مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص‌ص 197-206

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو تیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک با رفتار تنش-کرنش انالاستیک

امیر ویسی گرگ‌آباد[1]، قادر رضا زاده[2*]، رسول شعبانی[2]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

* ارومیه، صندوق پستی 33111-57169، g.rezazadeh@urmia.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 اردیبهشت 1396

پذیرش: 12خرداد 1396

ارائه در سایت: 22 تیر 1396

کلید واژگان:

انالاستیسیته

ویسکوالاستیسیته

تحلیل غیرخطی

تحریک الکترواستاتیک

میکروتیر

چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی میکرو تیرهای با رفتار ویسکو-انالاستیک تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک و با در نظر گرفتن اثرات اندازه بررسی می‌شود. فرض می‌شود که میکرو تیر در ابتدا با ولتاژ مستقیم تحریک شده و سپس حول خیز استاتیکی به‌وجود آمده ناشی از این ولتاژ، با ولتاژ متناوب مرتعش می‌شود. با استفاده از رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان مواد انالاستیک، معادله ساختاری تیر براساس تئوری تنش کوپل بهبود یافته استخراج شده است. همچنین با در نظر گرفتن نیروی الکترواستاتیک و نیروی کشیدگی لایه میانی معادله حرکت استخراج و با استفاده از روش گالرکین، معادله حرکت به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. سپس با استفاده از روش اغتشاشات به حل معادله پرداخته شده و منحنی پاسخ فرکانسی به دست می‌آید. اثر رفتارهای مختلف مواد شامل الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک بعنوان مدل‌های تغییر شکل ماده و اثر پارامترهای شدت انالاستیک و زمان آزادسازی بر ارتعاشات غیرخطی میکرو تیرها مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که شناسایی رفتار تنش کرنش مواد استفاده شده در میکرو سازه‌ها به منظور شناسایی مدل تغییر شکل ماده بسیار مهم بوده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی به شدت متاثر از رفتارهای تغییر شکل ماده می‌باشند. مقاله حاضر نشان می‌دهد که نتایج بدست آمده از مدل‌های ویسکو الاستیک و انالاستیک با هم متفاوت بوده ولی شرایطی وجود دارد که دو مدل انالاستیک و الاستیک نتایج مشابه‌ای را پیش‌بینی می‌کنند. همچنین دیده می‌شود که شدت انالاستیک و زمان آزادسازی انالاستیک به‌طور چشمگیری بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی اثر می‌گذارند.

A Study on the Nonlinear Vibrations of Electrostatically Actuated Micro Beams with Anelastic Stress-Strain Behavior

Amir Veysi Gorgabad, Ghader Rezazadeh*, Rasoul Shabani

Department of Mechanical Engineering, University of Urmia, Urmia, Iran

* P.O.B. 57169-33111 Urmia, Iran, g.rezazadeh@urmia.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 April 2017
Accepted 02 June 2017
Available Online 13 July 2017

Keywords:
Anelasticity
Viscoelasticity
Nonlinear analysis
Electrostatic actuation
Microbeam

ABSTRACT

In this paper the nonlinear dynamic of an electrostatically actuated microbeam with viscoelastic-anelastic behavior considering size effect is studied. The micro-beam is deflected using a bias DC voltage and then driven to vibrate around its deflected position by a harmonic AC load. Regarding the stress-strain behavior of anelastic materials, the constitutive equation of microbeams is derived based on the modified couple stress theory (MCST). Assuming electrostatic and mid-plane stretching forces as the main sources of the nonlinearity and taking advantage of the Galerkin projection method, the partial differential equation is transformed to a set of nonlinear ordinary differential equations (ODEs). Multiple scales method is used to obtain an approximate analytical solution for nonlinear resonant curves. The effect of different mechanical behaviors of materials including elasticity, viscoelasticity and anelasticity, length scale parameter, anelastic relaxation time and relaxation intensity on the nonlinear vibration analysis are studied. The results demonstrate that there is very large dependence of resonance curves on the different mechanical behavior of materials. It is seen that there are special conditions in which the elastic and anelastic models predict similar results while the predicted results from anelastic and viscoelastic models are different from each other. It is found that the relaxation intensity and anelastic relxation time can change the resonant curves significantly.

1- مقدمه

مواد انالاستیک[1] در فرایند باربرداری، تغییر شکل وابسته به زمان و کاملاً برگشت‌پذیری دارند [1]. مشابه با مواد الاستیک در مواد انالاستیک نیز رفتار تنش و کرنش خطی بوده و برای هر مقدار تنش، یک مقدار تعادل منحصر بفرد برای کرنش و برعکس موجود می‌باشد. این ویژگی انالاستیسیته توسط موادی که در دسته جامدهای ترمودینامیکی قرار می‌گیرند، ارضا می‌شود. برخلاف رفتار الاستیک، تغییر شکل انالاستیک وابسته به زمان می‌باشد، به

[1] Anelastic

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Veysi Gorgabad, Gh. Rezazadeh, R. Shabani, A Study on the Nonlinear Vibrations of Electrostatically Actuated Micro Beams with Anelastic Stress-Strain Behavior, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 197-206, 2017 (in Persian)

عبارتی برای تعادل مواد انالاستیک نیاز به زمان می‌باشد [2]. این ویژگی مواد انالاستیک منجر به اتلاف انرژی مکانیکی داخلی شده و در نتیجه کاربردهای دمپینگ مکانیکی در این مواد می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. تغییر شکل انالاستیک در ابعاد ماکرو به‌طور مثال در مواد تک کریستاله قابل اغماض بوده، با آنکه نانوسیم‌های تک کریستاله اکسید زینک و سیلیکون دوپانتس[1] به‌طور چشمگیری به‌صورت انالاستیک رفتار می‌کنند. تست‌های میکروسکوپی نانو سیم‌ها نشان می‌دهد که در فرایند باربرداری بعد از برگشت‌پذیری کرنش الاستیک، بخش عمده‌ای از کرنش بطور انالاستیک برگشت‌پذیر می‌باشد.

مواد استفاده شده در تجهیزات الکتریکی و سیستم های الکترومکانیکی اغلب به‌صورت فیلم‌های فلزی[2] نازک بوده که بر روی لایه صلب قرار می‌گیرند. بنابراین اثر دمپینگ و اصطکاک داخلی در این مواد تحت بارهای دینامیکی مهم می‌باشد. به منظور مطالعه خواص مکانیکی مواد فیلم نازک تعدادی تست‌ها شامل فرورفتگی نانو، انحنای ویفری[3] و خمش میکرو تیرها انجام شده است [3]. اگر چه این روش‌های تست بسیار قابل فهم بوده، ولی این روش‌ها فقط خواص شبه استاتیک مواد را می‌توانند تعیین کنند. بنابراین پاسخ دینامیکی مواد فیلم نازک با این روش‌ها قابل مطالعه نمی‌باشد و نیاز به گسترش سیستم‌های جدیدی به منظور اندازه گیری خواص دینامیکی این مواد، خصوصاً انالاستیسته، می‌باشد. چوی و همکاران [4] به منظور بررسی دمپینگ در فیلم‌های فلزی نازک، سیستم اندازه گیری دینامیکی جدیدی را گسترش دادند. آنها با استفاده از مدل جامد خطی استاندارد و مدل خزش، اثر دمپینگ در فیلم‌های آلومینیومی نازک را بررسی کردند. بیرگیر و همکاران [5] به منظور اندازه گیری تغییر شکل وابسته به زمان در میکرو سیستم‌های الکترومکانیکی فلزی، یک روش آزمایشگاهی را ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که در طول فرایند بار برداری 95 درصد کرنش بلافاصله و به‌طور آنی بصورت الاستیک برگشت‌پذیر بوده و در مدت زمان 6 ساعت تغییر شکل باقیمانده 25 نانومتر به‌طور کاملاً برگشت پذیر به حالت اولیه رسیده و هیچ تغییر شکل ماندگاری در سیستم مشاهده نشد. بکر و همکاران [6] رفتار الاستیک و انالاستیک مواد در ابعاد کوچک را مطالعه کردند. آنها نتیجه گرفتند که در ابعاد نزدیک اندازه اتم‌ها، تغییر شکل الاستیک در سازه غیرحساس بوده ولی رفتار انالاستیک کاملاً چشمگیر می‌باشد. بسیاری از مواد پلیمری، سرامیکی و فلزی دارای اثر حافظه‌داری هستند و استفاده از این مواد به شدت بستگی به ویژگی‌های برگشت‌پذیری آن‌ها دارد. گال و همکاران [7] استفاده از فیلم‌های نازک پلیمری حافظه دار در سیستم‌های الکترومکانیکی را بررسی کردند. در کار آنها برگشت پذیری کامل وابسته به زمان در فیلم‌های پلیمری حافظه دار برای همه دماها و بارگذاری‌ها مشاهده شد.

