



تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ایزوژئومتریکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پوشیده شده از پیزوالکتریک با استفاده از نظریه راینر-میندلین

سجاد نیکویی¹، بهروز حسینی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد،

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد،

* صندوق پستی 91775-1111، b_hassani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 تیر 1396

پذیرش: 11 مهر 1396

ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:

تحلیل ایزوژئومتریکی

ورق‌ها

کامپوزیت

پیزوالکتریک

چکیده

در این مقاله روش عددی جدیدی بر اساس تحلیل ایزوژئومتریکی برای تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه پوشیده شده با مواد هوشمند پیزوالکتریک با استفاده از نظریه راینر-میندلین ارائه شده و دقت و کارایی آن مورد بررسی قرار گرفته است. هدف از تحلیل ایزوژئومتریکی ساده‌سازی طراحی هندسه و تحلیل مهندسی به کمک کامپیوتر با استفاده از توابعی است که به توصیف هندسه و در عین حال مجهولات می‌پردازند. در اینجا از روش ایزوژئومتریکی با توابع پایه غیریک‌نواخت کسری بی-اسپلاین (نربز) از مرتبه‌های دو، سه و چهار برای تعریف هندسه مسئله و نیز تقریب‌زدن متغیرهای مجهول استفاده شده است. با توجه به استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول راینر-میندلین برای میدان جابه‌جایی، پیوستگی C^0 در اینجا کافی می‌باشد که توابع پایه نربز این پیوستگی را تأمین می‌نمایند. همچنین فرض شده است که پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک در راستای ضخامت به صورت خطی تغییر کنند. برای کاهش تأثیر پدیده قفل‌شدگی برشی در روابط سختی از روش بهبود پایداری استفاده شده است. از آنجا که بررسی کارایی و دقت روش ایزوژئومتریکی در حل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پیزوالکتریک جزو اهداف اصلی این مقاله است، مثال‌های متعدد عددی آورده شده و با سایر منابع موجود مقایسه گردیده است. نتایج بدست آمده مؤید دقت مطلوب و کارایی روش پیشنهادی است.

Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner-Mindlin theory

Sajjad Nikoei¹, Behrooz Hassani^{2*}

1- Department of Aerospace Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, b_hassani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 12 July 2017

Accepted 03 October 2017

Available Online 18 November 2017

Keywords:

Isogeometric analysis

Plates

Composite

Piezoelectric

ABSTRACT

This paper presents an isogeometric analysis approach for static and free vibration analysis of laminated composite plates covered with piezoelectric layers using the Reissner-Mindlin theory. Isogeometric analysis (IGA) aims at simplifying the Computer Aided Design (CAD) and Computer Aided Engineering (CAE) by using the functions describe the geometry (CAD) and the unknown fields (Analysis). The isogeometric approach has here been employed that utilizes the Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) of quadratic, cubic and quartic orders to approximate the variables defining geometry as well as the unknown functions. Using the Reissner-Mindlin first order shear deformation theory requires the C^0 -continuity of generalized displacements and the NURBS basis functions are well suited for this purpose. The electric potential is assumed to vary linearly through the thickness for each piezoelectric sublayer. To alleviate the shear locking problem, a stabilization technique is employed in the stiffness formulation. Since study of the performance and accuracy of IGA in solving laminated composite plates is one of the main objectives of this article. Several numerical examples are presented and compared with those available in the literature. The obtained results indicate desirable accuracy and efficiency of the proposed approach.

1- مقدمه

می‌توان به جواب آن‌ها اعتماد کرد. معادله دیفرانسیل حاکم از اصول پایه مکانیک حاصل می‌شود و بایستی در یک دامنه فیزیکی با شرایط مرزی مشخص حل شود. روش‌های مختلفی از قبیل تفاضل محدود، حجم محدود، روش‌های بدون

برای تحلیل مسائل مهندسی سازه با کمک رایانه، مهم‌ترین و اولین قدم ارائه و گسترش الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی حاکم است. این حل‌ها شاید جواب دقیقی از مسئله ارائه ندهند ولی تا حد قابل قبولی

Please cite this article using:

S. Nikoei, B. Hassani, Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner-Mindlin theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 181-191, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ایزوژئومتریکی پژوهش‌هایی صورت گرفته است. شجاعی و همکاران [5] تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش را بر روی ورق انجام دادند. کاپور [6] مطالعات خود را به تحلیل غیرخطی هندسی ورق‌های کامپوزیتی معطوف کرد. تحلیل ورق‌های ساندویچی با استفاده از نظریه مرتبه بالا توسط نگوین و همکاران [7] صورت گرفت. تای و همکاران [8] همان تحلیل، ولی این بار با استفاده از نظریه لایه‌ای⁸ را بر روی ورق‌ها انجام دادند. همچنین انصاری و همکاران [9] اثرات سطح را بر روی رفتار کمانش نانو ورق‌های از جنس مواد تابعی⁹ با استفاده از این روش بررسی کردند. انصاری و همکاران [10] در کار دیگری از تئوری گرادیان کرنش میندلین برای نانو پوسته‌های مواد تابعی بهره جستند. فرزامراد و همکاران [11] از این روش و تئوری تغییرشکل برشی شبه سه‌بعدی برای ورق‌های از جنس مواد تابعی استفاده نمودند.

در بسیاری از مجامع ملی و بین‌المللی، تحولات اساسی در راستای سازه‌های پیشرفته‌ای همچون اتومبیل‌ها، کشتی‌ها، فضاپیماها و علوم فضایی به وجود آمده است که به نام سازه‌های هوشمند¹⁰ شناخته می‌شوند. بحث معرفی سازه‌های هوشمند بعد از دهه هفتاد میلادی بسیار داغ شد. پژوهش بر روی پیش‌بینی خواص مؤثر و پاسخ کامپوزیت‌های هوشمند می‌تواند به دو روش تحلیلی و عددی صورت گیرد. روش تحلیل مشکلات و محدودیت‌های بسیاری دارد. از این رو محققین مجبور به استفاده از روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود کلاسیک شده‌اند. روش عددی که به تازگی مورد توجه محققین این عرصه قرار گرفته است، روش تحلیل ایزوژئومتریکی¹¹ است.

لیو و همکاران [12] با استفاده از نظریه مرتبه اول برشی، روش گلرکین بدون المان را برای تیرها و ورق‌های کامپوزیتی چندلایه با وصله‌های پیروالکتریک به کار برد. میلزو و اورلاندو [13] تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه ضخیم هوشمند را بررسی کردند.

در این پژوهش، به بررسی کارایی و دقت روش تحلیل ایزوژئومتریکی در حل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پیروالکتریک¹² پرداخته شده است. استفاده از این روش، که بر مبنای توابع پایه نربز استوار است، کار را برای توصیف متغیرها و تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد سازه‌های ورقی چندلایه کامپوزیتی راینر-میندلین به همراه لایه‌های پیروالکتریک هموار نموده است. برای نشان دادن دقت و کارایی این روش، مثال‌های متعدد عددی آورده شده و با سایر منابع موجود مقایسه گردیده است. نتایج بدست آمده مؤید دقت مطلوب و کارایی روش پیشنهادی است.

2- سطوح نربز

برای بیان توابع پایه بی-اسپلاین و نربز نیاز به بیان فضای پارامتریک است. یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد، به‌صورت رابطه (1) بیان می‌شود [14]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (1)$$

که در آن $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}\}$ توابع پایه بی-اسپلاین می‌باشند که بر روی بردارهای گرهی تعریف شده‌اند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آن‌گاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آن‌ها نوشت. به‌علاوه اگر در رابطه (1) تابع

شبکه، روش المان محدود و... برای حل عددی معادلات دیفرانسیل ارائه شده است که اغلب آن‌ها در حوزه مهندسی به کار گرفته شده‌اند. از بین این روش‌ها، روش المان محدود مورد توجه محققان زیادی قرار گرفت.

