



به روزرسانی غیر خطی اتصال فلز-کامپوزیت پیچی تک لبه با استفاده از تقریب مرتبه بالای دامنه پاسخ

مجید پورقاسم¹، احمد ناجی قزوینی²، حسین گل پرور^{3*}

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه امام حسین (ع)، تهران

2- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه امام حسین (ع)، تهران

* صندوق پستی 16158/193، hgolparvar@ihu.ac.ir، تهران

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 تیر 1396

پذیرش: 25 شهریور 1396

ارائه در سایت: 11 آبان 1396

کلید واژگان:

غیر خطی

اتصال هیبریدی

المان لایه میانی

پاسخ فرکانسی غیرخطی

چکیده

استفاده از اتصالات هیبریدی (فلز-کامپوزیت) در صنایع هوایی به دلیل وزن کم و استحکام بالا روند رو به رشدی دارد. بررسی رفتار دینامیکی این اتصال، به علت محدودیت در افزایش پیش بار پیچ در زیرسازه کامپوزیتی به دلیل تخریب آن، از اهمیت ویژه ای برخوردار است. عوامل تأثیر گذار بر رفتار غیرخطی اتصال شامل کم بودن پیش بار پیچ و بالا بدون دامنه نیروی تحریک اعمالی به سازه می باشند. مدل لایه میانی به منظور توصیف بهتر رفتار اتصال در سازه ها در سال های اخیر مورد استفاده قرار گرفته شده است. در این تحقیق با استفاده از تئوری لایه میانی دو بعدی، تأثیرات رفتار اتصال بر سازه کلی در دو بخش افزایش میرایی و کاهش سفتی که منجر به ایجاد پدیده غیرخطی می شود بررسی شده است. ویژگی سفتی اتصال را به وسیله سفتی نرمال و میرایی اتصال را با استفاده از میرایی سازه ی در راستای برشی، مدل سازی شده است. نمودارهای پاسخ فرکانسی غیرخطی در دو پیش بار و برای دو نیروی تحریک مختلف استخراج شده است و به وسیله تقریب چندجمله ای مرتبه بالا بر حسب دامنه پاسخ مدل اجزا محدود غیر خطی برای سفتی و میرایی اتصال پیشنهاد شده است. تأثیر افزایش دامنه نیروی تحریک و کاهش پیش بار پیچ بر افزایش غیر خطی با این مدل اجزا محدود استخراج شده است. نتایج نشان می دهد که مدل اجزا محدود غیرخطی ارائه شده، با نتایج بدست آمده از تست ارتعاشی غیر خطی با دقت بالایی مطابقت دارد.

Nonlinear model updating of composite-metal single lab bolted joint using high order response amplitude approximation

Majid Pour Ghasem¹, Ahmad Naji Ghazvini², Hosein Gholparvar^{1*}

1- Department of Engineering, IHU, Tehran, Iran.

2- Department of Aerospace Engineering, MUT, Tehran, Iran.

* P.O.B. 16158/193 Tehran, Iran, hgolparvar@ihu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 July 2017
Accepted 16 September 2017
Available Online 02 November 2017

Keywords:
Nonlinear
Hybrid Joint
Thin Layer Element
Nonlinear Frequency Response

ABSTRACT

Hybrid joints (Metal-Composite) are being used more and more in aerospace industry due to their low weight and high strength. Dynamic study of this joint, owing to limitation of increase in screw's preload in composite substructure, has certain importance. Effective factors on nonlinear behavior of the joint are low preload of the screw and high excitation force amplitude on the structure. Layer Element Model has been used to better the description of joint's behavior in recent years. In this study effects of nonlinear behavior of joint on the structure has been investigated using 2D layer element theory in two divisions: increase of damping and decrease of stiffness which result in nonlinearity. Stiffness characteristics of the joint were modeled with normal stiffness and damping characteristics of the joint with structural damping in shear direction. Nonlinear frequency response function for two preload and two excitation forces was extracted and nonlinear finite element model for stiffness and damping of the joint is suggested by High-order polynomial approximation in terms of response amplitude. Effects of increase of excitation force amplitude and decrease of screw's preload on increase of nonlinearity was extracted by this finite element model. Results indicate that the presented nonlinear finite element model corresponds closely to nonlinear vibration tests.

1- مقدمه

قطعیتهای زیادی روبرو می شوند به مانند سازه های هیبریدی¹ (فلز-کامپوزیت). از زمان شروع به کارگیری مواد کامپوزیت در سازه های هوافضایی، استفاده از آنها به طور پیوسته ای در حال افزایش بوده است. علاوه بر

گاهی مهندسان با سازه هایی روبرو می شوند که قبلاً همانند آن را ندیده و از این جهت در فرایند طراحی، مدل سازی و تحلیل آن با گلوگاه ها و عدم

¹ Hybrid

2- فرمولاسیون مدل سازی اتصال

تاکنون انواع مدل‌های اتصال، برای دو تیر فلزی همسان ارائه شده است. مطابق شکل 1 در این تحقیق یک اتصال متفاوت شامل یک تیر فلزی و یک تیر کامپوزیتی شبه ایزوتروپیک با مدول‌های الاستیسته متفاوت در راستای خمشی بررسی شده است. تیر کامپوزیتی به دلیل رفتار شبه ایزوتروپیک دارایی رفتار مشابه تیر فلزی در راستای خمشی عرضی می‌باشد.

مهمترین نکته در مدل اتصال این است که، مدل ارائه شده بر دید فیزیکی حاکم بر اتصال انطباق داشته باشد. در تئوری لایه میانی که توسط دزایی ارائه شده است [9]، فرض بر آن است که سفتی در راستای نرمال و برشی به صورت مجزا⁶ می‌باشند و تغییرات سفتی در راستای X مطابق شکل 2 قابل نظر است و ضخامت لایه میانی در فاصله‌ی تاریختی دو تیر H مدل سازی شده است.

2-1- مدل سازی خطی اتصال

المان لایه میانی مورد استفاده برای مدل سازی اتصال به صورت المان غشاء مستطیلی با درجات آزادی چرخشی⁷ فرض شده است [14]. به منظور محاسبه ماتریس سفتی المان، روابط سازگاری (تنش- کرنش) ماتریس [D] مطابق رابطه ی (2) تعیین شده است.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & G_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

همان‌طور که در تئوری لایه میانی ذکر شده است، عناصر خارج از قطر اصلی به دلیل مجزا بودن سفتی در راستای نرمال و برشی برابر صفر می‌باشند. تنها کافی است ماتریس [D] در رابطه‌ی (3) قرار داده شود که در آن L طول المان، H عرض و t ضخامت لایه میانی می‌باشند (شکل 2).

$$[K^e] = t \int_0^L \int_0^L [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3)$$

ماتریس B به صورت $[B] = [L][N]$ می‌باشد که در آن [N] ماتریس توابع شکل⁸ و [L] ماتریس مشتقات در حالت دو بعدی می‌باشند [14]. تنها کافیست تا پارامترهای E_c و G_c با استفاده از نتایج تست شناسایی شوند تا رفتار خطی اتصال به درستی مدل سازی و به‌روزرسانی شود.