اثر شدید وابستگی به اندازه بر رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو تیرهای با رفتار الکترواستاتیکی توسط صادقی و همکاران [8] مطالعه شد. آنها از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به منظور مطالعه اثر اندازه استفاده کردند. راحلی و همکاران [9] ناپایداری دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی میکرو تیر تحت تحریک الکترواستاتیک با لایه های پیزوالکتریک را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که افزایش غیر خطینگی موجب کاهش دامنه پاسخ زمانی می‌شود. تاثیر رفتار وابسته به اندازه میکرو تیر غوطه ور در سیال تراکم ناپذیر تحت تحریک الکترواستاتیک توسط اعتمادی و همکاران [10] مطالعه شد. آنها نشان دادند که اعمال تئوری کوپل تنش و افزایش اندازه پارامتر مشخصه طولی باعث سفتتر شدن سیستم و متعاقب آن کاهش دامنه ارتعاشی و شیفت نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود.

همچنین دیده می‌شود که بعضی از محققان به مطالعه سازه‌های مهندسی با رفتار ویسکو الاستیک و با در نظرگرفتن تئوری غیرموضعی پرداخته‌اند. لی و همکاران [11] به مطالعه رفتار دینامیک خطی تیر ویسکوالاستیک اویلر-برنولی با تئوری غیر موضعی پرداخته‌اند. در کار آن‌ها از مدل کلوین-وییت[4] به منظور مدل کردن رفتار ویسکوالاستیک استفاده شده بود و با استفاده از مدل‌های ویسکوالاستیک استاندارد سه پارامتری و تئوری غیرموضعی تیر اویلر-برنولی، معادلات حاکم بر حرکت نانوتیرها استخراج شده بود. همچنین آن‌ها تحلیل مشابهی را برای تیرهای تیموشنکو انجام دادند [12]. تنگ و هو [13] با استفاده از مدل راس کروین آنگار[5] به مطالعه اثرات فرکانس طبیعی بر روی مشخصه‌ای دمپینگ تیرهای ویسکوالاستیک چند لایه پرداختند. فریسول [14] و همکاران با استفاده از مدل المان محدود، تیرهای ویسکو الاستیک را با تئوری غیر موضعی و با شرایط مرزی مختلف تحلیل کردند.

عموشاهی و ازهری [15] با استفاده از فرمول‌بندی المان محدود، تغییر شکل و کمانش ورق‌های ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف را مطالعه کردند. آنالیز ارتعاشات آزاد ورق‌های دایره‌ای ویسکوالاستیک قرار گرفته بر روری یک بستر الاستیک در مرزهای ورق، توسط شرعیات و همکاران [16] مطالعه شد. در کار آن‌ها خواص ماده ویسکوالاستیک در راستای ضخامت و شعاع ورق به‌طور مشابه تغییر می‌کند. صالحی و انصاری [17] در یک مطالعه جامع به بررسی کمانش تیرهای ویسکوالاستیک اویلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. در کار آن‌ها برای تیر تینوشنکو بار وابسته به زمان در راستای محوری و برای تیر اویلر-برنولی ترکیب بارهای محوری و عرضی وابسته به زمان در نظر گرفته شده بود. مانوویچ و کولاکسکی [18] تحریک آزاد و اجباری تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو را با رفتار ویسکوالاستیک که از قانون وویت پیروی می‌کند، مطالعه کردند. آن‌ها تاثیر انعطف پذیری برشی و ضریب ویسکوزیته را بر روی فرکانس‌های طبیعی و فاکتور تقویت دینامیکی را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که انعطاف‌پذیری برشی به طور موثری فرکانس‌های طبیعی را تحت تاثیر قرار می‌دهد و منحنی‌های فرکانسی را کاهش داده و پیک رزونانس را شیفت می‌دهد.

همچنان که از تحقیقات انجام شده قبلی دیده می‌شود تعداد بسیار کمی از محققین به مطالعه دینامیک غیرخطی مواد ویسکوالاستیک پرداخته‌اند. چنگ و ژنگ [19] آنالیز دینامیکی غیر خطی ورق مستطیلی با ماده ویسکوالاستیک تحت بار پریودیک را مطالعه کردند. لیبرسکو و چاندرامانی [20] پایداری دینامیکی ورق‌های ایزوتروپیک با رفتار ویسکوالاستیک را مطالعه کردند. سان و ژنگ [21] به مطالعه رفتارهای آشوب ورق‌های ویسکوالاستیک تحت بار پریودیک درون صفحه‌ای پرداختند. آن‌ها دریافتند که پایداری سازه با تنظیم پارامترهای ماده می‌تواند افزایش پیدا کند. فو و لو [22]، براساس روابط الاستیسیته سه‌بعدی به آنالیز دینامیک غیرخطی ورق‌های چند لایه متقارن ویسکوالاستیک با وجود ترک عرضی در فاز زمینه پرداختند. آنالیز دینامیکی غیرخطی و کمانش ورق‌های ترمومکانیکی کامپوزیتی ویسکوالاستیک و ساندویچ پنل‌ها توسط شرعیات [23] انجام شد. با استفاده از اصل کار مجازی، پیتی و ردی [24] به مطالعه مدل‌های المان محدود برای تغییر شکل‌های شبه استاتیک تیرهای ویسکو الاستیک اویلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. یزدی و جلیلی [25] تحلیل استاتیکی و

[1] p-doped si
[2] Thin Film
[3] Wafer Curvature
[4] Kelvin-Voigt
[5] RosseKerwineUngar

دینامیکی میکرو و نانوتیرهای کامپوزیت ویسکوالاستیک تحت تحریک پیزوالکتریک و الکترواستاتیک انجام دادند. حسینی و همکاران [26] با استفاده از روش اغتشاشات[1] به تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی تیرهای یکسر گیردار ویسکوالاستیک با یک لایه تحریک کننده پیزوالکتریک پرداختند. ژانگ و فو [27] با استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته، یک مدل جدید را برای میکرو تیرهای ویسکوالاستیک گسترش دادند. با در نظر گرفتن نیروی توزیع شده ویسکوز در میکرو تیرها و با اعمال تئوری تیر ویسکوالاستیک، تحلیل استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای ویسکوالاستیک توسط فو و ژانگ [28] و فو و همکاران [29] مطالعه شد. شوشتری و همکاران [30] تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیرهای یکسر گیردار ویسکوالاستیک پوشش داده شده با یک لایه پیزوالکتریک را مطالعه کردند.