در روش المان محدود دامنه‌ی مسئله با المان‌هایی گسسته‌سازی می‌شود. هندسه‌ی هر المان تابعی از مختصات گره‌های آن و نوع توابع پایه انتخابی است. با به‌کارگیری اصل ایزوپارامتریک، توابع شکل یکسانی برای تقریب هندسه و فیزیک مسئله استفاده می‌شوند. استفاده از این نوع المان‌ها با توابع پایه چندجمله‌ای بیشترین استفاده را در کدهای تحلیلی المان محدود دارد، به‌طوری‌که واژه‌ی "المان محدود کلاسیک" به این نوع تحلیل اطلاق می‌شود. در سال‌های اخیر به علت استفاده گسترده از توابع پایه نربز در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر کوشش‌هایی توسط هیوز و همکارانش صورت پذیرفت تا از این توابع در تقریب فیزیک مسئله نیز استفاده شود [1]. با جایگزینی این توابع به جای توابع کلاسیک چندجمله‌ای در تحلیل المان محدود به نوآوری‌ها و دستاوردهای زیادی منجر شد و نام "ایزوژئومتریکی" بر آن نهاده شد. هدف از تحلیل ایزوژئومتریکی ساده‌سازی طراحی هندسه و تحلیل مهندسی به کمک کامپیوتر با استفاده از توابعی است که به توصیف هندسه و در عین حال مجهولات می‌پردازند.

توانایی توابع نربز در ایجاد پیوستگی مرتبه‌ی بالاتر از صفر در مرز المان‌ها اصلی‌ترین ویژگی آن‌ها است. این ویژگی سبب تولید هندسه‌های دقیق‌تر با توابع شکل نربز می‌شود؛ در نتیجه با استفاده از روش ایزوپارامتریک¹ می‌توان به جواب‌های دقیق‌تری برای فیزیک مسئله رسید.

پس از ارائه روش ایزوژئومتریکی تحقیقات وسیعی برای استفاده از آن در تحلیل‌های مکانیکی صورت پذیرفت. کوتزل و همکاران از آن در تحلیل ارتعاشات سازه‌ها استفاده کردند و نشان دادند استفاده از ایزوژئومتریکی خطای کمتری در تخمین فرکانس‌ها دارد [2]. بازیلو و همکاران به تحلیل ایزوژئومتریکی در برخورد سازه-سیال پرداختند [3]. حسینی و همکارانش از آن در بهینه‌سازی شکل بهره بردند [4].

کامپوزیت² یا مواد مرکب ترکیب فیزیکی از دو یا چند ماده مختلف است که این مواد خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده و مرز مشخصی را با یکدیگر تشکیل می‌دهند. این ترکیب در مجموع و با توجه به برخی معیارها، خواص بهتری نظیر سختی، خواص گرمایی، عمر خستگی و... را از هر یک از اجزای تشکیل‌دهنده خود را دارا می‌باشد.

چندین روش برای مدل‌سازی ورق‌های کامپوزیتی موجود است. یکی از مشهورترین این روش‌ها نظریه تک‌لایه معادل³ است که نظریه‌های کلاسیک⁴، تغییر شکل برشی مرتبه اول⁵ و تغییر شکل برشی مرتبه بالا⁶ را شامل می‌شود. نظریه مرتبه اول برشی ساده بود و نسبت به نظریه کلاسیک به علت شامل شدن کرنش‌های برشی عرضی، مناسب‌تر است. همچنین هزینه محاسباتی نظریه مرتبه اول از نظریه مرتبه بالاتر کمتر و به‌صرفه است. این نظریه که معروف به نظریه راینر-میندلین است در اجزای محدود نیاز به پیوستگی C^0 دارد.

بررسی ورق‌ها و پوسته‌های⁷ چندلایه به‌صورت تحلیلی و دقیق، چندان آسان نیست و عموماً از روش‌های عددی مانند تحلیل اجزای محدود و ایزوژئومتریکی استفاده می‌شود. در حوزه تحلیل ورق‌ها با استفاده از روش

¹ Isoparametric

² Composite

³ Equivalent Single-Layer (ESL)

⁴ Classical Laminated Plate Theory (CLT)

⁵ First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)

⁶ High-Order Shear Deformation Theory (HSDT)

⁷ Shells

⁸ Layerwise

⁹ Functionally Graded Material (FGM)

¹⁰ Smart Structures

¹¹ Isogeometric Analysis

¹² Piezoelectric

پایه‌ای نسبی تکه‌ای را به صورت رابطه (2) تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \quad (2)$$

رابطه (3) بدست خواهد آمد:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta)P_{i,j} \quad (3)$$

که یک سطح تولید شده با استفاده از ابزار نربرز است.

$$\varepsilon_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \varepsilon_m + z\varepsilon_b \quad (9)$$

بردار کرنش برشی عرضی $\varepsilon_s = [\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$ نیز با رابطه (10) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

معادله k امین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات محلی ورق چندلایه کامپوزیتی، با استفاده از قانون هوک و فرض تنش مسطح به صورت رابطه (11) نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (11)$$

که ثابت‌های خواص مواد اورتوتروپیک به صورت روابط (12) می‌باشند:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{44} = G_{23} \quad (12)$$

که در آن E_1 و E_2 ضرایب الاستیک در جهات اصلی مصالح، G_{ij} مدول‌های برشی و ν_{ij} ضرایب پواسون هستند.

کامپوزیت‌های چندلایه‌ای معمولاً از چندین لایه اورتوتروپیک با جهات الیاف مختلف ساخته می‌شوند. رابطه تنش-کرنش برای k امین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات کلی به صورت رابطه (13) می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (13)$$

که $\bar{Q}_{ij}$ ثابت‌های انتقال یافته مواد از k امین لایه به دستگاه مختصات سراسری هستند.

با توجه به قانون هوک و کرنش‌های خطی مطابق روابط (9) و (10) رابطه (14) حاصل می‌گردد:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = c\varepsilon \quad (14)$$

که σ_p و τ مؤلفه‌های تنش درون صفحه‌ای و تنش برشی و D و D^s نیز ماتریس‌های ثابت مواد هستند. D و مؤلفه‌هایش به صورت رابطه (15) و (16) خواهند بود:

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D^b \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (16)$$

مؤلفه‌های D^s نیز به صورت رابطه (17) بدست می‌آیند:

$$D_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \quad (17)$$

3- معادلات حاکم بر ورق‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک

در این بخش، معادلات حاکم بر ورق‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک و شکل ضعیف از معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس نظریه رایزنر- میندلین بیان می‌شود. فرض می‌شود که لایه‌ها کاملاً بهم چسبیده، الاستیک و اورتوتروپیک با مقدار جابه‌جایی و کرنش کوچک باشند. بر اساس این فرضیات، روابط خطی حاکم بر ورق‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک را می‌توان برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی به کار برد.

3-1- معادلات حاکم بر پیزوالکتریک خطی

معادلات خطی حاکم بر پیزوالکتریک به صورت رابطه (4) استخراج می‌شود [15]:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -e^T \\ e & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ E \end{bmatrix} \quad (4)$$

که σ و ε بردارهای تنش و کرنش هستند؛ D و E بردارهای جابه‌جایی دی‌الکتریک و میدان الکتریکی هستند. c ماتریس الاستیسیته، e ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و g ماتریس ثابت دی‌الکتریک است. به علاوه فرض می‌شود که میدان الکتریکی از تغییرات تابع پتانسیل الکتریکی بدست می‌آید: $E = -\nabla\psi$ (5)

3-2- شکل ضعیف

شکل ضعیف معادلات حاکم بر سازه‌های پیزوالکتریک با استفاده از اصل همپلتون به صورت رابطه (6) نوشته می‌شود [15]:

$$\delta L = 0 \quad (6)$$

که L تابع انرژی کلی است و شامل مجموع انرژی‌های جنبشی، کرنشی، دی‌الکتریک و کار خارجی است و به صورت رابطه (7) بسط داده می‌شود:

$$L = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u} \dot{u} - \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon + \frac{1}{2} D^T E + u f_s - \psi q_s \right) d\Omega + \sum u^T F_p - \sum \psi Q_p \quad (7)$$

که ρ چگالی جرم، u و $\dot{u}$ جابه‌جایی مکانیکی و سرعت، ψ پتانسیل الکتریکی، f_s و Q_p نیروهای سطحی و نقطه‌ای مکانیکی و q_s و Q_p نیز بارهای سطحی و نقطه‌ای الکتریکی هستند.

در رابطه (7) میدان جابه‌جایی مکانیکی u و میدان پتانسیل الکتریکی ψ توابع مجهول هستند که باید با تقریب‌های مناسب بدست آیند.

