنترل‌کننده پیش‌بین در حضور اغتشاش

اغتشاش نتوانسته ربات را به مسیر مرجع همگرا کند. قوام ضعیف کنترلر تناسبی-انتگرال‌گیر-مشتق‌گیر در مقابل اغتشاش در شکل 21 کاملاً مشهود است.

کارایی کنترلر در صورت وجود نامعینی در پارامترها، یکی از ملاک‌های برتری کنترلر است. در پایان با اعمال 20% نامعینی در پارامترهای L و d_0 عملکرد کنترلر بررسی می‌شود. همان‌گونه که در شکل 22 دیده می‌شود نامعینی پارامترها، موجب یک خطای ماندگار در مسیر هندسی ربات شده است. ولی کماکان، ربات الگوی کلی مسیر مرجع را پیموده است. خروجی‌های کنترلر در شکل‌های 23 و 24 ارائه شده است.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار روش کنترل پیش‌بین که بر پایه کنترل بهینه است، در طراحی کنترلر ربات ترک‌تور- تریلر با ساختار رانش تفاضلی مورد استفاده قرار گرفت. ابتدا مدل سینماتیکی ربات ترک‌تور- تریلر استخراج گردید. سپس یک مسیر هندسی قابل حصول به عنوان مسیر مرجع در نظر گرفته و با استفاده از روش کنترل پیش‌بین خطی مدل مینا یک قانون کنترلی برای تعقیب مسیر هندسی مطلوب طراحی شد. ضمن حل مسأله کنترلی ردیابی مسیر زمانی با در نظر گرفتن قید روی ورودی‌ها ملاحظات

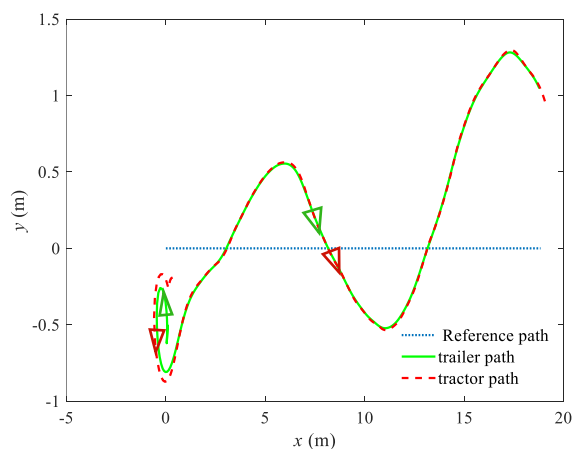


Fig. 21 The geometrical path of the robot under PID controller in presence of disturbances

شکل 21 مسیر هندسی ربات با کنترل‌کننده تناسبی- انتگرال‌گیر- مشتق‌گیر در حضور اغتشاش

قوام کنترلر در برابر اغتشاش قابلیت اطمینان آن را برای محیط‌های واقعی افزایش می‌دهد. در این بخش یک سیگنال زمانی از اغتشاش را که در شکل 17 آمده است به صورت اغتشاش جمع‌شونده در ورودی سیستم وارد شده و با استفاده از نتایج شبیه‌سازی عملکرد کنترلر در حضور اغتشاش بررسی خواهد شد. شکل‌های 18,19 تأثیر اغتشاش بر ورودی‌های طراحی شده توسط کنترلر را نشان می‌دهد. در نهایت مسیر هندسی نهایی ربات با وجود اغتشاشات یادشده در شکل 20 ارائه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، کنترلر توانسته است در حضور اغتشاش سیستم را کنترل نماید.

برای مقایسه‌ی کنترل پیش‌بین و کنترل تناسبی- انتگرال‌گیر- مشتق‌گیر از نظر قوام در برابر اغتشاش، شکل 21 مسیر هندسی ربات کنترل شده با کنترلر تناسبی- انتگرال‌گیر- مشتق‌گیر در حضور اغتشاش وارد شده در شکل 17 را نشان می‌دهد و مبین این امر است که کنترلر مذکور در حضور