ارتعشات غیر خطی ورقه کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی توسط کرانیان و همکاران [31] بررسی شد. آن‌ها با استفاده از تئوری کلوین-وویت و غیرخطی‌های ون-کارمان معادلات حرکت را استخراج کردند.

همچنان که از تحقیقات انجام شده قبلی دیده می‌شود بسیاری از محققان به تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیرهای الاستیک تحت تحریک الکترواستاتیک پرداخته‌اند. همچنین در بسیاری از آن‌ها با در نظر گرفتن تئوری‌های وابسته به اندازه مثل تئوری غیرموضعی و تئوری کوپل تنش بهبود یافته سعی در واقعی مدل کردن سازه‌های میکرو داشته‌اند. همان‌طور که از این تحقیقات دیده می‌شود حتی برای تیر ویسکوالاستیک نیز اثر این پارامترها به‌صورت کامل مطالعه نشده است. علی‌رغم این‌که شماری از مواد استفاده شده در میکروسازه‌ها ممکن است رفتار انالاستیک را داشته باشند ولی با مطالعات انجام شده توسط نویسندگان مقاله، هیچ پژوهشی در مورد ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای انالاستیک حتی بدون تحریک نیروی الکترواستاتیک و تئوری‌های وابسته به اندازه انجام نشده است.

این مقاله با استفاده از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به مطالعه ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها با رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان می‌پردازد. معادله حاکم بر حرکت در فرم کلی و بی‌بعد که توانایی مدل‌سازی انواع تیرها با رفتارهای مختلف تغییر شکل ماده و با خواص هندسی و مکانیکی مختلف را دارد، استخراج می‌شود. معادلات غیرخطی برمبنای روش اغتشاشات حل شده و به‌منظور صحه‌گذاری نتایج از روش عددی رانگ-کاتا[2] استفاده می‌شود. توافق بسیار خوبی بین نتایج دو روش فوق وجود دارد. در ادامه به مطالعه اثر انواع رفتارهای تغییر شکل ماده شامل الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک و همچنین اثر پارامترهای اثر اندازه، شدت انالاستیک و زمان آزادسازی انالاستیک بر ولتاژ پولین[3] و منحنی‌های پاسخ فرکانسی پرداخته می‌شود و نتایج به دست آمده به طور کامل تفسیر می‌شوند.

2- مدل سازی رفتار انالاستیک

2-1- پدیده شناسی رفتار انالاستیک

وقتی یک ماده تحت تنش خارجی قرار می‌گیرد باعث به‌وجود آمدن تغییر شکل در آن می‌شود. برای تنش‌های کوچک، تغییر شکل متناظر با آن آنی بوده و با برداشتن تنش مقدار کرنش از بین می‌رود که به این پدیده رفتار الاستیک گفته می‌شود. در بعضی از مواد تحت تنش، تغییر شکل به‌وجود آمده تابعی از زمان بوده و حتی در فرایند باربرداری نیز تابعی از زمان می‌باشد. در صورتی که تغییر شکل به وجود آمده در فرایند باربرداری کاملاً

[1] muliple scale
[2] Runge-Kutta
[3] Pull-In

برگشت‌پذیر باشد، به آن رفتار انالاستیک [32] و در صورتی که مقداری تغییر شکل در سیستم باقی بماند به آن رفتار ویسکو الاستیک گفته می‌شود.

در حالت کلی کرنش متناسب با تنش اعمال شده از چندین مولفه کرنش که توسط پاسخ آن‌ها در اثر باربرداری تنش می‌باشد، تشکیل شده است و هر بخش به‌طور متفاوت وابسته به زمان می‌باشد. به‌عنوان مثال سیستم‌های آلیاژی شیشه-فلز حداقل چهار مولفه کرنش دارند:

1- الاستیسته ایده‌آل: قابل برگشت، آنی، روابط تنش و کرنش خطی [33]

2- انالاستیسیته: قابل برگشت، وابسته به زمان، روابط تنش و کرنش خطی [34، 35]

3- ویسکوالاستیک: ماندگار، وابسته به زمان، روابط تنش و کرنش خطی [35]

4- پلاستیک: ماندگار، آنی، روابط تنش و کرنش غیرخطی [36]

در "شکل 1" نواحی تابع پاسخ و پسا اثر الاستیک برای رفتارهای الاستیک، ویسکو الاستیک و انالاستیک نشان داده شده است [28].

مقایسه بین رفتار ویسکوالاستیک و انالاستیک نشان می‌دهد که برای رفتار ویسکوالاستیک در طول فرایند گذرا در ناحیه تابع پاسخ، کرنش به‌طور خطی با زمان افزایش پیدا کرده که نشان‌دهنده تابع پاسخ ویسکوز پایدار می‌باشد با آن‌که برای رفتار انالاستیک با گذشت زمان کرنش به حالت تعادلی جدید می‌رسد. همچنین مقایسه بین رفتارهای الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک در ناحیه پسا اثر الاستیک نشان می‌دهد که برای رفتار الاستیک، کرنش به‌وجود آمده به‌طور آنی به صفر برمی‌گردد با آن‌که برای رفتار انالاستیک کرنش به‌صورت تابعی از زمان به صفر برگشته و کاملاً برگشت‌پذیر می‌باشد و برای رفتار ویسکوالاستیک بخشی از کرنش به‌صورت تابعی از زمان برگشت‌پذیر بوده و بخشی دیگر نیز به‌صورت ماندگار در سیستم باقی می‌ماند.

همچنان که "شکل 1" نشان می‌دهد در مواد انالاستیک سه ناحیه وجود دارد: ناحیه تابع پاسخ، ناحیه پسا اثر الاستیک و آزادسازی تنش. انالاستیسیته فرایندی برگشت‌پذیر و خطی می‌باشد که در آن تابع پاسخ به‌صورت زیر معرفی می‌شود [32].

$$J(t)=\varepsilon(t)/\sigma_0 \quad (1)$$

در رابطه (1)، $\varepsilon(t)/\sigma_0$ غیروابسته از σ_0 می‌باشد. در این رابطه تنش σ_0 ثابت اعمال شده به ماده مطابق "شکل 1" بوده و $\varepsilon(t)$ کرنش به وجود آمده می‌باشد. واضح است که برای ماده الاستیک، $J(t)$ به‌صورت J به‌دست می‌آید. مقدار اولیه J در زمان $t=0$ تابع کمپلیانس[4] آزاد نشده J_u نامیده می‌شود

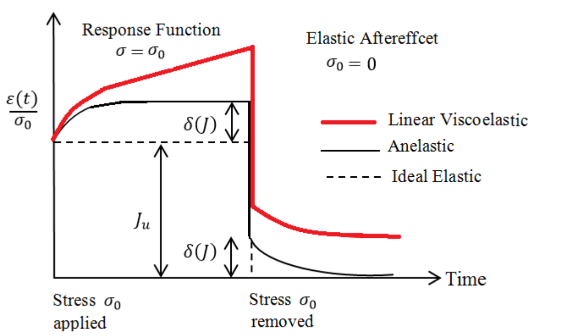


Fig. 1 Response function and elastic aftereffect for ideal elastic, anelastic and linear viscoelastic behaviors [32]

شکل 1 تابع پاسخ و پسا اثر الاستیک برای رفتارهای الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک [32]

[4] compliance

$(J(0) = J_u)$. مقدار تعادلی $J(t)$ در $t = \infty$ کمپلیانس آزاد شده J_r نامیده می‌شود $(J(\infty) = J_r)$. آزاد سازی کمپلیانس طبق رابطه (2) معرفی می‌شود [32]:

$$\delta(J) = J_r - J_u \tag{2}$$

از دیدگاه میکروسکوپی، حرکات عیوب ساختار کریستالی که از یک حالت تعادلی در زمان $t = 0$ به حالت تعادلی دیگر در زمان $t = \infty$ می‌رود، معرف تغییر شکل انالاستیک می‌باشد. شدت آزادسازی Δ، متناسب با تمرکز عیوب و زمان آزادسازیτ، بیانگر یک اندازه از تحرکشان می‌باشد [37]. بنابراین پدیده انالاستیک با دو پارامتر (τ, Δ) توصیف می‌شود.