3-3- معادلات حاکم نظریه رایزنر- میندلین

بر اساس نظریه رایزنر- میندلین که یک نظریه مرتبه اول برشی است، میدان جابه‌جایی برای یک نقطه اختیاری در ورق به صورت رابطه (8) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

3-4- تقریب‌سازی روابط ورق کامپوزیتی بر اساس نریزها

برای تقریب میدان جابه‌جایی u در روش ایزوژمتریک از توابع پایه نریز استفاده می‌شود:

$$u^h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) q_i \quad (18)$$

که در آن $q_i = [u_i \ v_i \ w_i \ \beta_{xi} \ \beta_{yi}]^T$ بردار درجات آزادی برای نقطه کنترلی i است. کرنش‌های غشایی، خمشی و برشی با استفاده از این رابطه و تعاریف قبلی به صورت رابطه (19) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_m = \sum_{i=1} B_i^m q_i, \varepsilon_b = \sum_{i=1} B_i^b q_i, \varepsilon_s = \sum_{i=1} B_i^s q_i \quad (19)$$

که در آن

$$B_i^m = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ R_{i,y} & R_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & R_{i,y} & R_{i,x} \end{bmatrix}, \quad B_i^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & R_i & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,y} & 0 & R_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

در تحلیل استاتیکی ورق کامپوزیتی راینر-میندلین بدون در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک به رابطه (21) منجر می‌شود:

$$Kq = f \quad (21)$$

همچنین، برای تحلیل ارتعاش آزاد آن می‌توان نوشت:

$$(K - \omega^2 M)q = 0 \quad (22)$$

که در آن K ماتریس سختی کلی ورق،

$$K = \int_{\Omega} (B^m)^T A B^m d\Omega + \int_{\Omega} (B^m)^T B B^b d\Omega + \int_{\Omega} (B^b)^T B B^m d\Omega + \int_{\Omega} (B^b)^T D^b B^b d\Omega + \int_{\Omega} (B^s)^T D^s B^s d\Omega \quad (23)$$

f بردار نیرو،

$$f = \int_{\Omega} q_0 R d\Omega + f^b \quad (24)$$

و M ماتریس کلی جرم است

$$M = \int_{\Omega} R^T m R d\Omega \quad (25)$$

که در رابطه (25) m ماتریس جرم بوده و به صورت رابطه (26) تعریف می‌شود:

$$m = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

در روابط بالا ρ ، h و ω به ترتیب چگالی، ضخامت و فرکانس طبیعی هستند.

3-5- بهبود ترم برشی

قفل‌شدگی برشی یک پدیده شناخته شده در روش اجزای محدود با المانهای مرتبه پایین است. این نقص برای توابع شکل با درجات 5 و بالاتر از بین

می‌رود [16]. همانند اجزای محدود، برای توابع پایه نریز با درجات 2، 3 و 4، زمانی که ورق خیلی نازک است، قفل‌شدگی رخ می‌دهد. این اتفاق به دلیل باقی‌ماندن اثرات برشی در رابطه سختی است. برای فائق آمدن بر این مشکل، در اینجا از روش بهبود پایداری ارائه شده توسط لایلی [16] استفاده شده است. روند کار بدین صورت است که بخش برش در رابطه (17) توسط رابطه (27) تصحیح می‌شود:

$$\bar{D}^s = D^s \frac{h^2}{\beta l(h+l)} \quad (27)$$

که در آن l طول بلندترین وصله به کار رفته در مدل نریز و β یک مقدار ثابت مثبت در نظر گرفته می‌شود که از آزمایش عددی بدست می‌آید. با جایگذاری $\bar{D}^s$ در رابطه (23) به جای D^s مقدار سختی K بهبود خواهد یافت.

3-6- روابط ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک

در اینجا نوبت به بیان روابط ورق کامپوزیتی پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک رسیده است. در ابتدای امر، میدان پتانسیل الکتریکی را باید با تقریبی مناسب بیان نمود. میدان پتانسیل الکتریکی با جداسازی هر لایه پیزوالکتریک به زیرلایه‌هایی در راستای ضخامت تقریب زده می‌شود. با فرض خطی بودن تغییرات تابع پتانسیل الکتریکی در هر زیرلایه می‌توان نوشت:

$$\psi^i(z) = N_{\psi}^i \psi^i \quad (28)$$

که N_{ψ}^i بردار توابع پایه برای پتانسیل الکتریکی است که در آن $p = 1$ است. ψ^i بردار پتانسیل‌های الکتریکی سطوح بالایی و پایینی آمین زیرلایه است.

برای هر المان زیرلایه، میدان الکتریکی E که در رابطه (5) بیان شد، می‌تواند به صورت رابطه (29) بازنویسی شود:

$$E = -\nabla N_{\psi}^i \psi^i = -B_{\psi} \psi^i \quad (29)$$

برای انواع مواد پیزوالکتریک بررسی شده در این پژوهش، نیاز است تا ماتریس ثابت پیزوالکتریک e و ماتریس ثابت دی‌الکتریک g برای k آمین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات محلی به صورت رابطه (30) بیان شود:

$$e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)}, \quad g^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (30)$$

معمولاً چندلایه‌ها از چندین لایه اورتوتروپیک با جهت الیاف مختلف ساخته شده‌اند و به تبع آن، جهت‌های مشخصه‌ی متفاوتی برای خواص دی‌الکتریک و پیزوالکتریک وجود دارد. پس ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و دی‌الکتریک برای k آمین تک‌لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات کلی به صورت رابطه (31) بیان می‌شود:

$$e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{d}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{d}_{15} & 0 & 0 \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)}, \quad g^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (31)$$

که $\bar{d}_{ij}$ و $\bar{p}_{ij}$ ثابت‌های مواد انتقال‌یافته از k آمین تک‌لایه است و مشابه $\bar{Q}_{ij}$ محاسبه می‌شوند.

3-7- معادله حرکت

برای بدست آوردن معادله حرکت کافی است تا روابط (14) و (29) را در

(12) جایگذاری نمود، که در نهایت به شکل رابطه (32) در خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\psi} \\ K_{\psi u} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (32)$$

که در آن

$$K_{uu} = \int_{\Omega} B_u^T c B_u d\Omega, K_{u\psi} = \int_{\Omega} B_u^T c B_{\psi} d\Omega \\ K_{\psi\psi} = - \int_{\Omega} B_{\psi}^T p B_{\psi} d\Omega, M_{uu} = \int_{\Omega} N^T m N d\Omega \quad (33)$$

می‌باشد و $B_u = [B^m \ B^b \ B^s]$ نیز همان رابطه (20) است.

با جایگزین کردن سطر دوم رابطه (32) در سطر اول آن، رابطه (34)

به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\ddot{q} + (K_{uu} + K_{u\psi}K_{\psi\psi}^{-1}K_{\psi u})q = F + K_{u\psi}K_{\psi\psi}^{-1}Q \quad (34)$$

رابطه (34) معادله حاکم بر مسئله است و برای حل آن در تحلیل‌های

استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق از روش عددی تحلیل ایزوژئومتریک بیان شده، استفاده می‌گردد.

4- نتایج عددی

در این بخش، برای ارزیابی روش ایزوژئومتریک به بررسی مثال‌های عددی مختلفی پیرامون ورق‌ها پرداخته شده است. در این مثال‌ها، که نتایج تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد برای ورق‌های ایزوتروپیک، کامپوزیتی و کامپوزیتی به همراه لایه‌های پیزوالکتریک است، با روش‌های دیگر مقایسه و دقت و پایداری تحلیل به روش ایزوژئومتریک نشان داده شده است.

4-1- ورق ایزوتروپیک

در مثال اول، به تحلیل استاتیکی ورق مربع شکل (به طول a و ضخامت h) با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت بار یکنواخت $q_0 = 1$ پرداخته می‌شود. پارامترهای مواد استفاده شده برای این ورق عبارتند از: مدول یانگ $E = 1092000$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.3$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 100$. این بررسی با تعداد 6، 10، 18 و 34 نقطه کنترلی در هر لایه ورق صورت گرفته است.

در این مثال از المان‌های درجه دو، سه و چهار نربز استفاده شده است که مقایسه این المان‌ها بر اساس تعداد نقاط کنترلی در هر شبکه در شکل 1 نشان داده شده است. در شکل 2 تغییرشکل نرمال شده برای مرکز ورق با تکیه‌گاه ساده و گیردار نشان داده شده است. نتایج این مثال با حل دقیق [17] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود المان‌های درجه 3 و 4 نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهند. همچنین در المان‌های مرتبه دو مقدار کمی از قفل‌شدگی برشی مشاهده می‌شود.