2-2- مدل سازی غیر خطی اتصال

همان‌طور که در تحقیقات قبل نشان داده شده است، شروع ناحیه غیرخطی

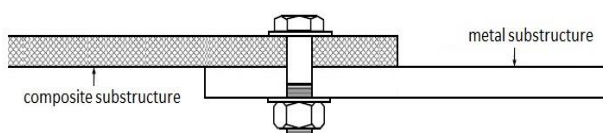


Fig. 1 Composite-metal single lap bolted joint

شکل 1 اتصال پیچی تک لایه فلز-کامپوزیت

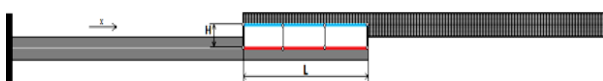


Fig. 2 The 2D thin-layer element

شکل 2 المان نازک لایه میانی دو بعدی

کاربردهای اولیه آنها در قطعات غیرسازه‌ای یا قطعات ثانویه سازه، استفاده از این مواد در قطعات اصلی سازه‌ها در حال افزایش است. پیش‌بینی مدل المان محدود از رفتار یک سازه، همواره با رفتار واقعی سازه متفاوت است. وضعیت دینامیکی سازه‌های متشکل از قطعات کامپوزیتی و دارای اتصالات مکانیکی به دلیل عدم قطعیت‌های موجود در آنها، حادث‌تر و پیچیده‌تر از سازه‌های فلزی است. تاکنون مدل‌های زیادی برای توصیف سطوح اتصال پیچی و مدل سازی رفتار دینامیکی آنها ارائه شده است.

مدل‌های فنر-دمپر [2,1]، المان جبرانی¹ [3]، المان ژنریک [4]، المان لایه میانی [5]، مدل ایوان [6] و اخیراً المان واسط [7] نمونه‌های از این تلاش‌ها می‌باشند. دو نوع از المان‌های لایه میانی، المان لایه میانی با ضخامت صفر و المان لایه میانی نازک می‌باشند. در المان لایه میانی با ضخامت صفر روابط سازگاری المان معمولاً شامل مقادیر ثابتی برای هر دو سفتی برشی (مماس بر صفحه سطح اتصال) و سفتی نرمال (عمود بر صفحه سطح اتصال) می‌باشد [8]. اما در المان لایه میانی نازک خواص سطح اتصال به وسیله باند نازکی اطراف سطح با ویژگی‌های متفاوت از مواد مجاور کنترل می‌شود [9].

در حالتی که نیرو تحریک پایین و خواص مواد همسان یا پیش بار پیچ به اندازه کافی بالا باشد تا از ورود به ناحیه غیرخطی جلوگیری شود رفتار سطح تماس خطی می‌باشد. المان لایه نازک اولین بار به منظور به‌روزرسانی² و برای استخراج ضرایب سفتی اتصال با استفاده از روابط سازگاری الاستیک خطی و نتایج تست مودال توسط آقای احمدیان و همکاران [10] مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در این تحقیقات نشان داده شده است که برای توصیف رفتار اتصال در روابط سازگاری المان لایه میانی نازک تنها سفتی نرمال و برشی کافی می‌باشند.

زمانی که رفتار غیرخطی سازه با افزایش نیروی تحریک شروع می‌شود نیاز به مدل سازی دقیقی از اتصال است تا بتوان رفتار غیرخطی سطح تماس را دقیق توصیف کرد. در بررسی‌های تجربی قبلی نشان داده شده است که رفتار اتصال وابسته به دامنه پاسخ سازه می‌باشد [12,11]. از آنجایی که به دلیل وجود اتصال سفتی سازه کاهش و میرایی آن افزایش می‌یابد با استفاده از مدل لایه میانی نازک و روابط سازگاری آن تقریب مرتبه دو بر حسب دامنه پاسخ برای توصیف رفتار غیرخطی اتصال ارائه شده است [13]. در مدل غیرخطی کاهش سفتی در راستای سفتی نرمال و نیز افزایش میرایی به وسیله ی میرایی سازه ای در راستای سفتی برشی مدل سازی شده است.

هدف اصلی این تحقیق ارائه مدل لایه میانی نازک غیرخطی مرتبه‌ی چهار بر حسب دامنه‌ی پاسخ برای مدل سازی رفتار اتصال فلز-کامپوزیت می‌باشد. در اینجا فرض بر این است که کل میرایی سازه شامل میرایی تیر کامپوزیتی و میرایی اتصال پیچی در مدل میرایی سطح تماس دیده شده است. در ابتدا مدل خطی اتصال و نیز پاسخ فرکانسی خطی آن استخراج شده است. مدل خطی بدست آمده توسط روش حساسیت مقادیر ویژه³ به‌روزرسانی شده است. سپس با استفاده از مدل خطی اتصال به‌روزرسانی شده در قبل، مدل غیرخطی اتصال با استفاده از چند جمله‌ای مرتبه چهار بر حسب دامنه پاسخ ارائه شده است. در نهایت با استفاده از نتایج بدست آمده از پاسخ فرکانسی غیرخطی، مدل اجزاء محدود غیرخطی اتصال به کمک روش حساسیت پاسخ فرکانسی⁴ به‌روزرسانی و شناسایی⁵ شده است.

¹ Offset Dimension

² Updating

³ Eigen Value Sensitivity Analysis

⁴ Frequency Response Sensitivity Analysis

⁵ Identification

⁶ Decouple

⁷ Rectangular Membrane Element with Drilling Freedoms

⁸ Shape Functions

سازه‌ی یعنی تابع F_2 به صورت مختلط با جمع سفتی در راستایی برشی برای مدل‌سازی آن استفاده شده است که علت آن طبق مشاهدات تجربی پدیده سفت شوندگی میرایی³ می‌باشد [12-15].

3- نمونه مورد مطالعه

سازه هیبریدی فلز-کامپوزیت مورد مطالعه در این تحقیق شامل یک تیر آلومینیومی AL7075-T651 به ابعاد $346 \times 42 \times 10 \text{ mm}^3$ و یک تیر کامپوزیتی کربن/اپوکسی به ابعاد $442 \times 42 \times 8.7 \text{ mm}^3$ است که به وسیله یک عدد پیچ و مهره M10 به یکدیگر متصل شده‌اند. خواص تیر آلومینیومی برابر با مدول الاستیک 69.2 GPa و چگالی 2850 kg/m^3 می‌باشد. در شکل 3 شماتیکی از این سازه هیبریدی در وضعیت یکسرگیردار نشان داده شده است.

تیر کامپوزیتی از الیاف کربن دوجته با 36 لایه و چیدمان متقارن $[(0/90)_4/(\pm 45)_4]_2/(0/90)_2$ ساخته و چگالی آن با چیدمان شبه‌ایزوتروپیک برابر 1365 kg/m^3 محاسبه شده است. مدول الاستیک آن از تست مودال و به‌روزرسانی مدل با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی با توجه به رفتار شبه‌ایزوتروپیک به دست آورده شده است. برای این منظور تیر مورد نظر در حالت دو سرآزاد مطابق شکل 4، تحت تست مودال قرار گرفته شده است. تحریک تیر به وسیله چکش مودال و پشت سنسور صورت می‌گیرد.