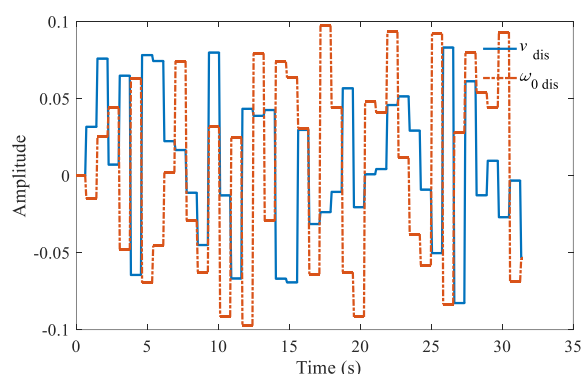


Fig. 17 The considered disturbance trajectory on the system inputs

شکل 17 سیگنال اغتشاشات وارد شده به سیستم

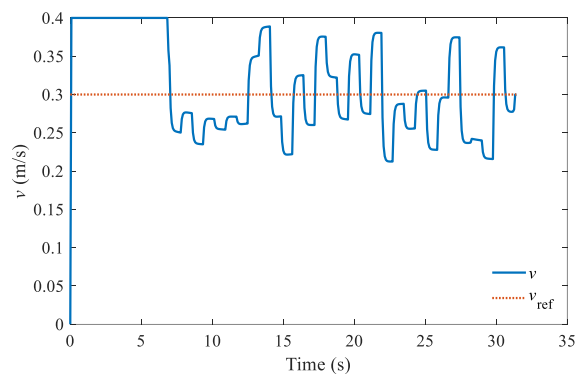


Fig. 18 The linear velocity of the trailer

شکل 18 مسیر زمانی سرعت خطی تریلر

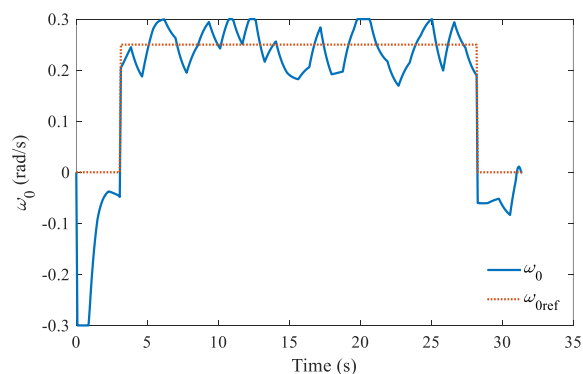


Fig. 19 The angular velocity of the tractor

شکل 19 مسیر زمانی سرعت زاویه‌ای ترک‌تور

است به صورت مرحله‌ای با فرض مسیر مرجع برای تریلر مطلوب، ربات جلوتر را کنترل کرد تا در نهایت به مقادیر ورودی ترکور سیستم رسید، با این وجود بدیهی است که با افزایش زنجیره خطای سیستم افزایش می‌یابد.

6- مراجع

- [1] G. Klančar, I. Škrjanc, Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 55, No. 6, pp. 460-469, 2007.
- [2] R. Dhaouadi, A. A. Hatab, Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using lagrange and newton-euler methodologies: A unified framework, *Advances in Robotics & Automation*, Vol. 2, No. 2, pp. 1-7, 2013.
- [3] X. Yun, N. Sarkar, Unified formulation of robotic systems with holonomic and nonholonomic constraints, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 4, pp. 640-650, 1998.
- [4] A. M. Bloch, N. H. McClamroch, Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints, *Proceeding of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 201-205, 1989.
- [5] C. Samson, K. Ait-Abderrahim, Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space, *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, pp. 1136-1141, 1991.
- [6] D. Wang, C. B. Low, Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: Control design perspective, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 24, No. 3, pp. 676-687, 2008.
- [7] N. Sarkar, X. Yun, V. Kumar, Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 13, No. 1, pp. 55-69, 1994.
- [8] N. Sarkar, X. Yun, V. Kumar, Dynamic path following: A new control algorithm for mobile robots, *Proceeding of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 2670-2675, 1993.
- [9] A. Astolfi, P. Bolzern, A. Locatelli, Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: A Lyapunov-based approach, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 20, No. 1, pp. 154-160, 2004.
- [10] A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Robust adaptive controller for a tractor-trailer mobile robot, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, pp. 943-953, 2014.
- [11] A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 81-88, 2014. (in Persian)
- [12] K. Alipour, S. A. A. Moosavian, Dynamically stable motion planning of wheeled robots for heavy object manipulation, *Advanced Robotics*, Vol. 29, No. 8, pp. 545-560, 2015.
- [13] K. J. Åström, B. Wittenmark, *Adaptive Control*: Courier Corporation, pp. 5.198-5.208, Massachusetts: Addison-Wesely, 1989.
- [14] F. Kuhne, W. F. Lages, J. G. da Silva Jr, Model predictive control of a mobile robot using linearization, *Proceeding of Mechatronics and Robotics*, Aachen, Germany, 2004.
- [15] J. T. Salmon, D. M. Bevely, J. Y. Hung, Guidance of a robotic off-road tractor-trailer system using model predictive control, *Proceeding of ASME 2013 Dynamic Systems and Control Conference*, Palo Alto, California, USA, October 21-23, 2013.
- [16] E. Kayacan, H. Ramon, W. Saeys, Robust trajectory tracking error model-based predictive control for unmanned ground vehicles, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 21, No. 2, pp. 806-814, 2016.
- [17] T. Wu, J. Y. Hung, Path following for a tractor-trailer system using model predictive control, *Proceeding of, IEEE*, pp. 1-5, 2017.
- [18] A. Khanpoor, A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Modeling and control of an underactuated tractor-trailer wheeled mobile robot, *Robotica*, pp. 1-22, 2017.
- [19] N. Sidek, N. Sarkar, Dynamic modeling and control of nonholonomic mobile robot with lateral slip, *Proceeding of Third International Conference on Systems*, IEEE, pp. 35-40, 2008.