2-2- روابط ریاضی حاکم بر رفتار انالاستیک

انالاستیک یک تغییر شکل خطی و قابل بازیابی است. انالاستیک در جامدات می‌تواند با آزمایش نشان داده شده در "شکل 2-الف" بیان شود. در ابتدا تنشσ از یک مقدار کم در زمان $t = 0$ به جسم نمونه اعمال می‌شود و ثابت می‌ماند تا کرنش ε ثبت شود. به‌عبارتی جسم دستخوش کرنش آنی الاستیک ε_e و کرنش انالاستیک ε_a می‌شود که با گذشت زمان از صفر به مقدار ε_A می‌رسد. حال اگر بار به‌طور ناگهانی برداشته شود، کرنش بلافاصله به اندازه ε_e کاهش پیدا می‌کند و به‌طور آرام (وابسته به زمان) به مقدار کرنش صفر کاهش پیدا می‌کند. طبق "شکل 2" در مواد الاستیک رابطه بین تنش و کرنش بر طبق قانون هوک به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon = J_u\sigma \tag{3}$$

همچنین در مواد انالاستیک کرنش کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_a = J_r\sigma \tag{4}$$

که ε_e و ε_a به ترتیب معرف کرنش الاستیک و انالاستیک می‌باشد.

ماده خطی ایده‌آل که دارای رفتار انالاستیک باشد با استفاده از سیستم فنر و دشپات مطابق "شکل 2-ب"، قابل مدل‌سازی می‌باشد. در این شکل $\eta = \tau/(J_r - J_u)$ می‌باشد. همچنان که قبلاً نیز گفته شد پدیده انالاستیک توسط دو پارامتر شدت آزادسازی Δ و زمان آزادسازی τ بیان می‌شود. شدت آزادسازی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_e} = \frac{(J_r - J_u)}{J_u} \tag{5}$$

در این رابطه ε_A بزرگی مقدار کرنش انالاستیک می‌باشد. با استفاده از "شکل 2"، کرنش انالاستیک ε_a به‌صورت رابطه نمایی زیر قابل توصیف است:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{6}$$

با جایگذاری روابط (3) و (6) در رابطه (4)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = J_u\sigma + \varepsilon_A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{7}$$

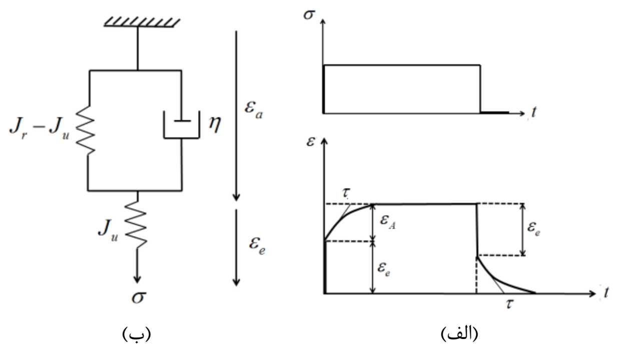


Fig. 2 Modeling of anelastic behavior of materials

شکل 2 مدل سازی رفتار انالاستیک

با مشتقگیری نسبت به زمان از رابطه (7)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau\dot{\varepsilon} = \tau J_u\dot{\sigma} + \varepsilon_A e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8}$$

با جمع کردن روابط (7) و (8)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\tau\dot{\varepsilon} + \varepsilon = \tau J_u\dot{\sigma} + J_u\sigma + \varepsilon_A \tag{9}$$

نهایتاً با به دست آوردن ε_A از رابطه (5) و (3) و جایگذاری آن در رابطه (9)، معادله ساختاری برای یک جامد ایده‌آل خطی که فرایند نشان داده شده در "شکل 2" را بیان می‌کند، به فرم زیر به دست می‌آید [32]:

$$\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon} = J_r\sigma + J_u\tau\dot{\sigma} \tag{10}$$

با استفاده از رابطه (5)، رابطه (10) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((1 + \Delta)\sigma + \tau\dot{\sigma})J_u = \varepsilon + \tau\dot{\varepsilon} \tag{11}$$

در فرم کلی معادله ساختاری برای مواد الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک به‌صورت زیر قابل نوشتن است:

$$((1 + \Delta)\sigma + \tau_1\dot{\sigma})J_u = \varepsilon + \tau_2\dot{\varepsilon} \tag{12}$$

معادله (12)، وقتی $\tau_1 = \tau_2$، بیانگر رفتار انالاستیک [32]، وقتی $\tau_1 = 0, \Delta = 0$، بیانگر رفتار ویسکوالاستیک کلوین-وویت [37] و وقتی $\tau_1 = \tau_2 = 0, \Delta = 0$ باشد بیانگر رفتار الاستیک می‌باشد.

3- معادله حاکم بر حرکت

مدل تیر مورد مطالعه در این مقاله، تیر اویلر-برنولی دو سر گیردار با طول L، عرض b ، ضخامت h و فاصله هوایی اولیه g_0 از صفحه ساکن بوده که تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک می‌باشد (شکل 3). در این شکل، x و z نیز به ترتیب جهات طولی و خیز تیر را نشان می‌دهند. در این تحقیق ولتاژ تحریک به‌صورت ترکیبی از ولتاژ جریان DC و AC می‌باشد. همچنین فرض شود که تیر ابتدا تحت تحریک الکترواستاتیک با ولتاژ DC (جریان مستقیم) قرار گرفته و دچار خمش استاتیک می‌شود و پس از انحراف از حالت اولیه، جریان متناوب شده و تیر تحت تحریک با ولتاژ AC قرار گرفته و شروع به ارتعاش می‌نماید. درنهایت تغییر مکان عرضی کلی تیر به‌صورت ترکیب تغییر شکل استاتیک و دینامیک خواهد بود.