نمودار پاسخ فرکانسی در شکل 5 نشان داده شده است. نتایج حاصل از به‌روزرسانی مدل تیر کامپوزیتی به وسیله آنالیز حساسیت پاسخ فرکانسی و درصد خطای آن در جدول 1 آورده شده است. بر اساس داده‌های این جدول مدول الاستیسیته معادل برای تیر کامپوزیتی با چیدمان شبه‌ایزوتروپیک معادل با 38.566 GPa به دست آورده شده است. در بخش 4 نیز به بررسی تست مودال خطی اتصال فلز کامپوزیت پرداخته شده است. شکل 6 نمودار پاسخ فرکانسی خطی اتصال برای پیش بار 8 Nm نشان داده شده است.

همان‌طور که در جدول 1 مشخص می‌باشد درصد خطا هر یک از فرکانس‌ها بعد از به‌روزرسانی زیر 4 درصد می‌باشد که نشان از صحت به‌روزرسانی می‌باشد.

4- تست مودال خطی و غیرخطی اتصال

وضعیت سازه هیبریدی در حین تست مودال با لرزانده¹ در شکل 7 نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل شماتیک 3 نیز دیده می‌شود، سازه هیبریدی در زیرسازه آلومینیومی (مطابق با کاربردهای صنعتی)، با شرط مرزی گیردار به صورت کامل ثابت شده است و تحریک سازه توسط لرزانده‌ی

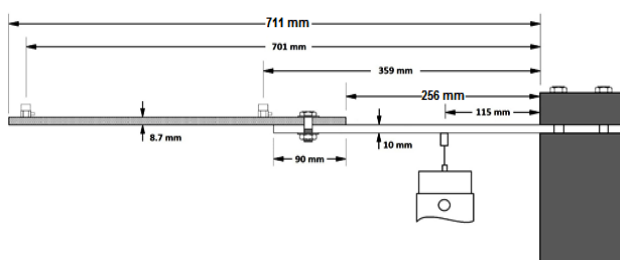


Fig. 3 Schematic of test setup

شکل 3 شماتیکی از شرایط تست

نیاز به بالا بودن نیروی تحریک به مقدار کافی یا شل بودن پیش بار پیچ دارد [12,11]. آنالیزهای انجام شده بر روی سطح تماس در دو بخش حوزه زمان و حوزه فرکانس می‌باشد؛ زمانی که آنالیزها در حوزه زمان باشد، استفاده از رابطه‌ی تنش کرنش مفید می‌باشد [15] اما زمانی که آنالیز در حوزه فرکانس باشد روش متفاوتی برای حل مورد نیاز می‌باشد. رابطه‌ی میان تنش-کرنش به صورت رابطه‌ی (3) است، که در حالت غیر خطی این رابطه به صورت رابطه‌ی (4) تغییر می‌نماید.

$$\sigma(t) = f\{\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)\} \quad (4)$$

با توجه به اینکه تحریک به صورت مونو-هارمونیک می‌باشد که در بخش 3 شرایط تست توضیح داده خواهد شد، لذا پاسخ نیز مونو-هارمونیک و در نتیجه کرنش به صورت رابطه‌ی (5) فرض شده است. رابطه‌ی خطی شده تنش-کرنش را بر اساس توصیف مفهوم تابع¹ [16] به صورت زیر به دست آورده شده است.

$$\varepsilon(t) = X_E \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

$$\sigma(t) \cong \left(E_r(X_E, \omega) + j E_j(X_E, \omega) \right) \varepsilon(t) = E_{eq}(X_E, \omega) \varepsilon(t) \quad (6)$$

$$E_{eq}(X_E, \omega) = \frac{1}{X_E \pi} \int_0^{2\pi} \{ f(X_E \sin(\beta), \omega X_E \cos(\beta)) \} \times \{ (\sin(\beta) + j \cos(\beta)) \} d\beta \quad (7)$$

همان‌طور که در روابط (5-7) مشخص است رابطه‌ی میان تنش-کرنش تابعی از جابجایی سازه و فرکانس تحریک می‌باشد. در این تحقیق فرض بر آن است که به علت اینکه رفتار غیر خطی حول فرکانس اول و در بازه تغییرات کوچکی از فرکانس اول می‌باشد لذا رفتار غیر خطی تنها تابعی از چند جمله‌ای دامنه پاسخ می‌باشد.

در حالت کلی در صورتی که K' پارامتر غیر خطی اتصال باشد، آنرا می‌توان به صورت زیر فرض کرد:

$$K' = K'_0 + g(X) \quad (8)$$

که در آن K'_0 پارامتر خطی سطح تماس و X دامنه پاسخ سازه به وسیله نیروی تحریک‌هارمونیک می‌باشد. X یک مقدار قابل اندازه‌گیری است و رابطه‌ی مستقیم با دامنه کرنش دینامیکی X_E در رابطه‌ی (5) دارد. در ادامه از آنجایی که فرکانس تحریک ω در بازه کوچکی حدود 3 هرتز حول فرکانس اول تغییر می‌کند، می‌توان تأثیرات آن روی سطح تماس را نادیده گرفت از این رو در رابطه‌ی (8) نادیده گرفته شده است. $g(X)$ تابع مختلط غیرخطی که شامل بخش حقیقی و موهومی است که به تربیت برای توصیف سفتی و میرایی غیرخطی سطح تماس می‌باشد. برای مدل کردن سفتی، $g(X)$ یک تابع با مقادیر منفی می‌باشد برای اطمینان از اینکه مشخصه‌های سفتی در ناحیه اتصال با افزایش دامنه Y پاسخ، کاهش می‌یابد که این پدیده به اثر نرم شوندگی² معروف است. در حالی که برای مدل کردن مشخصه‌های میرایی اتصال، $g(X)$ مقادیری مثبت دارد یعنی با افزایش دامنه پاسخ، میرایی افزایش می‌یابد. برای مدل‌سازی سفتی و میرایی اتصال در حالت غیر خطی از روابط (9,10) استفاده شده است.

$$E_c(X) = E_{c0} - F_1(X) \quad (9)$$

$$G_c(X) = G_{c0} + j \times F_2(X) \quad (10)$$

که در آن E_{c0} و G_{c0} مقدار بدست آمده از حل خطی اولیه می‌باشند و X اندازه دامنه‌ی پاسخ سازه، نسبت به نیروی سینوسی با فرکانس تحریک ω می‌باشد. در حالت مدل‌سازی سفتی مقدار تابع F_1 از حل خطی کم می‌شود که علت آن پدیده نرم شوندگی می‌باشد و برای مدل‌سازی میرایی از سفتی

³ Hardening-Damping Phenomena

¹ Shaker

¹ Describing Function Concept

² Softening-Effect Phenomena

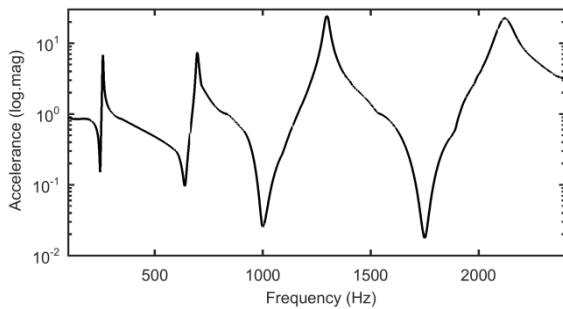


Fig. 5 Frequency response function of free-free composite beam

شکل 5 نمودار تابع پاسخ فرکانسی تیر کامپوزیتی دو سر آزاد

رزونانس و کاهش دامنه با افزایش نیروی تحریک به علت ایجاد پدیده غیرخطی مشاهده شده است.