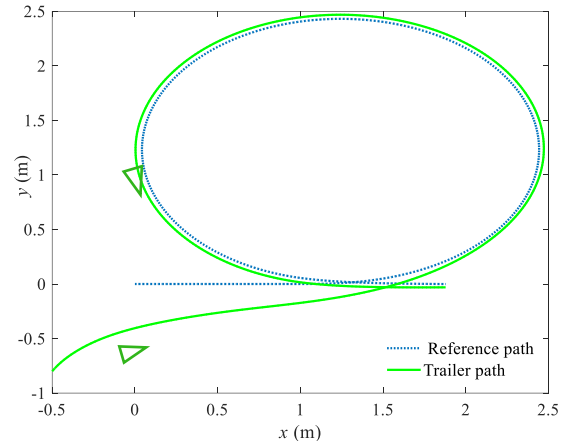


Fig. 22 The geometrical path of the trailer under MPC controller in presence of parameter uncertainties

شکل 22 مسیر هندسی تریلر با کنترل کننده پیش‌بین در حضور نامعینی در پارامترها

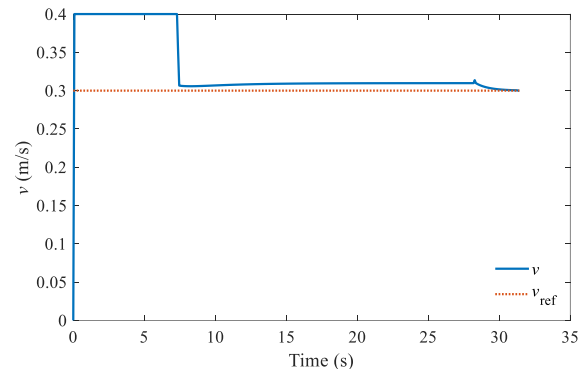


Fig. 23 The linear velocity of the trailer

شکل 23 مسیر زمانی سرعت خطی تریلر

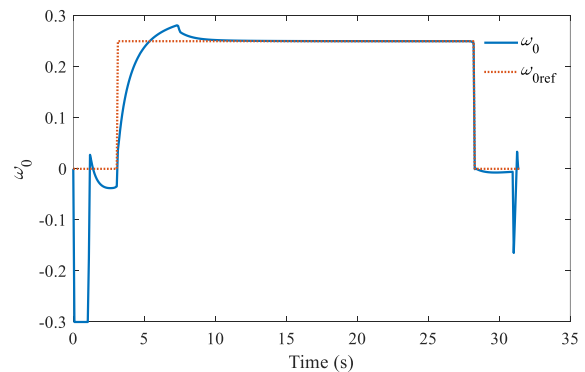


Fig. 24 The angular velocity of the tractor

شکل 24 مسیر زمانی سرعت زوایه‌ای ترکور

اشباع عملکردی دیده شده است. برای القای درک بهتر از عملکرد کنترلر رفتار آن با یک کنترلر تناسبی - انتگرال گیر - مشتق گیر مقایسه شده است. از آنجا که قوام کنترلر در برابر اغتشاش در کاربردهای عملی اهمیت دارد، قوام کنترلر در حضور اغتشاشات در ورودی و نامعینی در پارامترها بررسی شده است. رویکرد ارائه شده می‌تواند جهت کنترل حرکت تریلر مطلوب در یک سیستم رباتیکی با بیش از یک تریلر به کار برده شود. در این حالت کافی