براساس تئوری کوپل تنش بهبود یافته [38]، چگالی انرژی کرنشی تابعی از هر دوی کرنش (مرتبط با تنش‌ها) و انحنا (مرتبط با تانسور کوپل تنش‌ها) می‌باشد. با استفاده از رابطه (12)، روابط ساختاری برای میکروتیر ویسکوانالاستیک اویلر-برنولی با استفاده از تئوری کوپل تنش بهبود یافته به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(1 + \Delta + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_t = E\left(1 + \tau_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon$$
$$(1 + \Delta + \tau_1\frac{\partial}{\partial t})\sigma_m = 2\mu l^2(1 + \tau_2\frac{\partial}{\partial t})\varphi \tag{13}$$

معادلات (13) برای رفتار ویسکوالاستیک $(\Delta, \tau_1 = 0)$ در مرجع [24] موجود می‌باشد. در رابطه‌ی فوق، $\varphi, \sigma_m, \varepsilon, \sigma_t$ به ترتیب از راست به چپ تانسور تنش، تانسور کرنش، بخش غیرهمگن تانسور کوپل تنش و بخش متقارن تانسور انحنا می‌باشند. E وμ به ترتیب مدول‌های یانگ و برشی بوده

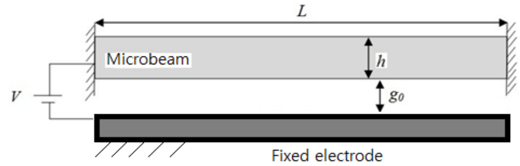


Fig. 3 Schematic representation of the micro-beam subjected to transverse electrostatic loading

شکل 3 شماتیک میکرو تیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک

و l پارامتر مربوط به اثر اندازه ماده می‌باشد. تانسور کرنش و قسمت متقارن تانسور کوپل تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\Delta u + (\Delta u)^{\mathrm{T}})$$
$$\varphi = \frac{1}{2}(\Delta\theta + (\Delta\theta)^{\mathrm{T}}) \tag{14}$$

در این رابطه u بردار جابجایی و θ بردار چرخش می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{curl}u \tag{15}$$

معادله حرکت برای تیر تحت تحریک نیروی وابسته به موقعیت و با در نظر گرفتن نیروی کشیدگی لایه میانی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\rho\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - F_{\mathrm{el}} - F_s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} \tag{16}$$

در رابطه‌ی فوق نیروی کشیدگی لایه میانی (F_s) به‌صورت زیر تعریف می‌شود [39]:

$$F_s = \frac{E\Gamma}{2L}(\int_0^L (\frac{\partial w}{\partial x})^2)dx \tag{17}$$

به‌علاوه در معادله (16)، ρ چگالی جرمی میکروتیر، Γ سطح مقطع تیر و q نیروی الکترواستاتیک (به دلیل ولتاژ اعمال شده) می‌باشد. همچنین در این معادله گشتاور معادل M_x و گشتاور کوپل Y_{xy} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_x = \int z\sigma_t d\Gamma$$
$$Y_{xy} = \int \sigma_m d\Gamma \tag{18}$$

همچنین کرنش‌ها برای تیر اویلر-برنولی به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{xz} = 0 \tag{19}$$

با ضرب کردن معادله اول رابطه (13) در z و سپس انتگرال گیری از هر دوی معادلات رابطه (13) و استفاده از روابط (14) تا (19)، نهایتاً معادله حاکم بر حرکت میکرو تیر ویسکو-انالاستیک در فرم کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(EI + \mu\Gamma l^2)\left(1 + \tau_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho\Gamma\left(1 + \Delta + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(1 + \Delta + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{E\Gamma}{2L}\left(\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(1 + \Delta + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\right)F_{\mathrm{el}} \tag{20}$$

به‌منظور عمومیت بخشیدن به معادلات حرکت و ساده‌سازی آن‌ها، در این‌جا از بی‌بعدسازی پارامترها به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{w} = \frac{w}{g_0}, \hat{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{c}, \hat{\tau}_2 = \frac{\tau_2}{c}, \hat{t}_1 = \frac{t}{c}, \lambda = \frac{g_0}{h} \tag{21}$$

در این رابطه c سرعت صوت در میکروتیر بوده و به‌فرم زیر تعریف می‌شود:

$$c = L^2\sqrt{\frac{\rho\Gamma}{EI}} \tag{22}$$

نهایتاً با استفاده از روابط بی‌بعد ارائه شده، معادله حاکم بر حرکت (معادله (20)) در فرم بی‌بعد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(1+\alpha)\left(1 + \hat{\tau}_2\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + \left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}_1^2} - 6\lambda^2\left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\left(\int_0^L\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2} = \left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\hat{F}_{\mathrm{el}} \tag{23}$$

در این رابطه $\alpha = 12(\mu/E)(l/h)^2$ می‌باشد:

نیروی الکترواستاتیک وارده بر میکروتیر $\hat{F}_{\mathrm{el}}$، در فرم بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{F}_{\mathrm{el}} = KV^2\frac{1}{(1-\hat{w})^2}, K = \frac{\epsilon_0 bL^4}{2EIg_0^2} \tag{24}$$

در این رابطه V ولتاژ اعمالی به تیر بوده و شامل دو ترم ولتاژ مستقیم V_{DC} و ولتاژ متناوب V_{AC} می‌باشد که به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$V = V_{\mathrm{AC}} + V_{\mathrm{DC}}, V_{\mathrm{DC}} = V_{\mathrm{dc}}, V_{\mathrm{AC}} = V_{\mathrm{ac}}\sin(\hat{\Omega}\hat{t}) \tag{25}$$

در این رابطه V_{dc} و V_{ac} به ترتیب بزرگی ولتاژهای مستقیم و متناوب می‌باشند و $\hat{\Omega}$ نیز فرکانس تحریک بی‌بعد است. فرض می‌شود که میکروتیر تحت ولتاژ مستقیم DC تحریک شده و دستخوش جابجایی می‌شود و سپس حول خیز استاتیکی به وجود آمده $\hat{w}_s$ با اعمال ولتاژ متناوب AC مرتعش شده و دستخوش خیز دینامیکی($\hat{w}_d(\hat{x},\hat{t})$) می‌شود. نهایتاً خیز کلی تیر مجموع خیز استاتیکی و دینامیکی تیر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \hat{w}_s(\hat{x}) + \hat{w}_d(\hat{x},\hat{t}) \tag{26}$$

با جای‌گذاری رابطه (26) در معادله (23)، معادله‌های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی میکروتیر به فرم زیر به دست می‌آید:

$$(1+\alpha)\frac{\partial^4\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^4} - 6\lambda^2(1+\Delta)\left(\int_0^L\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2} = KV_{dc}{}^2\frac{(1+\Delta)}{(1-\hat{w}_s)^2}$$

$$(1+\alpha)\left(1 + \hat{\tau}_2\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\frac{\partial^4\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^4} + \left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{t}_1{}^2} - 6\lambda^2\left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)\left(\int_0^L\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2} - 12\lambda^2\left(1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1}\right)(\int_0^L\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)\left(\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}\right)dx + \left(\int_0^L\left(\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}\right)^2 dx\right))(\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2}) = (1 + \Delta + \hat{\tau}_1\frac{\partial}{\partial\hat{t}_1})\hat{F}_{\mathrm{el-d}} \tag{27}$$

نیروی دینامیکی الکترواستاتیک $\hat{F}_{\mathrm{el-d}}$ و مشتق مرتبه اول آن نسبت به زمان در معادله فوق حول خیز استاتیکی به‌صورت زیر قابل بسط دادن می‌باشد:

$$\hat{F}_{\mathrm{el-d}} = K(\frac{2V_{\mathrm{dc}}{}^2\hat{w}_d}{(1-\hat{w}_s)^3} + \frac{2V_{\mathrm{dc}}V_{\mathrm{ac}}}{(1-\hat{w}_s)^2} + \frac{4V_{\mathrm{dc}}V_{\mathrm{ac}}\hat{w}_d}{(1-\hat{w}_s)^3} + \frac{3V_{\mathrm{dc}}{}^2\hat{w}_d{}^2}{(1-\hat{w}_s)^4} + \frac{4V_{\mathrm{dc}}{}^2\hat{w}_d{}^3}{(1-\hat{w}_s)^5})$$

$$\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{el}-d}}{\partial\hat{t}} = K(\frac{2V_{\mathrm{dc}}{}^2}{(1-\hat{w}_s)^3}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{t}} + \frac{2V_{\mathrm{dc}}}{(1-\hat{w}_s)^2}\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}} + \frac{4V_{\mathrm{dc}}V_{\mathrm{ac}}}{(1-\hat{w}_s)^3}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{t}} + \frac{4V_{\mathrm{dc}}\hat{w}_d}{(1-\hat{w}_s)^3}\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}} + \frac{6V_{\mathrm{dc}}{}^2}{(1-\hat{w}_s)^4}\hat{w}_d\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{t}} + \frac{12V_{\mathrm{dc}}{}^2\hat{w}_d{}^2}{(1-\hat{w}_s)^5}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{t}}) \tag{28}$$