5- شناسایی پارامترهای خطی لایه میانی

یکی از روش‌های پر استفاده شناسایی پارامترها و کاهش خطا در مدل‌های اجزاء محدود در حالت خطی استفاده از روش حساسیت مقادیر ویژه است. ماتریس $[S]$ ماتریس حساسیت مقادیر ویژه نسبت به پارامترهای به‌روزرسانی و $\{\varepsilon\}$ بردار باقی‌مانده از تفاضل بین مقادیر ویژه تجربی و پیش‌بینی شده می‌باشد. برای محاسبه $\{\Delta p\}$ کفایت معکوس ماتریس حساسیت $[S]$ را محاسبه نموده و در بردار $\{\varepsilon\}$ ضرب شود. بنابراین رابطه‌ی (11) فقط با قرار گرفتن در یک سیکل تکراری قابل حل خواهد بود. هدف در هر مرحله از فرایند به‌روزرسانی کمینه کردن تابع هدفی که به صورت $\sum_{i=1}^m (((\omega_i^e)^2 - (\omega_i^a)^2) / (\omega_i^e)^2)^2$ است که در آن ω_i^e فرکانس‌های تست و ω_i^a فرکانس‌های تحلیلی می‌باشد.

$$\{\Delta P\} = [S]^+ \{\varepsilon\} \quad (11)$$

$$\{P\}_{\text{new}} = \{P\}_{\text{old}} + \{\Delta P\} \quad (12)$$

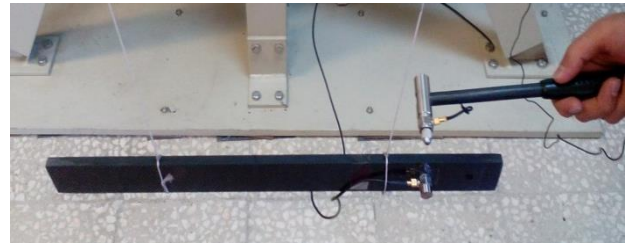


Fig. 4 Free-Free composite beam test setup

شکل 4 شرایط تست تیر کامپوزیتی دو سر آزاد

که در فاصله $x = 115 \text{ mm}$ از لبه گیردار به آن متصل شده است انجام می‌شود.

برای بدست آوردن پاسخ خطی سازه تحریک با سیگنال تصادفی و با نیروی 4 N انجام شده است. نیروی اعمالی به سازه توسط یک حسگر نیرو و پاسخ آن به وسیله دو عدد شتاب سنج نصب شده در موقعیت‌های $x = 359 \text{ mm}$ و $x = 701 \text{ mm}$ اندازه‌گیری شده است. پیش بار پیچ در دو حالت 8 Nm و 16 Nm توسط یک ترک‌متر تنظیم شده است. شکل 6 نمودار پاسخ فرکانسی را برای پیش بار 8 Nm و نتایج فرکانس‌های حاصل در جدول 2 نشان داده شده است.

در ادامه برای بدست آوردن پاسخ غیر خطی به کمک لرزانده در دو دامنه 4 N و 10 N در حول فرکانس اول، پاسخ فرکانسی غیرخطی استخراج شده است. به این صورت که ابتدا نیروی تحریک و فرکانس تحریک را مشخص کرده و توسط لرزانده سازه با این نیروی هارمونیک تحریک می‌شود. اندکی به سیستم اجازه داده می‌شود تا پاسخ به حالت پایدار برسد، سپس به وسیله سنسورها و نیروسنج سر لرزانده سیگنال جابجایی و نیروی اعمالی ذخیره می‌شود. در یک فرکانس مشخص با بدست آوردن دامنه پاسخ و دامنه تحریک می‌توان مقدار آن در نمودار پاسخ فرکانسی را در یک فرکانس معین تعیین نمود و در انتها با وصل این نقاط، نمودار پاسخ فرکانسی غیر خطی بدست می‌آید. همان‌طور که در شکل 8 مشخص است جابجایی نقطه

جدول 1 نتایج حاصل از به‌روزرسانی تیر کامپوزیتی

فرکانس‌های حاصل از			قبل از به‌روزرسانی			بعد از به‌روزرسانی	
شماره فرکانس	آزمون	فرکانس (Hz)	درصد خطا (%)	فرکانس (Hz)	درصد خطا (%)	فرکانس (Hz)	درصد خطا (%)
1	255	216.8	14.98	245.4	3.76	38.46	1.18
2	687.4	595.6	13.35	679.3	0.28	1294.3	-0.07
3	1298	1143	11.94	1294.3			
4	2121.5	1875	11.62	2123.1			

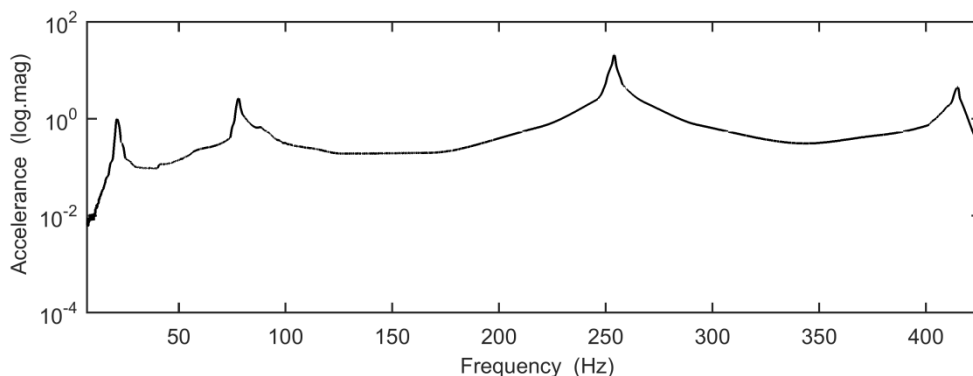


Fig. 6 Frequency response function of Composite-metal single lap bolted joint (8 Nm)

شکل 6 نمودار تابع پاسخ فرکانسی اتصال پیچی تک لایه فلز-کامپوزیت (8 Nm)

غیرخطی ماتریس D غیرخطی تشکیل شده است و با استفاده از رابطه‌ی (3) حول المان انتگرال گیری شده است. ماتریس سفتی نهایی بدست آمده دارای یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی برای توصیف میرایی می‌باشد. استفاده از روش به‌روزرسانی تابع پاسخ فرکانسی برای به‌روزرسانی مدل تحلیلی مزایایی دارد اولاً خطای حاصل از استخراج پارامترهای مودال حذف می‌شود ثانیاً داده‌های کافی برای انجام پروسه به‌روزرسانی در دست خواهد بود.