در مثال دوم، عملکرد المان‌ها را هنگامی که ورق خیلی نازک می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. به صورت نظری با افزایش نسبت طول به ضخامت (a/h) اثرات برش کاهش پیدا کرده و جواب‌های نظریه رایزنر-میندلین به روش کیرشهف نزدیک می‌شود. در شکل 3 تغییر شکل مرکز ورق با تغییر نسبت a/h نشان داده شده است. در اینجا هم از روش انتگرال کامل و هم از بهبود پایداری استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود المان‌های نربز زمانی که ورق نازک می‌شود ($a/h \geq 100$) دچار قفل‌شدگی برشی می‌شوند که برای رفع آن از روش بهبود پایداری استفاده شده است.

در مثال سوم، عملکرد روش پیشنهاد شده را برای تحلیل استاتیکی ورق‌های ایزوتروپیک مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا ورق مربعی با طول a ، ضخامت h و شرایط مرزی ساده تحت بارگذاری یکنواخت در نظر

گرفته می‌شود. نسبت طول به عرض را ($a/b = 1$) فرض می‌شود. برای نسبت طول به ضخامت از مقادیر $a/h = 10, 50, 100$ استفاده می‌شود. همانند مثال‌های قبل، در این مثال نیز از مواد ایزوتروپیک استفاده می‌شود. ورق مربعی مورد نظر با استفاده از 35 نقطه کنترلی برای هر لایه مدل شده است. در ادامه این مثال به بررسی جابه‌جایی عرضی و گشتاور خمشی، که به صورت رابطه (35) بی‌بعد شده‌اند، پرداخته خواهد شد:

$$\bar{w} = (100Eh^3)w(a/2, b/2, 0)/q_0 a^4 \\ \bar{\sigma}_{xx} = h^2 \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)/q_0 a^2 \quad (35)$$

نتایج حاصل از این روش با نتایج روش تای [18] که یک حل ایزوژئومتریک با توابع نربز مرتبه 4 و تغییر شکل برشی مرتبه بالا است و نیز حل دقیق [19] مقایسه شده است. همان‌طور که از جدول 1 مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از این روش، علی‌رغم استفاده از نظریه مرتبه پایین‌تر، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

در مثال چهارم، تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای گیردار ایزوتروپیک بررسی شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد شده این ورق به صورت $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$ است که در آن $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ سختی پیچشی است. هندسه ورق دایروی در شکل 4 نمایش داده شده است. خواص ماده استفاده شده در این تحلیل عبارتند از: مدول یانگ $E = 1$ ، مدول برشی $G = E/2(1+\nu)$ نسبت پواسون $\nu = 0.3$ و چگالی $\rho = 1$ است. این ورق با 19×19 نقطه کنترلی مدل‌سازی شده است. در اینجا به بررسی ورق نازک و ضخیم با نسبت شعاع بر ضخامت $R/h = 10, 100$ پرداخته می‌شود. نتایج حاصل از روش نربز با دو شبکه‌بندی مختلف با روش بدون مش که توسط فریرا و همکاران [20]، نتایج روش تای [18] و حل دقیق [21] مقایسه شده است. چهار فرکانس اول ورق دایروی ایزوتروپیک گیردار در جدول 2 نشان داده شده است. نتایج بدست آمده از روش حاضر تطابق خیلی خوبی با سایر روش‌ها دارد. همچنین شش شکل مود اول ورق دایروی ضخیم گیردار با المان مرتبه 3 در شکل 5 نمایش داده شده است.

4-2- ورق کامپوزیتی

در مثال پنجم، به تحلیل استاتیکی ورق مربعی چندلایه [0 90 90 0] تحت بار سینوسی q و شرایط مرزی ساده پرداخته خواهد شد (شکل 6). نسبت طول به عرض این ورق $a/b = 1$ و نسبت طول به ضخامت برابر با $a/h = 4, 10, 100$ است. این ورق با 34×34 نقطه کنترلی مدل شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال به صورت رابطه (36) است:

$$E_1 = 25E_2; G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2; \\ \nu_{13} = 0.25 \quad (36)$$

نتایج حاصل از این مثال، در جدول 3 با نتایج حاصل از روش نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالای پیشنهادی ردی [22]، نتایج روش تای [23] و پژوهش ارائه شده توسط فریرا [24] که بر اساس روش کالوکیشن مرتبه بالا است مقایسه شده است. روش ارائه شده در اینجا تطابق قابل قبولی با سایر مقالات ارائه شده در این زمینه دارد.

جابه‌جایی مرکزی و تنش‌های بی‌بعد شده ورق مربعی چهار لایه [0 90 90 0] به صورت رابطه (37) بدست می‌آید:

$$\bar{w} = (100E_2h^3)w(a/2, b/2, 0)/q_0 a^4 \\ \bar{\sigma}_{xx} = h^2 \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{yy} = h^2 \sigma_{yy}(a/2, b/2, h/4)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{xy} = h^2 \sigma_{xy}(0, 0, h/2)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{xz} = h \sigma_{xz}(0, b/2, 0)/q_0 a \quad (37)$$

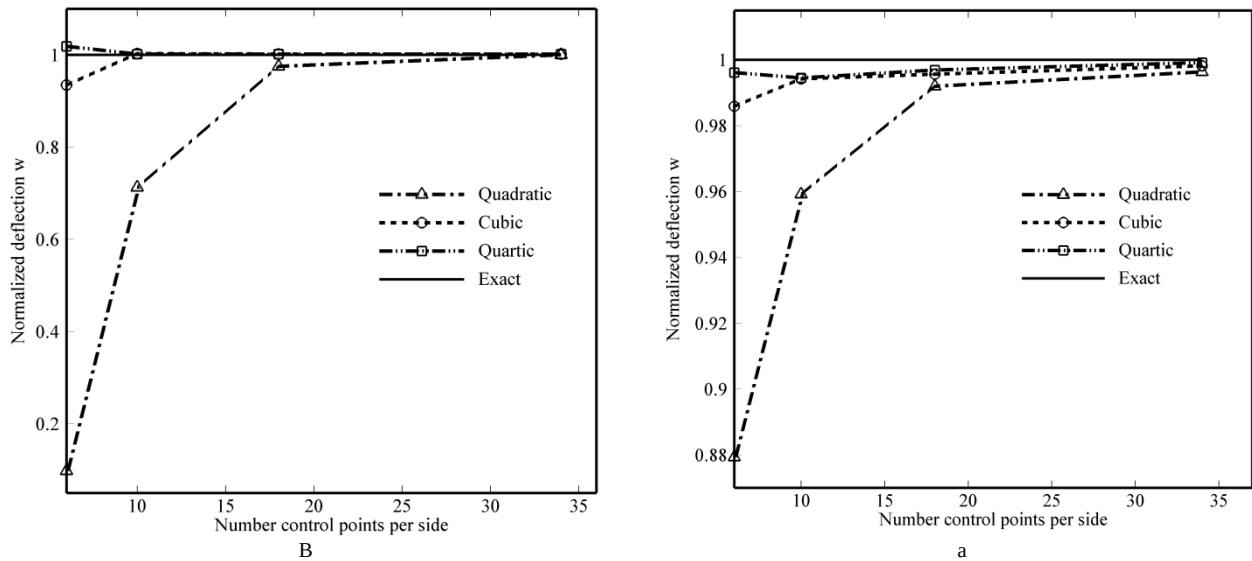


Fig. 1 Normalized deflection of isotropic plate subjected to uniform distributed load (a) Simply supported plate (b) Clamped plate

شکل 1 تغییر شکل بی‌بعد ورق ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت با شرایط مرزی (a) ساده (b) گیردار

همانند مثال قبل است با این تفاوت که $E_1/E_2 = 10, 20, 30, 40$ می‌باشد. فرکانس بی‌بعد شده ورق مربعی چهارلایه $[0 \ 90 \ 90 \ 0]$ با استفاده از رابطه $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ بدست می‌آید.

در مثال هشتم، همانند مثال چهارم، به بررسی ورق دایروی گیردار می‌پردازد با این تفاوت که صفحه مورد بحث کامپوزیتی است و از چهارلایه $[\theta - \theta - \theta \theta]$ با زاویه‌های $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ مورد مطالعه قرار می‌گیرند. هندسه ورق دایره‌ای مورد بحث در شکل 4 نمایش داده شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال، همانند مثال ششم (رابطه (38)) است. فرکانس بی‌بعد شده ورق مربعی چهار لایه $[\theta - \theta - \theta \theta]$ به‌صورت رابطه $\bar{\omega} = (\omega D^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ بدست می‌آید.