4- حل معادلات

به منظور حل معادلات حاکم بر حرکت، روش گلرکین با تعداد درجات آزادی محدود به‌کار گرفته می‌شود. بنابراین حل تقریبی به‌صورت زیر برای خیز دینامیکی در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \sum_{k=1}^{N}\hat{q}_k(\hat{t})\psi_k(\hat{x}) \tag{29}$$

در این رابطه $\hat{q}_k(\hat{t})$ ضرایب زمانی مجهول تیر است و $\psi_k(\hat{x})$ شکل مود طبیعی تیر می‌باشد. با جایگذاری روابط (28) و (29) در معادله (27) و سپس با ضرب کردن $\psi_k(\hat{x})$ در معادله حاصله و نهایتاً انتگرال‌گیری روابط در راستای طولی تیر، معادله حاکم بر حرکت تیر به فرم زیر به دست می‌آید:

$$A_{1f}\left(K(1+\Delta)V_{\mathrm{AC}}+K\hat{\tau}_1\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}}\right)+\sum_{k=1}^{N}(K(1+\Delta)A_{2kf}+ KA_{3kf}\left((1+\Delta)V_{\mathrm{AC}}+\hat{\tau}_1\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}}\right)-(1+\alpha)A_{4kf} -6\lambda^2B_{1kf})\hat{q}_k+\sum_{k=1}^{N}(K\hat{\tau}_1\left(A_{2kf}+V_{\mathrm{AC}}A_{3kf}\right)- (1+\alpha)\hat{\tau}_1A_{4kf}-6\lambda^2B_{2kf})\dot{\hat{q}}_k-\sum_{k=1}^{N}(1+\Delta)A_{5kf}\ddot{\hat{q}}_k +\sum_{k=1}^{N}\hat{\tau}_1A_{5kf}\dddot{\hat{q}}_k+\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(K(1+\Delta)A_{6kmf}-6\lambda^2 B_{3kmf})\hat{q}_k\hat{q}_m+\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(K(1+\Delta)A_{7kmnf} -6\lambda^2B_{4kmnf})\hat{q}_k\hat{q}_m\hat{q}_n+2\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(K\hat{\tau}_1A_{6kmf}- 6\lambda^2B_{5kmf})\hat{q}_k\dot{\hat{q}}_m+3\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(K\hat{\tau}_1A_{7kmnf} -6\lambda^2B_{6kmnf})\hat{q}_k\hat{q}_m\dot{\hat{q}}_n=0;\ f=1,2,3,\dots,N \quad (30)$$

در این معادله مولفه‌های [A] و [B] به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$A_{1f}=\int_0^1\frac{2V_{\mathrm{dc}}}{(1-\hat{w}_s)^2}\psi_f\,d\hat{x},A_{2kf}=\int_0^1\frac{2V_{\mathrm{dc}}^2\psi_k\psi_f}{(1-\hat{w}_s)^3}d\hat{x}$$

$$A_{3kf}=\int_0^1\frac{4V_{\mathrm{dc}}}{(1-\hat{w}_s)^3}\psi_k\psi_f\,d\hat{x},A_{4kf}=\int_0^1{\psi_k}^{(4)}\psi_f\,d\hat{x}$$

$$A_{5kf}=\int_0^1\psi_k\psi_f\,d\hat{x},A_{6kmf}=\int_0^1\frac{3V_{\mathrm{dc}}^2\psi_k\psi_m\psi_f}{(1-\hat{w}_s)^4}d\hat{x}$$

$$A_{7kmnf}=\int_0^1\frac{4V_{\mathrm{dc}}^2\psi_k\psi_m\psi_n\psi_f}{(1-\hat{w}_s)^5}d\hat{x},B_{1kf}=$$

$$A_{5kf}=\int_0^1\psi_k\psi_f\,d\hat{x},A_{6kmf}=\int_0^1\frac{3V_{\mathrm{dc}}^2\psi_k\psi_m\psi_f}{(1-\hat{w}_s)^4}d\hat{x}$$

$$A_{7kmnf}=\int_0^1\frac{4V_{\mathrm{dc}}^2\psi_k\psi_m\psi_n\psi_f}{(1-\hat{w}_s)^5}d\hat{x},B_{1kf}=$$

$$\int_0^1(\int_0^1\frac{2\partial\hat{w}_s\psi_k'}{\partial\hat{x}}d\hat{x})\frac{\partial^2\hat{w}_s\psi_f}{\partial\hat{x}^2}d\hat{x}+\int_0^1(\int_0^1\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2d\hat{x})\times \psi_k''\psi_f\,d\hat{x},B_{2kf}=\int_0^1(\int_0^1\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2d\hat{x})\psi_k''\psi_f\,d\hat{x}+ \int_0^1(\int_0^1\frac{2\partial\hat{w}_s\psi_k'}{\partial\hat{x}}d\hat{x})\frac{\partial^2\hat{w}_s\psi_f}{\partial\hat{x}^2}d\hat{x},B_{3kmf}= \int_0^1(\int_0^1\psi_k'\psi_m'\,d\hat{x})\frac{\partial^2\hat{w}_s\psi_f}{\partial\hat{x}^2}d\hat{x}+\int_0^1(\int_0^1\frac{2\partial\hat{w}_s\psi_k'}{\partial\hat{x}}d\hat{x})\times \psi_m''\psi_f\,d\hat{x},B_{4kmnf}=\int_0^1(\int_0^1\psi_k'\psi_k'\,d\hat{x})\,\psi_n''\psi_f\,d\hat{x}$$

$$B_{5kmf}=\int_0^1(\int_0^1\frac{\partial\hat{w}_s\psi_m'}{\partial\hat{x}}d\hat{x})\,\psi_k''\psi_f\,d\hat{x}+\int_0^1(\int_0^1 2\psi_k'\psi_m'\,d\hat{x}) \times\frac{\partial^2\hat{w}_s\psi_f}{\partial\hat{x}^2}d\hat{x}+\int_0^1(\int_0^1\frac{\partial\hat{w}_s\psi_k'}{\partial\hat{x}}d\hat{x})\,\psi_m''\psi_f\,d\hat{x}$$

$$B_{6kmnf}=2\int_0^1(\int_0^1\psi_k'\psi_n'\,d\hat{x})\,\psi_m''\psi_f\,d\hat{x}+\int_0^1(\int_0^1\psi_k'\psi_m'\,d\hat{x}) \times\psi_n''\psi_f\,d\hat{x} \quad (31)$$