ماتریس حساسیت پاسخ فرکانسی نسبت به پارامتر به‌روزرسانی P برای به‌روزرسانی مدل تحلیلی با استفاده از توابع پاسخ فرکانسی و به صورت روابط (16-18) محاسبه شده است. که در آن $[Z]$ ماتریس سفتی دینامیکی سیستم است [17].

$$\frac{\partial[H]}{\partial p} = -[H]^T \frac{\partial[Z]}{\partial p} [H] \quad (16)$$

$$[Z(\omega)] = [-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \quad (17)$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \quad (18)$$

که در آن $[M]$ ، $[C]$ ، $[K]$ و ω به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی و فرکانس می‌باشند. با استفاده از رابطه‌ی (16) رابطه‌ی به‌روزرسانی نسبت به پارامتر P در فرکانس ω_k با نقاط تحریک و پاسخ به ترتیب j و i ، رابطه‌ی (19) قابل محاسبه خواهد بود.

$$H_{ij}^e(\omega_k) - H_{ij}^a(\omega_k) = \left(-\{H_i^a(\omega_k)\}^T \frac{\partial[Z(\omega_k)]}{\partial p} \{H_j^a(\omega_k)\} \right) \Delta p \quad (19)$$

که در آن $\{H_i^a(\omega_k)\}$ و $\{H_j^a(\omega_k)\}^T$ که به ترتیب بردارهای سطر i ام و ستون j ام ماتریس پاسخ فرکانسی $[H_{ij}(\omega_k)]$ می‌باشند. a و e نشان دهنده‌ی FRFهای تجربی و تحلیلی می‌باشند. توسط آردا و دورت [18] و بعدها بالمز [19] تابع هدفی به صورت رابطه‌ی (20) ارائه شده است.

$$J(\{p\}) = \left\| 20 \log_{10} |\{H_{ij}^a(\omega_k, \{p\})\}| - 20 \log_{10} |\{H_{ij}^e(\omega_k)\}| \right\| \quad (20)$$

با مشتق‌گیری از تابع $20 \log_{10} |H_{ij}|$ نسبت به P ، می‌توان مشتق ماتریس سفتی دینامیکی و ماتریس پاسخ فرکانسی را به دست آورد.

$$\left\| 20 \log_{10} |\{H_{ij}^a(\omega_k, \{p\})\}| - 20 \log_{10} |\{H_{ij}^e(\omega_k)\}| \right\| = 8.6859 \left(\frac{\text{Re}(H_{ij}) \frac{\partial \text{Re}(H_{ij})}{\partial p} + \text{Im}(H_{ij}) \frac{\partial \text{Im}(H_{ij})}{\partial p}}{\text{Re}(H_{ij})^2 + \text{Im}(H_{ij})^2} \right) \quad (21)$$

با استفاده از رابطه‌ی (21) در هر فرکانس تحریک ماتریس حساسیت $[S_k]$ و بردار باقیمانده $\{\Delta p\}$ حاصل از تفاضل مقادیر تست و تحلیل، فرایند به‌روزرسانی غیرخطی انجام شده است.

گاهی در به‌روزرسانی مدل اجزاء محدود از روش‌های تنظیم پارامتر برای اصلاح معادلات ماتریسی یک سیستم نامرغوب (تکینه) و تبدیل آن به یک سیستم مرغوب، استفاده می‌شود [21,20]. بنابراین روش شناسایی پارامترهای اتصال غیر خطی با استفاده از تکنیک تنظیم تیخونوف [22] برای نتایج حاصل از به‌روزرسانی بر اساس روش خطای خروجی ارائه و در مسیر انجام به‌روزرسانی برای مدل‌سازی سازه تحت آزمون از آن استفاده شده است. از آنجا که استفاده از روش‌های به‌روزرسانی بر اساس خطای خروجی، منجر به یک مسأله حداقل مربعات می‌گردد که نیازمند استفاده از سیکل‌های تکراری است، یک استراتژی که اجازه تغییر مقدار پارامترها در هر سیکل تکرار به‌روزرسانی را بدهد، اتخاذ شده است و پارامتر بهینه در هر سیکل تکرار با

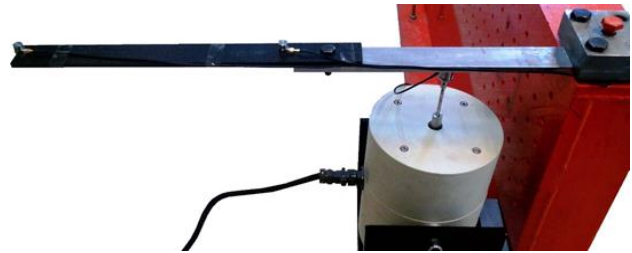


Fig. 7 Composite-metal single lap bolted joint modal test setup

شکل 7 تست مودال اتصال پیچی تک لبه فلز-کامپوزیت

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی سازه آلومینیوم-کامپوزیت

Table 2 Natural frequency of aluminum-composite

فرکانس طبیعی (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4
پیش بار	21.1	80.3	253.4	416
پیچ	21.2	81.4	255.4	421

با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی اتصال فلز-کامپوزیت در شکل 7 و مقادیر فرکانس‌های بدست آمده از تست در دو پیش بار 8 Nm و 16 Nm پارامترهای لایه میانی E_c و G_c شناسایی شده است. همان‌طور که در جدول 3 مشاهده می‌شود مقادیر اولیه و نهایی پارامترهای شناسایی شده و در صد خطاهای فرکانس‌های به‌روزرسانی بدست آورده شده است.

6- شناسایی پارامترهای غیر خطی لایه میانی

در این بخش ابتدا مدل‌سازی غیرخطی بر حسب دامنه پاسخ بیان شده است، سپس به‌روزرسانی به وسیله نمودار پاسخ فرکانسی و روش تنظیم¹ پارامترها در طول فرایند همگرایی طرح شده و در انتها نتایج شناسایی پارامترهای غیرخطی اتصال ارائه شده است.

6-1- مدل‌سازی غیرخطی مرتبه بالا بر حسب دامنه پاسخ

با توجه به این که رفتار غیرخطی اتصال در مود اول آن بررسی شده است، لذا سفتی اتصال در راستایی سفتی نرمال لایه میانی و رفتار میرایی آن در راستایی سفتی برشی رخ می‌دهد. همان‌طور که در بخش 2-2 توضیح داده شد برای مدل‌سازی سفتی و میرایی اتصال از روابط (14,13) استفاده شده است.

$$E_c(X) = E_{c0} - F_1(X) \quad (13)$$

$$G_c(X) = G_{c0} + j \times F_2(X) \quad (14)$$

که در آن $F_i(X)$ توابعی برای توصیف سفتی و میرایی غیرخطی اتصال می‌باشند. در صورتی که تابع F_i وابسته به دامنه پاسخ در نظر گرفته شود، می‌توان فرض کرد که از یک چند جمله‌ی مرتبه 4 بر حسب X به صورت رابطه‌ی (15) تشکیل شده است. علت استفاده از مرتبه 4 این است که به‌روزرسانی دقیق‌تری برای میرایی و سفتی اتصال هیبریدی نسبت به پژوهش‌های قبل ارائه شده است [13].

$$F_i(X) = \delta_{i1}X^4 + \delta_{i2}X^3 + \delta_{i3}X^2 + \delta_{i4}X + \delta_{i5} \quad (15)$$

بنابراین ضرایب δ_{ij} ؛ $j = 1, 2, \dots, 5$ را با استفاده از روش به‌روزرسانی و به وسیله نمودارهای پاسخ فرکانسی غیرخطی بدست آمده از تست شکل 8 شناسایی شده است.