جدول 1 تنش و جابه‌جایی بی‌بعد ورق ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت و شرایط مرزی ساده

Table 1 A non-dimensional stress and deflection of isotropic plate under uniform load and simply supported boundary conditions

$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{w}$	روش	a/h
0.2779	4.8085	مرجع [18]	10
0.2762	4.7910	مرجع [19]	
0.2773	4.7853	مرتبه 2	
0.2773	4.7857	مرتبه 3	
0.2773	4.7857	مرتبه 4	50
0.2763	4.5959	مرجع [18]	
0.2762	4.5770	مرجع [19]	
0.2763	4.5715	مرتبه 2	
0.2763	4.5803	مرتبه 3	100
0.2763	4.5826	مرتبه 4	
0.2763	4.5892	مرجع [18]	
0.2762	4.5720	مرجع [19]	
0.2761	4.5826	مرتبه 2	100
0.2763	4.5926	مرتبه 3	
0.2764	4.5971	مرتبه 4	

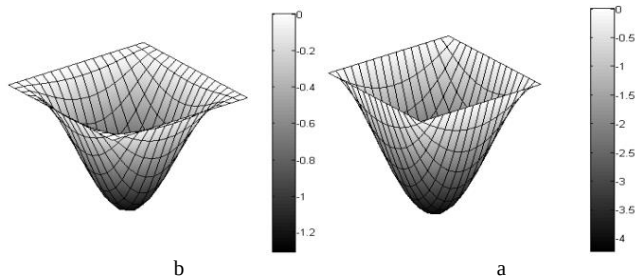


Fig. 2 Non-dimensional deflection of isotropic square plate subjected to uniform distributed load (a) Simply supported plate (b) Clamped plate

شکل 2 تغییر شکل بی‌بعد ورق مربعی ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت با شرایط مرزی (a) ساده (b) گیردار

در مثال ششم، به بررسی ورق مربع شکل سه‌لایه $[0 \ 90 \ 0]$ با شرایط مرزی گیردار و با نسبت $E_1/E_2 = 40$ پرداخته می‌شود. فرکانس بی‌بعد شده ورق با استفاده از رابطه $\bar{\omega} = (\omega b^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$ بی‌بعد شده که در این رابطه $D_0 = E_2 h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ است.

نسبت طول به عرض $a/b = 1$ و نسبت عرض به ضخامت برابر با $b/h = 5, 10, 100$ است. این ورق با 18×18 نقطه کنترلی مدل شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال به‌صورت رابطه (38) است.

$$E_1 = 40E_2; G_{12} = G_{13} = 0.6E_2; G_{23} = 0.5E_2; \nu_{13} = 0.25; \rho = 1 \quad (38)$$

نتایج حاصل از روش حاضر با روش لیو [25] که بر اساس روش تغییر شکل برشی مرتبه اول، فریرا [24] و روش تای [23] مقایسه و در جدول 4 آمده است. در ادامه شش شکل مود اول ورق گیردار سه‌لایه $[0 \ 90 \ 0]$ با $b/h = 10$ در شکل 7 با استفاده از المان مرتبه 3 نمایش داده شده است.

در مثال هفتم، ارتعاش آزاد ورق مربعی چهارلایه $[0 \ 90 \ 90 \ 0]$ با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. این در حالی است که ضخامت تمامی لایه‌ها را با هم برابر فرض می‌کنیم. نسبت طول به ضخامت $a/h = 5$ در نظر گرفته می‌شود. فرکانس اول نرمال شده در جدول 5 نمایش داده شده است. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از حل دقیق با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا [26]، روش ایزوتروپیک تای با المان مرتبه 4 [23] و فریرا [24] مقایسه شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال،

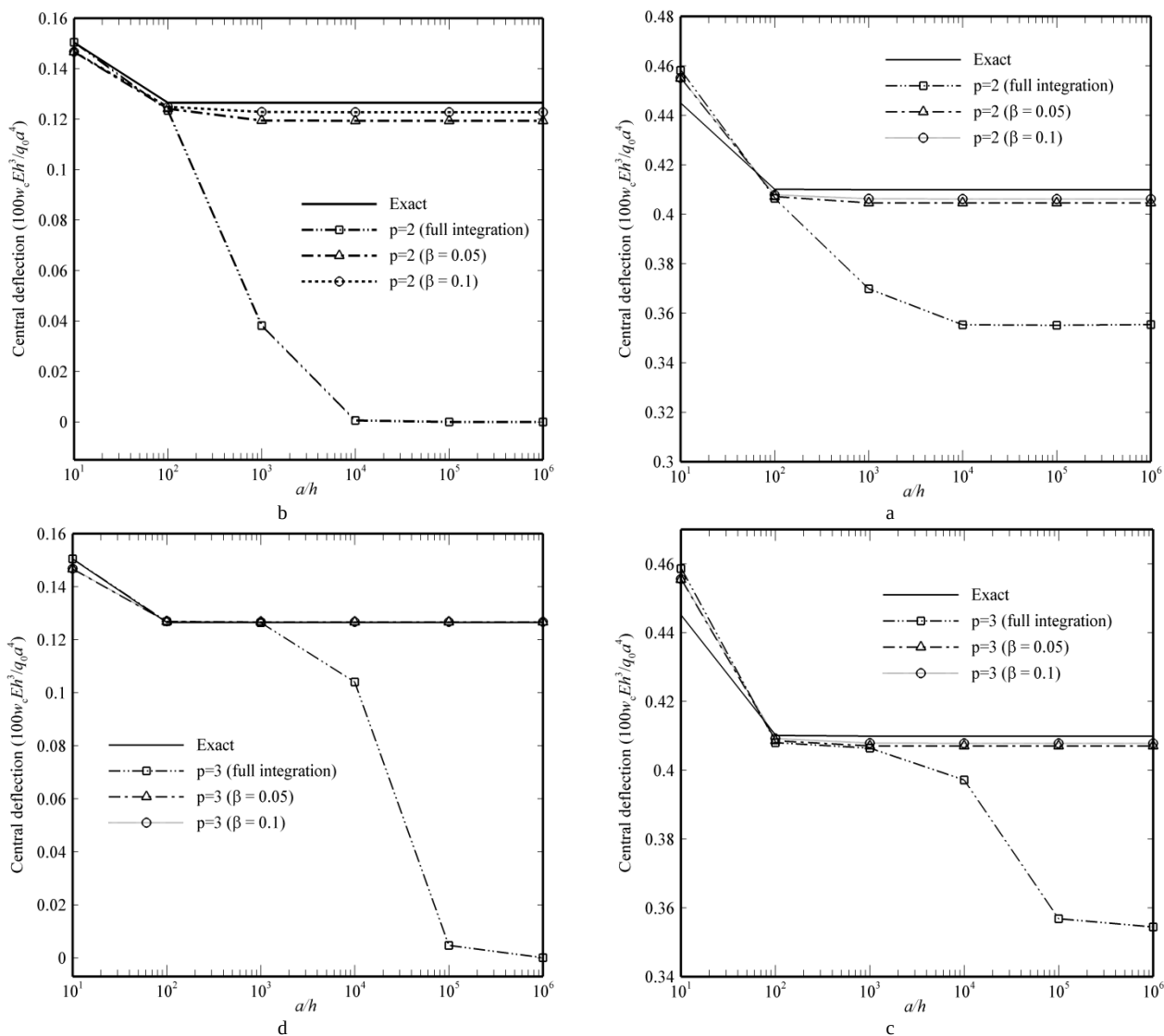


Fig. 3 Performance of present element with various a/h ratios of isotropic plates with various BCs (a) supported plate with $p=2$ (b) Clamped plate with $p=2$ (c) supported plate with $p=3$ (d) Clamped plate with $p=3$

شکل 3 عملکرد المان‌ها نسبت به تغییر a/h با شرایط مرزی مختلف در ورق ایزوتروپیک (a) ورق با تکیه‌گاه ساده و $p = 2$ (b) ورق با تکیه‌گاه گیردار و $p = 2$ (c) ورق با تکیه‌گاه ساده و $p = 3$ (d) ورق با تکیه‌گاه گیردار و $p = 3$

همان‌طور که از جدول 6 مشخص است نتایج حاصل از روش حاضر بسیار نزدیک به نتایج مراجع مربوطه است.