معادلات حاکم بر حرکت تیر به‌صورت عددی با استفاده از روش رانگ-کاتا قابل حل می‌باشد. به‌علاوه روش اغتشاشات مقیاس‌های چند گانه نیز به‌صورت عددی به منظور حل این معادلات می‌تواند به‌کار گرفته شود. در این تحقیق از روش حل عددی رانگ-کاتا به‌منظور صحه‌گذاری نتایج استفاده می‌شود و بعداً با استفاده از روش رانگ-کاتا در بخش نتایج نشان داده می‌شود که شکل مودهای بالا $(N=1,2,3,..)$ اثر چشمگیری بر نتایج نداشته و مود اول $(N$=1) می‌تواند به‌عنوان مود غالب در نظر گرفته شود. بنابراین در روش اغتشاشات فقط مود اول در نظر گرفته می‌شود. نهایتاً با اعمال $N=1$، $\hat{q}_1(\hat{t})=\hat{q}(\hat{t})$ و $\psi_1(\hat{x})=\psi(\hat{x})$ در معادله (27)، معادله مفروض به‌فرم زیر به دست می‌آید:

$$A_1\left(K(1+\Delta)V_{\mathrm{AC}}+K\hat{\tau}_1\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}}\right)+(K(1+\Delta)A_2+ KA_3((1+\Delta)V_{\mathrm{AC}}+\hat{\tau}_1\frac{\partial V_{\mathrm{AC}}}{\partial\hat{t}})-(1+\alpha)A_2-6\lambda^2B_1)\hat{q} +(K\hat{\tau}_1(A_2+V_{\mathrm{AC}}A_3)-(1+\alpha)\hat{\tau}_1A_4-6\lambda^2B_2)\dot{\hat{q}} -(1+\Delta)A_2\ddot{\hat{q}}+\hat{\tau}_1A_5\dddot{\hat{q}}+(K(1+\Delta)A_6-6\lambda^2B_3)\hat{q}\hat{q}^2 +(K(1+\Delta)A_7-6\lambda^2\,B_4)\hat{q}^3+2(K\hat{\tau}_1A_6-6\lambda^2 B_5)\hat{q}\dot{\hat{q}}+3(K\hat{\tau}_1A_7+6\lambda^2\,B_6)\hat{q}^2\dot{\hat{q}}=0 \quad (32)$$

برمبنای تکنیک اغتشاشات، پاسخ زمانی سیستم را می‌توان حول ε به صورت رابطه زیر بسط داد.

$$\hat{q}_k(\hat{t};\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^n q_j(T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

در این رابطه $T_2=\varepsilon^2\hat{t},T_1=\varepsilon\hat{t}$ و $T_0=\hat{t}$ مقیاس‌های زمانی چندگانه بوده و ε پارامتر بدون بعد اغتشاش است و دارای مقیاسی در اندازه دامنه جواب می‌باشد. مشتقات نسبت به هر یک از این مقیاس‌های زمانی، به‌صورت زیر دست می‌آیند.

$$\frac{d}{d\hat{t}}=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2D_2$$
$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2(D_1^2+2\varepsilon D_0D_2)+2\varepsilon^2D_0D_2$$
$$\frac{d^3}{d\hat{t}^3}=D_0^3+3\varepsilon D_0^2D_1+3\varepsilon^2D_0^2D_2+3\varepsilon^2D_2^2D_0 +6\varepsilon^3D_0D_1D_2+\varepsilon^3D_1^3+\cdots \quad (34)$$

در این رابطه $n=0,1,2,\ D_n=\partial/\partial T_n$ می‌باشد. برای بررسی تحریک اولیه، فرض می‌شود که فرکانس تحریک $(\hat{\Omega})$ بسیار نزدیک به فرکانس طبیعی خطی سیستم (ω) باشد، یعنی:

$$\hat{\Omega}=\omega+\varepsilon^2\sigma \quad (35)$$

در این رابطه σ پارامتر انحراف از تشدید نامیده می‌شود و مقدار اختلاف بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی خطی سیستم مربوطه را نشان می‌دهد. به‌منظور ساده‌سازی معادلات در محاسبات و نوشتن، علامت هت در معادلات و روابط حذف می‌شود. با جایگذاری معادلات (33) تا (35) در معادله (30) و سپس با برابر قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه ε در طرفین، روابط (36) تا (38) حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon^1: D_0^2q_1 + \omega^2q_1 = 0 \tag{36}$$

$$\varepsilon^2: D_0^2q_2 + \omega^2q_2 = -2D_0D_1q_1 + C_1q_1^2 \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^3: D_0^2q_3 + \omega^2q_3 = {} & -2D_0D_1q_2 + D_1^2q_1 + 2D_0D_2q_1 + \\ & C_2D_0q_1 + C_4D_0^3q_1 - 2C_1q_1q_2 + C_3q_1^3 + \\ & +C_5((1+\Delta)V_{\mathrm{ac}}\cos(\Omega t) + \tau_1V_{\mathrm{ac}}D_0\cos(\Omega t))\end{aligned} \tag{38}$$

در این معادلات داریم:

$$\begin{aligned}&\omega^2 = \frac{(1+\alpha)A_4 - 6\lambda^2B_1 - K(1+\Delta)A_2}{(1+\Delta)A_5}\\ &C_1 = \frac{-6\lambda^2B_3 + K(1+\Delta)A_6}{(1+\Delta)A_5}\\ &C_2 = \frac{(1+\alpha)\tau_2A_4 - 6\lambda^2B_2 - K\tau_1A_2}{(1+\Delta)A_5}\\ &C_3 = \frac{-6\lambda^2B_4 + K(1+\Delta)A_7}{(1+\Delta)A_5}, C_4 = \frac{-\tau_1}{(1+\Delta)}\\ &C_5 = \frac{-KA_1}{(1+\Delta)A_5}V_{\mathrm{ac}}\end{aligned} \tag{39}$$

حل عمومی معادله (36) بصورت زیر می‌باشد:

$$q_1\,(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)e^{i\omega T_0} + \overline{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega T_0} \tag{40}$$

در رابطه (40)، A یک تابع مختلط و $\overline{A}$ بیانگر مزدوج آن است. جایگذاری رابطه (40) در معادله (37) منجر خواهد شد به:

$$D_0^2q_2 + \omega^2q_2 = -2i\omega D_1Ae^{i\omega T_0} + C_1A^2e^{2i\omega T_0} + 2C_1A\overline{A} \tag{41}$$

شرط جمله‌پذیری معادله بالا ممانعت از شکل‌گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می‌باشد برای حذف ضریب جمله $e^{i\omega T_0}$ باید رابطه $D_1A = 0$ برقرار باشد. با اعمال این رابطه در معادله (41)، q_2 به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$q_2 = \frac{C_1A^2}{3\omega^2}e^{2i\omega T_0} + \frac{2C_1A\overline{A}}{\omega^2} + cc \tag{42}$$

نهایتاً جایگذاری روابط (40) و (42) در معادله (38) منجر می‌شود به:

$$\begin{aligned}D_0^2q_3 + \omega^2q_3 = {} & \\ & \Big(-2D_0D_2A + \frac{10C_1^2A^2\overline{A}}{3\omega^2} - C_2D_0A - 3C_3A^2\overline{A} + \\ & C_4D_0^3A + 0.5C_5A(i(1+\Delta) - \tau_1\omega)e^{i\sigma T_2}\Big)e^{i\omega T_0} \\ & +\Big(C_3A^3 - \frac{2C_1^2A^3}{3\omega^2}\Big)e^{3i\omega T_0} + 0.5C_5A(i(1+\Delta) - \tau_1\omega) \\ & \times e^{-(i\sigma T_0 + i\omega T_0)} + cc\end{aligned} \tag{43}$$

شرط جمله‌پذیری معادله بالا ممانعت از شکل‌گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می باشد برای حذف ضریب جمله $e^{i\omega T_0}$ در معادله (43) باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}&-2D_0D_2A + \frac{10C_1^2A^2\overline{A}}{3\omega^2} - C_2D_0A - 3C_3A^2\overline{A} + \\ &C_4D_0^3A + 0.5C_5A(i(1+\Delta) - \tau_1\omega)e^{i\sigma T_2} = 0\end{aligned} \tag{44}$$