6-2- به‌روزرسانی تابع پاسخ فرکانسی و روش تنظیم پارامتر

با قرار دادن توابع $F_i(X)$ در روابط (14,13) و بدست آوردن E_c و G_c

¹ Regularization

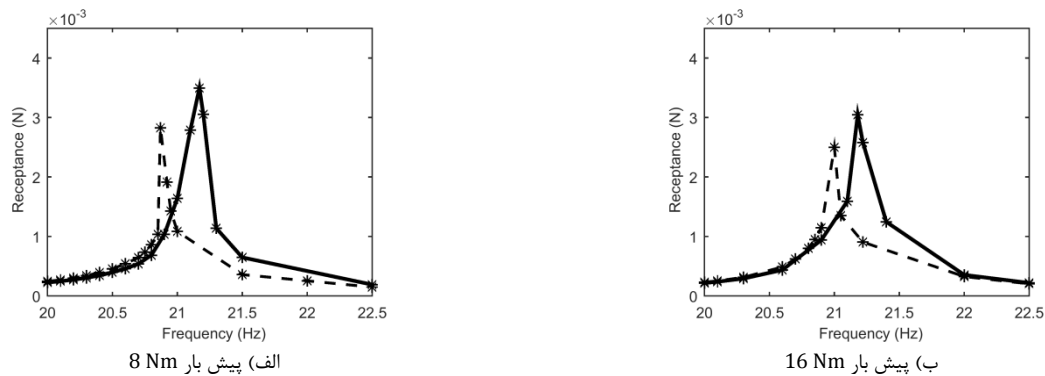


Fig. 8 Nonlinear frequency response function of joint with two different preload

شکل 8 نمودار غیر خطی تابع پاسخ فرکانسی اتصال در دو پیش بار مختلف الف) پیش بار 8 Nm و ب) پیش بار 16 Nm، تحریک 4 N —*— تحریک 10 N —*—

جدول 3 نتایج حاصل از به‌روزرسانی خطی اتصال آلومینیوم-کامپوزیت

Table 3 The results of the linear updating Aluminum-composite

$E_{c0} = 4.9 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}, G_{c0} = 4.18 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ مقادیر نهایی به‌روزرسانی، 8 Nm پیش بار				
فرکانس‌ها	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)
فرکانس‌های حاصل از آزمون	21.10	80.30	253.40	416
فرکانس‌های به‌روزرسانی شده	21.14	80.68	253.38	416
درصد خطای به‌روزرسانی (%)	-0.220	-0.470	0.007	0
$E_{c0} = 5.52 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}, G_{c0} = 4.30 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ مقادیر نهایی به‌روزرسانی، 16 Nm پیش بار				
فرکانس‌ها	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)
فرکانس‌های حاصل از آزمون	21.20	81.30	255.40	421
فرکانس‌های به‌روزرسانی شده	21.31	81.59	255.38	421
درصد خطای به‌روزرسانی (%)	-0.560	-0.360	0.005	0

روشی که در این تحقیق به کار گرفته شده است نیازمند محاسبه پارامتر تنظیم بهینه در هر سیکل تکرار برای به‌روزرسانی غیرخطی می‌باشد. متأسفانه هر دو روش LCM و GCV در انجام محاسبات خسته کننده می‌باشند. بنابراین از یک روش محاسباتی کارآمد بر پایه 4^{th} MPC استفاده می‌شود که در آن پارامتر λ بهینه در هر سیکل با استفاده از رابطه‌ی (25) بدست آورده شده است [26].

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^2 - \lambda^2}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} \right) (u_i^T e)^2 - \|(I - UU^T)e\|_2^2 = 0 \quad (25)$$

3-6- نتایج شناسایی پارامترهای غیر خطی اتصال

نمودارهای پاسخ فرکانسی به‌روزرسانی شده غیر خطی با استفاده از تقریب مرتبه 4 بر حسب دامنه پاسخ مطابق شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل پیداست نمودارهای پاسخ فرکانسی برای هر دو پیش بار و نیروی تحریک با دقت بالایی به‌روزرسانی شده است. نمودارهای 9 و 10 به این صورت بدست آمده است که از رابطه‌ی (18) ضرایب δ_{ij} برای هر یک از فرکانس‌های ω_k با استفاده از روش به‌روزرسانی نمودار پاسخ فرکانسی بدست آمده است و در نهایت از روابط (14,13) ماتریس سفتی و میرایی و نمودار پاسخ فرکانسی پیش بینی شده از حل بدست می‌آید. با استفاده از روش تنظیم پارامترها و با کمک تعیین پارامتر λ با استفاده از رابطه‌ی (20) در حل از واگرایی جواب جلوگیری کرده و پروسه حل در مدت بسیار زمان کمتری به پایان خواهد رسید.

استفاده از معیار محاسباتی کارآمدی به نام معیار حاصل ضرب کمینه به دست آورده شده است.

بر استفاده‌ترین روش معمول تنظیم، روش تیخونوف است. در این روش، تابع هدف در سیکل تکرار K ام مسأله کمترین مربعات به صورت رابطه (22) تعریف می‌شود.

$$J_{\Delta p_\lambda} = \|\Delta p_\lambda - e\|_2^2 + \lambda^2 \|\Delta p_\lambda\|_2^2 \quad (22)$$

که در رابطه‌ی (22)، λ پارامتر تنظیم بوده و وزن داده شده به نرم حل مسأله $\|\Delta p_\lambda\|_2^2$ نسبت به نرم باقیمانده مسأله $\|\Delta p_\lambda - e\|_2^2$ را کنترل می‌کند تا نتایج نهایی از پارامترهای اولیه انتخاب شده برای پروسه به‌روزرسانی خیلی دور نباشند.

در ادامه با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد¹ برای ماتریس حساسیت می‌توان آن را به صورت $S = U\Sigma V^T$ تجزیه کرد. با استفاده از روابط (24,23)، حل رابطه‌ی (21) به صورت تابعی از λ (پارامتر تنظیم)، بیان شده است.

$$\|\Delta p_\lambda\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^2 u_i^T e}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \right)^2 \quad (23)$$

$$\|\Delta p_\lambda - e\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda^2 u_i^T e}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \right)^2 + \|(I - UU^T)e\|_2^2 \quad (24)$$

نکته اساسی در روش تنظیم تیخونوف انتخاب پارامتر آن است. روش LCM² و روش GCV³ دو روش رایج برای تعیین این پارامتر در پروسه به‌روزرسانی مدل می‌باشند [25-23].