4-3- ورق کامپوزیتی دارای پیزوالکتریک

در مثال نهم، نوبت به تحلیل استاتیکی ورق مربعی کامپوزیتی پیزوالکتریک $(20\text{cm} \times 20\text{cm})$ تحت بارگذاری یکنواخت $q_0 = 100 \text{ N/m}^2$ رسیده است که شمایی از آن در شکل 8 نشان داده شده است. ورق مورد نظر به دو پیزوالکتریک سرامیکی در هر دو طرف بالا و پایین محدود می‌شود. این ورق شامل چهار لایه کامپوزیتی و دو لایه پیزوالکتریک است. ساختار بندی کامپوزیتی این ورق شامل $[\text{pie}/-\theta/\theta]_s$ و $[\text{pie}/-\theta/\theta]_{as}$ است. ضخامت هر لایه کامپوزیتی 1mm و ضخامت هر لایه پیزوالکتریک $\delta = 0.1\text{mm}$ است. ورق به ترتیب از مواد پیزوالکتریکی و کامپوزیتی T300/979 و PZT-G1195N ساخته شده و خواص آن‌ها در جدول 7 آمده است.

در جدول 8 جابه‌جایی مرکزی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی تحت

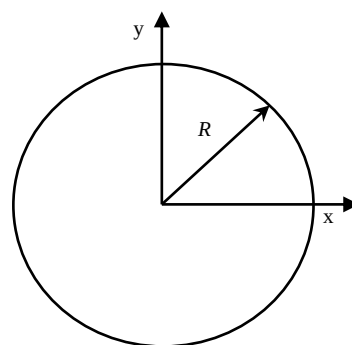


Fig. 4 Geometry of a circular isotropic plate

شکل 4 هندسه ورق دایروی ایزوتروپیک

در جدول 6 پنج فرکانس اول ورق دایروی با نسبت قطر به ضخامت $D/h = 10$ نمایش و با دو روش المان MISQ20 مرجع [27] که از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده و همچنین، با روش اختلاف حداقل مربعات [28] که از همان نظریه استفاده نموده، مقایسه شده است.

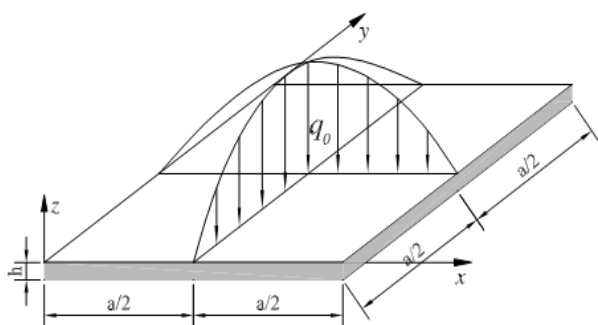


Fig. 6 Geometry of a square laminated plate under sinusoidal distributed load [18]

شکل 6 هندسه ورق چندلایه تحت بارگذاری سینوسی [18]

جدول 3 جابه‌جایی و تنش بی‌بعد ورق مربعی چندلایه [0 90 90 0] با شرایط مرزی ساده و بارگذاری سینوسی

Table 3 The normalized stress and displacement of a simply supported [0 90 90 0] square laminated plate under sinusoidal load

$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{w}$	روش	a/h
0.2109	0.0450	0.6463	0.6806	1.8939	مرجع [22]	4
0.1399	0.0308	0.5758	0.4055	1.7164	مرجع [23]	
0.2686	0.0461	0.5764	0.4059	1.7095	مرجع [24]	
0.1514	0.0363	0.5859	0.3916	1.7084	مرتبه 2	
0.1519	0.0364	0.5862	0.3918	1.7119	مرتبه 3	
0.1515	0.0364	0.5862	0.3917	1.7147	مرتبه 4	
0.2697	0.0273	0.3974	0.5589	0.7149	مرجع [22]	10
0.1669	0.0242	0.3610	0.4983	0.6654	مرجع [23]	
0.3181	0.0241	0.3614	0.4989	0.6627	مرجع [24]	
0.3160	0.0241	0.3616	0.5003	0.6642	مرتبه 2	
0.3137	0.0241	0.3615	0.5005	0.6655	مرتبه 3	
0.3153	0.0241	0.3617	0.5004	0.6666	مرتبه 4	
0.2948	0.0217	0.2769	0.5507	0.4343	مرجع [22]	100
0.1907	0.0213	0.2702	0.5376	0.4354	مرجع [23]	
0.3390	0.0213	0.2704	0.5381	0.4335	مرجع [24]	
0.1863	0.0211	0.2714	0.5363	0.4318	مرتبه 2	
0.1874	0.0211	0.2712	0.5361	0.4327	مرتبه 3	
0.0211	0.0211	0.2714	0.5364	0.4334	مرتبه 4	

فرکانس‌های طبیعی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریک پرده‌ای شده است. ورق مورد بررسی در این قسمت یک 5 لایه‌ی کامپوزیتی-پیزوالکتریک است که به‌صورت [pie/0/90/0/pie] لایه‌چینی شده است. این ورق با تیکه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول $h/a = 1/50$ برای هر لایه کامپوزیتی و استفاده از ماده Gr/Ep مدل‌سازی شده است. برای لایه‌های پیزوالکتریک از جنس PZT-4 و ضخامت $0.1h$ برای هر دولایه بالایی و پایینی استفاده شده است.

در جدول 9 فرکانس اول بی‌بعد ورق کامپوزیتی پیزوالکتریک با شبکه‌بندی 8×8 و المان‌های مرتبه 2، 3 و 4 آمده است. فرکانس اول بی‌بعد شده از رابطه $\bar{\omega} = \omega_1 a^2 / (1000 h \sqrt{\rho})$ بدست می‌آید. فرکانس حاصل از روش حاضر با مراجع [31,30,15] مقایسه و همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از دقت قابل قبولی برخوردار هستند.

بارگذاری یکنواخت و بدون ولتاژ ورودی با تیکه‌گاه ساده آمده است. این نتایج تطابق قابل قبولی با مراجع [29,15] دارند.

در مثال دهم، به بررسی دقت و تأثیر تحلیل ایزوتروپیک بر روی

جدول 2 فرکانس‌های بی‌بعد ($\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$) ورق دایروی گیردار ایزوتروپیک

Table 2 A non-dimensional frequency parameter $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$ of an isotropic clamped circular plate

R/h	روش	شبکه کنترلی	1	2	3	4	مودها
10	مرتبه 2	11×11	10.013	20.572	32.809	37.302	
		19×19	9.943	20.188	32.231	36.511	
	مرتبه 3	11×11	9.944	20.197	32.341	36.632	
		19×19	9.943	20.188	32.231	36.511	
	مرتبه 4	11×11	9.943	20.188	32.239	36.521	
		19×19	9.943	20.188	32.231	36.511	
100	مرتبه 2	-	9.931	20.194	32.353	36.665	مرجع [20]
		-	9.943	20.188	32.231	36.511	مرجع [18]
	مرتبه 3	-	9.941	20.232	32.406	36.479	مرجع [21]
		-	9.941	20.232	32.406	36.479	
	مرتبه 4	11×11	13.824	24.249	37.249	42.213	
		19×19	10.213	21.257	34.868	39.813	
1000	مرتبه 2	11×11	10.263	22.006	36.761	42.027	
		19×19	10.213	21.248	34.847	39.734	
	مرتبه 3	11×11	10.214	21.281	34.995	40.364	
		19×19	10.213	21.248	34.846	39.733	
	مرتبه 4	-	10.266	21.448	35.255	40.290	مرجع [20]
		-	10.213	21.248	34.847	39.734	مرجع [18]
10000	مرتبه 4	-	10.231	21.268	34.980	39.622	مرجع [21]
		-	10.231	21.268	34.980	39.622	

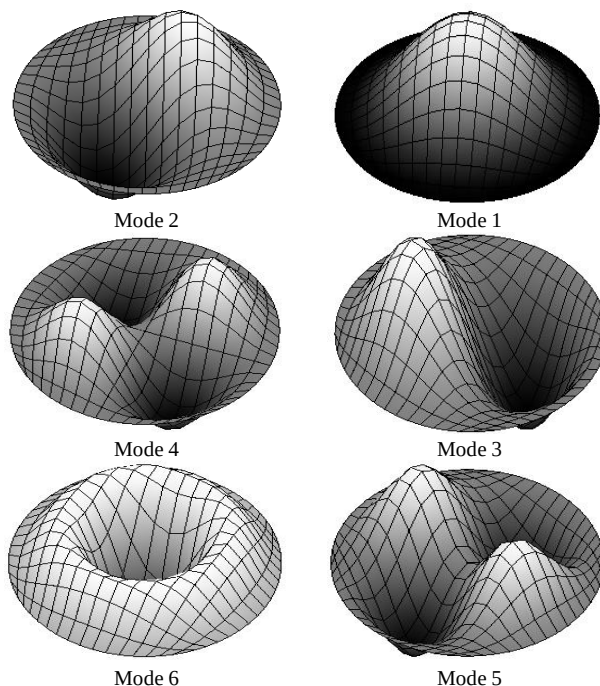


Fig. 5 The first six mode shapes of an isotropic clamped circular thick plate using the cubic element

شکل 5 شش شکل مود اول ورق دایروی ایزوتروپیک گیردار ضخیم با استفاده از المان مرتبه سه

برای المان‌های مرتبه پایین اتفاق می‌افتد، روش بهبود پایداری پیشنهاد شد که نتایج حاصل از آن، در مقایسه با نظریه‌های مرتبه بالاتر، بسیار مناسب ارزیابی شد.