³ Generalized Cross Validation (GCV)

⁴ Minimum Product Criterion

¹ Singular Value Decomposition(SVD)

² L-Curve Method (LCM)

جدول 4 با استفاده از رابطه‌ی (20) درصد معیار باقی مانده برای هر یک از نمودارها محاسبه شده است که نشان از دقت بالایی فرایند به‌روزرسانی دارد. نمودارهای رفت و برگشتی تغییر توابع $F_1(X)$ برحسب دامنه نمودار پاسخ فرکانسی مطابق شکل 11 آورده شده است. در ابتدا شناسایی پارامترهای غیرخطی در دامنه‌ی 4 N در نظر گرفته می‌شوند. توابع خطی $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ در هر دو نیروی پیش بار 8 Nm، 16 Nm رسم شده است. پارامترهای $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ در روند تکراری به‌روزرسانی شده است تا زمانی که همگرایی حاصل شود.

در حالتی که پیش بار پیچ 16 Nm است $F_1(X)$ به صورت خطی و $F_2(X)$ به صورت چند جمله در طول دامنه پاسخ افزایش و کاهش یافته است اما در 8 Nm که پیچ شل تر می‌باشد هر دو تابع $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ به صورت چند جمله می‌باشد و نیز مقدار بیشینه‌ی میرایی و سفتی این توابع نسبت به حالتی که پیچ سفت‌تر بسته شده است بیشتر شده است. استفاده از چند جمله‌ای مرتبه 4 این امکان را به پارامترهای $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ می‌دهند که بهترین مسیر برای شناسایی پارامترهای اتصال پیدا کنند.

در نهایت پارامترهای غیر خطی المان لایه میانی برای نیروی تحریک 10 N با استفاده از نمودار پاسخ فرکانسی آن شناسایی شده است که هر دو تابع $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ به صورت چند جمله‌ای می‌باشد. در حالتی که نیروی تحریک افزایش یافته است، در پیش بارهای مشابه مقادیر توابع ذکر شده نسبت به حالت قبل افزایش یافته است.

نتایج شکل 11 نشان می‌دهد نمودارهای $F_1(X)$ با توجه به افزایش دامنه نیروی تحریک یا کاهش پیش بار پیچ درجه چند جمله‌ای که عامل غیرخطی میرایی و سفتی است افزایش می‌یابد.

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش استفاده از مدل لایه میانی نازک برای یک اتصال فلز-کامپوزیت مورد مطالعه قرار گرفته شده است. این مدل‌سازی در دو حالت خطی و غیر خطی به وسیله کدنویسی توسط نرم افزار متلب مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. ابتدا تیر کامپوزیتی با توجه به اینکه از خود رفتار شبه

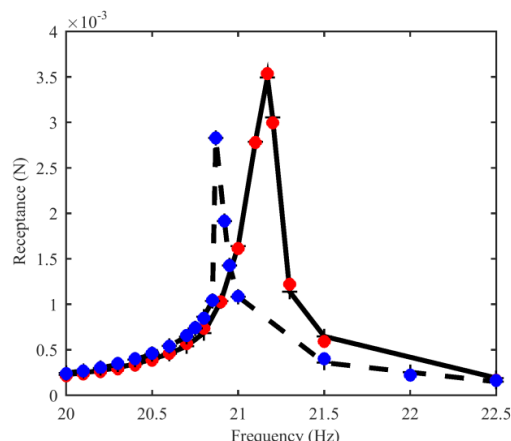


Fig. 9 Frequency response function torque 8 Nm, Experimental (lines) and predicted (marks) FRFs

شکل 9 نمودار تابع پاسخ فرکانسی پیش بار 8 Nm، نمودارهای تست (خطوط) و نتایج پیش بینی شده (نقاط توپر)

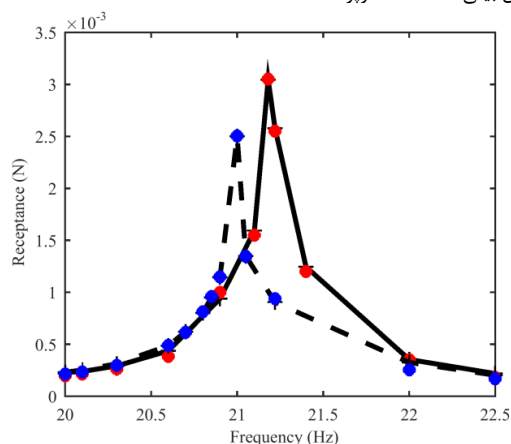


Fig. 10 Frequency response function torque 16 Nm, Experimental (lines) and predicted (marks) FRFs

شکل 10 نمودار تابع پاسخ فرکانسی پیش بار 16 Nm، نمودارهای تست (خطوط) و نتایج پیش بینی شده (نقاط توپر)

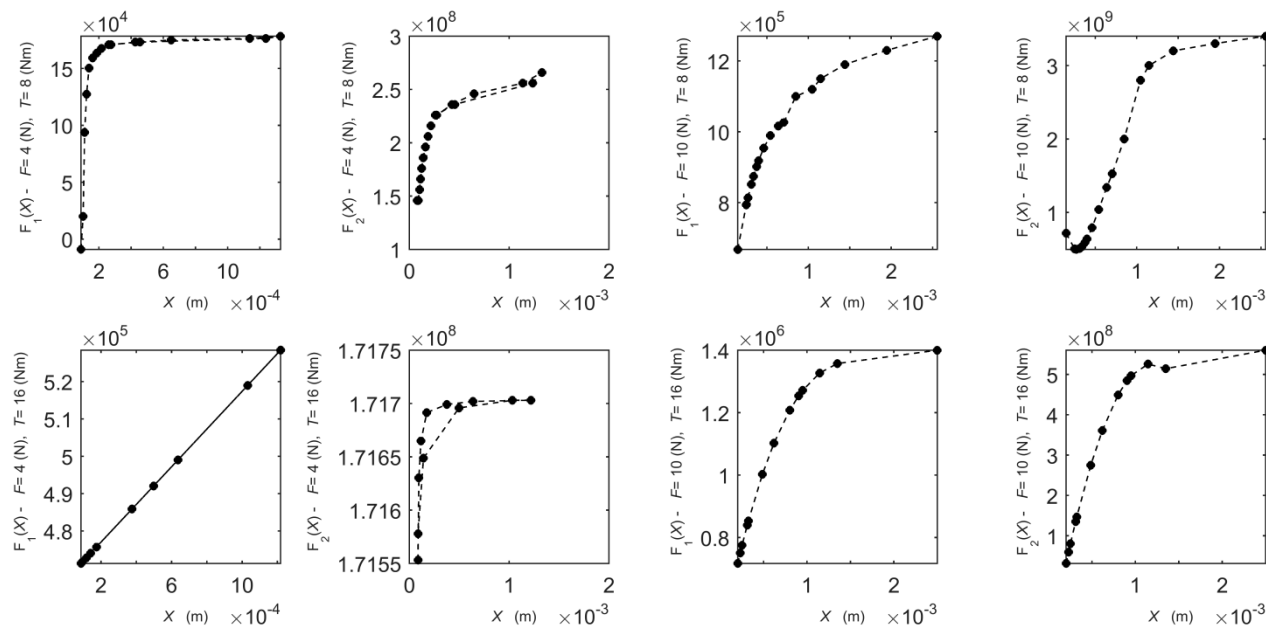


Fig. 11 Updated function $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ at preloads 8 Nm، 16 Nm and excitation force 4 N، 10 N

شکل 11 توابع به‌روزرسانی شده $F_1(X)$ ، $F_2(X)$ در پیش بار 8 Nm، 16 Nm و نیروی تحریک 4 N، 10 N

جدول 4 درصد خطای به‌روزرسانی غیر خطی برای 4 حالت مختلف

Table 4 Nonlinear error of updates to 4 different states

نیروی تحریک	پیش‌بار پیچ	معیار باقی مانده (درصد خطا)
4 N	8 Nm	1.96
10 N	8 Nm	0.31
4 N	16 Nm	0.57
10 N	16 Nm	1.04

شبه‌ایزوتروپیک دارد مدول خمشی آن شناسایی شده است. سپس با کمک نتایج تست خطی به شناسایی پارامترهای اتصال، سفتی نرمال و برشی به کمک آنالیز حساسیت فرکانسی پرداخته شده است. نتایج این شناسایی حاکی از آن است که سفتی‌های اتصال از مرتبه 10^3 نسبت به سفتی‌های تیرهای کناری کاهش یافته است. در ادامه به کمک ارائه مدل اجزاء محدودی از مرتبه چهار نسبت به دامنه پاسخ، توصیف رفتار غیر خطی اتصال بررسی شده است. تست مودال غیرخطی اتصال انجام شده و با کمک آنالیز حساسیت پاسخ فرکانسی و استفاده از تنظیم پارامتر برای کاهش زمان حل و همگرایی بهتر به شناسایی خواص غیرخطی اتصال پرداخته شد. از آنجا که قطعات کامپوزیتی میرایی بالای داشته و دارای محدودیت در اعمال پیش بار پیچ به دلیل آسیب زدن به قطعه است، لذا راه‌گزینی از عدم انجام تحلیل غیرخطی نمی‌باشد. مدل مرتبه بالای ارائه شده در این مقاله از دقت بالا و کارایی کافی برای استفاده از آن در تحلیل‌های مشابه را دارا می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه نتایج بدست آمده نیز درستی تحلیل را با توجه به مشاهدات قبلی به درستی ارضا نموده است و پارامترهای سفتی و میرایی اتصال به صورت چندجمله‌ای می‌باشد و با دقتی بالا شناسایی شده است.

8- مراجع

- [1] F. Gant, P. Rouch, F. Louf, L. Champaney, Definition and updating of simplified models of joint stiffness, *Solids and Structures*, Vol. 48, No. 5, pp. 775-784, 2011.
- [2] H. Jalali, H. Ahmadian, Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 2, pp. 1041-1050, 2007.
- [3] J. E. Mottershead, M. I. Friswell, G. H. T. Ng, J. A. Brandon, Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 10, No. 2, pp. 171-182, 1996.
- [4] H. Jalali H. Ahmadian, Generic element formulation for modelling bolted lap joints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 5, pp. 2318-2334, 2007.
- [5] H. Ahmadian, J. E. Mottershead, S. James, M. I. Friswell, C. A. Reece, Modeling and updating of large surface-to-surface joints in the AWE-MACE structure, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 4, pp. 868-880, 2006.
- [6] D. J. Segalman, A four-parameter Iwan model for lap-type joints, *Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 5, pp. 752-760, 2005.
- [7] S. Shokrollahi, H. Ahmadian, F. Adel, A new approach for finite element model updating of bolted joints and comparison with interface layer method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 42-35, 2017. (in Persian)
- [8] G. Beer, An isoparametric joint interface element for finite element analysis, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 4, pp. 585-600, 1985.
- [9] C. S. Desai, M. M. Zaman, J. G. Lightner, H. J. Siriwardane, Thin-layer elements for interfaces and joints, *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 19-43, 1984.
- [10] H. Ahmadian, H. Jalali, J. E. Mottershead, M. I. Friswell, Dynamic modelling of spot welds using thin-layer interface theory, *Proceedings of The 10th International Congress on Sound and Vibration*, Stockholm, Sweden, July 7-10, 2003.
- [11] H. Ahmadian, A. Zamani, Identification of nonlinear boundary effects using nonlinear normal, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 2008-2018, 2009.
- [12] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration, *Sound and Vibration*, Vol. 277, No. 1-2, pp. 327-351, 2004.
- [13] H. Jalali, A. Hedayati, H. Ahmadian, Modelling mechanical interfaces experiencing micro-slip/slap, *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 19, No. 6, pp. 751-764, 2011.
- [14] S. cen, Z. F. Long Y. Q. Long, *Advanced Finite Element Method in Structural Engineering*, pp. 345-410, Beijing: Springer-Verlag, 2009.
- [15] M. H. Mayer, L. Gaul, Segment-to-segment contact elements for modeling joint interfaces infinite element analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, pp. 724-734, 2007.
- [16] A. Gelb, W. E. Vander Velde, *Multiple input Describing Functions and Nonlinear System Design*, pp. 145-209, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [17] M. I. Friswell, J. E. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, pp. 438-473, Dordrecht: Springer, 1995.
- [18] J. R. F. Duarte, M. A. V. Arruda, Parameter estimation and model updating of rotor-bearing systems by the direct curve fit of frequency response functions, *Proceedings of The 3rd International Conference on Rotordynamics*, Lyon, France, 1990.
- [19] E. Balms, A finite element updating procedure using frequency response functions. applications to the MIT/SERC interferometer testbed, *Proceedings of The 11th International Modal Analysis Conference*, San Diego, USA, 1993.
- [20] H. G. Natke, *On regularization method within system identification*, M. Tanaka, H. D. Bui (Eds.), *Inverse Problems in Engineering Mechanics International Union of Theoretical and Applied Mechanics*, Berlin: Springer, 1993.
- [21] A. N. Tikhonov, *Numerical Methods for the Solution of Ill-posed Problems*, pp. 7-63, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [22] V. Y. Arsenin A. N. Tikhonov, *Solutions of Ill-posed Problems*, pp. 266-267, New York: John Wiley, 1977.
- [23] M. I. Friswell, J. E. Mottershead, H. Ahmadian, Finite element model updating using experimental data: Parameterization and regularization, *Mathematical Physical and Engineering Science*, Vol. 1778, No. 359, pp. 169-186, 2001.
- [24] H. Ahmadian, J. E. Mottershead, M. I. Friswell, Regularization methods for finite element model updating, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 1, No. 12, pp. 47-64, 1998.
- [25] S. Ziaei-Rad, M. Imregun, On the use of regularization techniques for finite element model updating, *Inverse Problem in Engineering*, Vol. 5, No. 7, pp. 471-503, 1999.
- [26] X. G. Hua, Y. Q. Ni, J. M. Ko, Adaptive regularization parameter optimization in output-error-based finite element model updating, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 3, pp. 563-579, 2009.