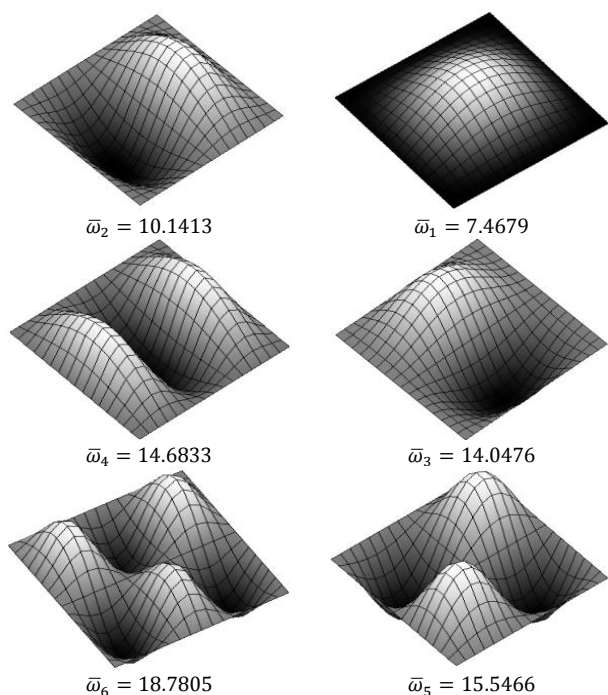


Fig. 7 The first six mode shapes of a [0 90 0] clamped laminated plate with $b/h = 10$ and $a/b = 1$ using the cubic element

شکل 7 شش شکل مود اول صفحه مربعی سه‌لایه [0 90 0] گیردار با استفاده از المان مرتبه سه ($a/b = 1$ و $b/h = 10$)

جدول 5 فرکانس اول بی‌بعد ورق مربعی ($a/b = 1$) چندلایه [0 90 90 0] با شرایط مرزی ساده

Table 5 A non-dimensional frequency of a [0 90 90 0] simply supported laminated square plate ($a/b = 1$)

E_1/E_2				تعداد نقاط	
40	30	20	10	کنترلی در هر لبه	روش
13.9596	13.6379	13.1468	12.2487	9	مرجع [24]
10.8117	10.2889	9.5375	8.2794	17	
10.8130	10.2902	9.5388	8.2807	9	مرجع [23]
10.8121	10.2892	9.5378	8.2797	13	
10.8118	10.2890	9.5376	8.2790	17	
10.8540	10.3260	9.5671	8.2982		مرجع [26]
9.9573	9.5432	9.0134	8.2955	9	مرتبه 2
9.9492	9.5343	9.0033	8.2823	13	
9.9488	9.5338	9.0027	8.2815	17	
10.8141	10.2945	9.5330	8.2819	9	مرتبه 3
10.8139	10.2942	9.5327	8.2815	13	
10.8139	10.2942	9.5327	8.2811	17	
10.8139	10.2942	9.5328	8.2815	9	مرتبه 4
10.8139	10.2942	9.5327	8.2815	13	
10.8138	10.2942	9.5327	8.2815	17	

جدول 4 پنج فرکانس اول بی‌بعد ورق مربعی ($a/b = 1$) چندلایه [0 90 0] با شرایط مرزی گیردار

Table 4 A non-dimensional frequency of a [0 90 0] clamped laminated square plate ($a/b = 1$)

b/h	روش	مودها				
		5	4	3	2	1
5	مرجع [23]	9.7403	9.1862	7.7000	6.6433	4.4471
	مرجع [25]	9.7380	9.1850	7.7000	6.6420	4.4470
	مرجع [24]	9.7393	9.1851	7.6996	6.6422	4.4466
	مرتبه 2	10.1438	8.9477	7.7277	6.2660	4.4506
	مرتبه 3	10.1433	8.9463	7.7276	6.2657	4.4505
10	مرتبه 4	10.1433	8.9462	7.7276	6.2657	4.4505
	مرجع [23]	15.8121	15.4463	13.9149	10.4016	7.4133
	مرجع [25]	15.8060	15.4290	13.9130	10.3930	7.4110
	مرجع [24]	15.8061	15.4403	13.9128	10.3944	7.4106
	مرتبه 2	15.5480	14.6899	14.0481	10.1428	7.4681
100	مرتبه 3	15.5467	14.6834	14.0476	10.1413	7.4679
	مرتبه 4	15.5466	14.6833	14.0476	10.1413	7.4679
	مرجع [23]	38.1465	36.9392	25.1828	17.7822	14.6003
	مرجع [25]	39.1570	35.5320	24.5110	17.6140	14.6660
	مرجع [24]	39.5489	37.8851	25.1868	17.5426	14.4455
مرتبه 2	مرتبه 2	38.0275	37.4776	25.0073	17.5647	14.4855
	مرتبه 3	37.9448	35.1706	24.2662	17.4073	14.4626
	مرتبه 4	37.9445	35.1296	24.2597	17.4068	14.4626

5- نتایج

در این مقاله تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد با استفاده از روش ایزوژئومتریک بر روی ورق‌های ایزوتروپیک، کامپوزیت و کامپوزیت-پیزوالکتریک با شکل‌های گوناگون و با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین انجام شد. یکی از فواید استفاده از روش ایزوژئومتریک، راحتی افزایش مرتبه توابع پایه نسبت به اجزای محدود کلاسیک است. همان‌طور که دیده شد، با استفاده از توابع پایه مرتبه 2، 3 و 4 همگرایی بسیار خوبی در پاسخ‌ها (جابه‌جایی، تنش و فرکانس طبیعی) مشاهده می‌شود. همچنین مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاط کنترلی، که در روش ایزوژئومتریک به راحتی صورت می‌گیرد، در هر لبه ورق روند همگرایی به پاسخ بسیار مناسب صورت پذیرفت. از فواید دیگر این روش، توصیف دقیق هندسه است که در مسائل خاص، نظیر صفحه مدور، این توانایی نشان داده شد. در استفاده از توابع پایه نربز در نظریه رایزنر-میندلین پیوستگی C^0 کفایت می‌نماید که این خود سهولت در محاسبات و کاهش هزینه‌های محاسباتی را سبب می‌شود. در پژوهش حاضر برای جلوگیری از قفل‌شدگی برشی، که با نازک شدن ورق

جدول 8 تغییر شکل مرکزی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی تحت بارگذاری یکنواخت و تکیه‌گاه ساده ($\times 10^{-4}$ m)

Table 8 Central control point/node deflection of the simply supported piezoelectric composite plate subjected to uniform load ($\times 10^{-4}$ m)

مرتبۀ 3	مرتبۀ 2	مرجع [29]	مرجع [15]	طرح لایه‌ها
-0.6345	-0.6343	-0.6326	-0.6343	$[pie/-45/45]_s$
-0.6204	-0.6202	-0.6323	-0.6217	$[pie/-45/45]_{as}$
-0.6582	-0.6576	-0.6688	-0.6593	$[pie/-30/30]_{as}$
-0.7402	-0.7387	-0.7442	-0.7422	$[pie/-15/15]_{as}$

جدول 9 فرکانس اول بی‌بعد ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی با $[pie/0/90/0/pie]$ تکیه‌گاه ساده

Table 9 Dimensionless first natural frequency of the simply supported square piezoelectric composite plate $[pie/0/90/0/pie]$

فرکانس بی‌بعد	درجات آزادی	شبکه‌بندی	روش
235.100	720	8×8	مرجع [15]
234.533	2208	12×12	مرجع [30]
245.941	-	-	مرجع [31]
235.887	500	8×8	مرتبۀ 2
235.866	605	8×8	مرتبۀ 3
235.865	720	8×8	مرتبۀ 4

6- مراجع

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 39–41, pp. 4135–4195, 2005.
- [2] J. A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T. J. R. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 41–43, pp. 5257–5296, 2006.
- [3] Y. Bazilevs, V. M. Calo, T. J. R. Hughes, Y. Zhang, Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 3–37, 2008.
- [4] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, N. Z. Moghadam, Application of isogeometric analysis in structural shape optimization, *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 846–852, 2011.
- [5] S. Shojaei, V. Valizadeh, E. Izadpanah, T. Bui, T.V. Vu, Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1677–1693, 2012.
- [6] H. Kapoor, R. Kapania, Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 12, pp. 3434–3447, 2012.
- [7] H. Nguyen-Xuan, C. H. Thai, T. Nguyen-Thoi, Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, No. 6, pp. 558–574, 2013.
- [8] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 104, No. 20, pp. 196–214, 2013.
- [9] R. Ansari, A. Norouzzadeh, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 84, No. 12, pp. 84–97, 2016.
- [10] R. Ansari, R. Gholami, A. Norouzzadeh, Size-dependent thermo-mechanical vibration and instability of conveying fluid functionally graded nanoshells based on Mindlin's strain gradient theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 105, No. 15, pp. 172–184, 2016.
- [11] S. Amir Farzam-Rad, B. Hassani, A. Karamodin, Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 108, No. 15, pp. 174–189, 2017.
- [12] K. M. Liew, H. K. Lim, M. J. Tan, X. Q. He, Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, Vol. 29, No. 6, pp. 486–497, 2002.
- [13] A. Milazzo, C. Orlando, An equivalent single-layer approach for free vibration analysis of smart laminated thick composite plates, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 075031, 2012.
- [14] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS book*, Second Edition, pp. 47–116, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [15] P. Phung-Van, L. D. Lorenzis, C. H. Thai, M. A. Wahab, H. Nguyen-Xuan, Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements, *Computational Materials Science*, Vol. 96, Part B, No. 14,

جدول 6 پنج فرکانس اول بی‌بعد ورق گیردار دایروی چندلایه $[\theta - \theta - \theta - \theta]$

Table 6 A non-dimensional frequency parameter of a circular four layer $[\theta - \theta - \theta - \theta]$ clamped laminated plate

θ	روش	مودها	1	2	3	4	5
0	مرجع [27]	مرتبۀ 2	22.123	29.768	41.726	42.805	50.756
	مرجع [28]	مرتبۀ 3	22.211	29.651	41.101	42.635	50.309
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 2	22.118	28.510	41.246	42.150	52.580
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	22.100	28.379	41.192	42.094	50.412
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 4	22.099	28.373	41.186	42.092	50.066
	مرجع [27]	مرتبۀ 4	22.698	31.568	43.635	44.318	53.468
15	مرجع [28]	مرتبۀ 2	22.774	31.455	43.350	43.469	52.872
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	22.745	30.453	41.427	43.401	54.911
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 4	22.731	30.339	40.856	43.355	53.079
	مرتبۀ 2	مرتبۀ 2	24.046	36.399	44.189	52.028	57.478
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	24.071	36.153	43.968	51.074	56.315
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 4	24.108	35.245	44.174	49.310	55.635
30	مرتبۀ 2	مرتبۀ 2	24.100	35.176	44.134	48.954	55.497
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	24.099	35.174	44.133	48.929	55.490
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 4	24.752	39.181	43.607	56.759	56.967
	مرتبۀ 2	مرتبۀ 2	24.766	39.441	43.817	57.907	57.945
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	24.821	38.041	44.038	54.940	56.257
	مرتبۀ 4	مرتبۀ 4	24.814	37.997	43.993	54.803	56.030
45	مرتبۀ 2	مرتبۀ 2	24.814	37.996	43.992	54.796	56.019
	مرتبۀ 3	مرتبۀ 3	24.814	37.996	43.992	54.796	56.019

جدول 7 جدول خواص مواد پیزوالکتریک و کامپوزیت

Table 7 Material properties of piezoelectric and composite materials

خواص	PZT-4	PZT-G1195N	T300/979	Gr/Ep
خواص الاستیک				
$(GPa) E_{11}$	81.3	63	150	132.38
$(GPa) E_{22}$	81.3	63	9	10.76
$(GPa) E_{33}$	64.5	63	9	10.76
$(GPa) G_{12}$	30.6	24.2	7.1	3.61
$(GPa) G_{13}$	25.6	24.2	7.1	5.65
$(GPa) G_{23}$	25.6	24.2	2.5	5.65
ν_{12}	0.33	0.3	0.3	0.24
ν_{23}	0.43	0.3	0.3	0.24
ν_{13}	0.43	0.3	0.3	0.49
چگالی جرم				
$(kg/m^3)\rho$	7600	7600	1600	1578
ضرایب پیزوالکتریک				
$(m/V) d_{31}$	-1.22e-10	2.54e-10	-	-
$(m/V) d_{32}$	-1.22e-10	2.54e-10	-	-
$(m/V) d_{15}$	-	-	-	-
خواص الکتریکی				
$(F/m) p_{11}$	1475	15.3e-9	-	-
$(F/m) p_{22}$	1475	15.3e-9	-	-
$(F/m) p_{33}$	1300	15.0e-9	-	-

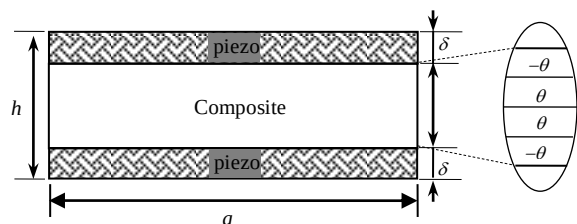


Fig. 8 Scheme square piezoelectric composite plate model

شکل 8 نمایی از ورق مربعی کامپوزیتی پیزوالکتریکی مدل شده

- method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 3, pp. 424–432, 2009.
- [25] K. Liew, Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 3, pp. 343–360, 1996.
- [26] A. Kdheir, Analysis of symmetric cross-ply elastic plates using a higher-order theory, part II: buckling and free vibration, *Composite Structures*, Vol. 9, No. 4, pp. 259–277, 1988.
- [27] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, No. 1-2, pp. 205–223, 2008.
- [28] K. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 19, pp. 2203–2222, 2003.
- [29] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Le-Dinh, H. Nguyen-Xuan, Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3), *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 9, pp. 095026, 2013.
- [30] D. A. Saravanas, P. R. Heyliger, D. A. Hopkins, Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 3, pp. 359–378, 1997.
- [31] P. Heyliger, D. A. Saravanas, Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 98, No. 3, pp. 1547–1557, 1995.
- pp. 495–505, 2015.
- [16] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plate model, *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 110, No. 3, pp. 343–357, 1993.
- [17] R. L. Taylor, F. Auricchio, Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements. Part II– A simple triangle, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 18, pp. 3057–3066, 1993.
- [18] H. Thai Chien, H. Nguyen-Xuan, SPA. Bordas, N. Nguyen-Thanh, T. Rabczuk, Isogeometric analysis of laminated composite plates using the higher-order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 6, pp. 451–469, 2012.
- [19] G. Akhras, M. S. Cheung, W. Li, Finite strip analysis for anisotropic laminated composite plates using higher-order deformation theory, *Computers and Structures*, Vol. 52, No. 3, pp. 471–477, 1994.
- [20] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, A. M. A. Neves, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares, K. M. Liew, Buckling and vibration analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 3, pp. 592–606, 2011.
- [21] K. Liew, C. M. Wang, Y. Xiang, S. Kitipornchai, *Vibration of Mindlin plates*, pp. 5–26, Amsterdam, Elsevier, 1998.
- [22] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 745–752, 1984.
- [23] H. Thai Chien, H. Nguyen-Xuan, N. Nguyen-Thanh, T. H. Le, T. Nguyen-Thoi, T. Rabczuk, Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 91, No. 6, pp. 571–603, 2012.
- [24] A. J. M. Ferreira, L. M. S. Castro, S. Bertoluzza, A high order collocation