معادله (44) یک معادله مختلط بوده و به منظور پیدا کردن جواب پایدار برای ارتعاشات عرضی میکروتیر تابع A به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta} \tag{45}$$

در این رابطه a و β به ترتیب بزرگی دامنه و زاویه فاز بوده و توابع حقیقی از T_2 می‌باشند. با جایگذاری رابطه (45) در معادله (44) و جداسازی ترم‌های مختلط و حقیقی و با تعریف یک متغیر جدید به شکل $\gamma = \sigma T_2 - \beta$، رابطه (46) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\gamma' = \sigma + \left(\frac{10C_1^2 - 9C_3\omega^2}{24\omega^3}\right)a^2 - \frac{C_5}{2\omega a}((1+\Delta)\sin(\gamma) \\ &\quad + \tau_1\omega\cos(\gamma))\\ &a' = -\frac{aC_2}{2} - \frac{aC_4\omega^2}{2} + \frac{C_5}{2\omega}((1+\Delta)\cos(\gamma) \\ &\quad - \tau_1\omega\sin(\gamma))\end{aligned} \tag{46}$$

با فرض $a' = \gamma' = 0$ برای وجود ارتعاشات پایدار و حذف γ از روابط فوق و بعضی ساده‌سازی‌ها، نهایتاً معادله پاسخ فرکانسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{\omega a}\Bigg\{&\left(\frac{9C_3\omega^2 - 10C_1^2}{24\omega^2}\right)a^3 \pm \frac{1}{2}\{C_5^2((1+\Delta)^2 \\ &+ (\tau_1\omega)^2) - (C_2\omega a + aC_4\omega^3)^2\}^{0.5}\Bigg\}\end{aligned} \tag{47}$$

5- استخراج نتایج و بحث بر روی آن‌ها

در این بخش، اثرات رفتارهای الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک بر ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها بررسی می‌شود. در ابتدا نتایج به‌دست آمده از فرمول‌بندی ارائه شده با استفاده از حل عددی رانگ-کاتا صحه‌گذاری گردیده و در ادامه اثر رفتارهای مختلف مواد و بعضی از پارامترهای موثر بر رفتار دینامیکی میکروتیرها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تیر مورد مطالعه ساخته شده از آلیاژ آلومینیوم+(1 درصد وزنی) مس بوده و دارای مدول یانگ 66.8 مگاپاسکال می‌باشد (جدول 1). این ماده قبلاً توسط مرجع [5] مورد مطالعه قرار گرفته و رفتار انالاستیک برای این ماده دیده شده است.

همچنان که قبلاً نیز گفته شد به‌منظور صحه‌گذاری نتایج از روش عددی رانگ-کاتا استفاده می‌شود و با استفاده از این روش، تاثیر شماره مودهای بالا بر رفتار دینامیکی میکروتیرها مطالعه می‌شود. پاسخ دینامیکی تیر انالاستیک برای مودهای $N = 1$, $N = 1{,}2$, $N = 1{,}2{,}3$ در "شکل 4" مطالعه شده است.

همچنان که "شکل 4" می‌دهد، مودهای بالا تاثیر ناچیزی بر پاسخ دینامیکی گذاشته و مود اول به تنهایی می‌تواند در استخراج نتایج استفاده شود. تغییرات دامنه ارتعاشات میکروتیر برحسب فرکانس تحریک در "شکل

Table 1 Geometrical properties of micro beam

جدول 1 خواص هندسی میکرو تیر

پارامتر	مقدار
طول (میکرومتر)	250
عرض (میکرومتر)	20
شخامت (میکرومتر)	2
فاصله هوایی (میکرومتر)	1
ثابت گذر دهی خلاء (پیکوفاراد بر متر)	8.8541

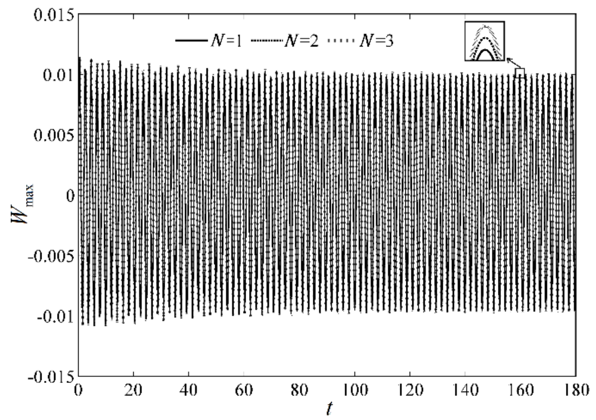


Fig. 4 Effects of higher modes on the dynamic response of a anelastic micro beam $\tau_{1,2} = 0.3, \Delta = 0.01, \Omega = 3$

شکل 4 اثر مودهای مرتبه بالا بر پاسخ دینامیکی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.3, \Delta = 0.01, \Omega = 3$

"5" نشان داده شده است. در این شکل خطوط ممتد نشانگر ناحیه پایدار و خطوط بریده نشانگر ناحیه ناپایدار می‌باشد. به‌منظور صحه‌گذاری بیشتر نتایج به‌دست آمده به روش اغتشاشات، نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش عددی رانگ-کاتا در نزدیکی نقطه P واقع بر ناحیه پایدار در "شکل 6" آورده شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که توافق بسیار خوبی بین روش اغتشاشات و رانگ-کاتا وجود دارد.

در "شکل 7" اثر شدت انالاستیک بر ولتاژ پولین براساس تئوری کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته آورده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش شدت انالاستیک، برای هر دو تئوری کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته، مقدار ولتاژ پولین کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، تئوری کوپل تنش بهبود یافته به دلیل بالابردن سفتی سازه باعث افزایش ولتاژ پولین می‌شود. در "شکل 8" تغییرات ولتاژ پولین با مقادیر مختلف اثر اندازه برای تیرهای الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک آورده شده است. همچنان که این شکل نشان می‌دهد با افزایش اثر اندازه به‌دلیل افزایش سفتی سازه مقدار ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. همچنین برای هر مقدار اثر اندازه ولتاژ پولین برای تیر الاستیک و ویسکوالاستیک بیشتر از تیر انالاستیک می‌باشد. مشابه با "شکل 7"، با افزایش شدت انالاستیک، سفتی سازه کاهش پیدا کرده و ولتاژ پولین کاهش

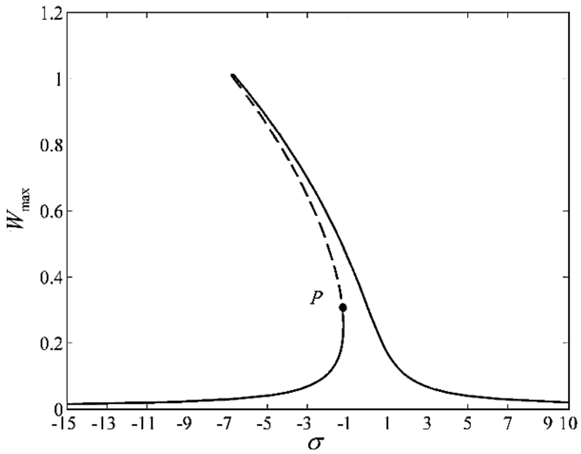


Fig. 5 Frequency response curve of micro anelastic beam $\tau_{1,2} = 0.1, \Delta = 0.01$

شکل 5 منحنی پاسخ فرکانسی برای میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.1, \Delta = 0.01$

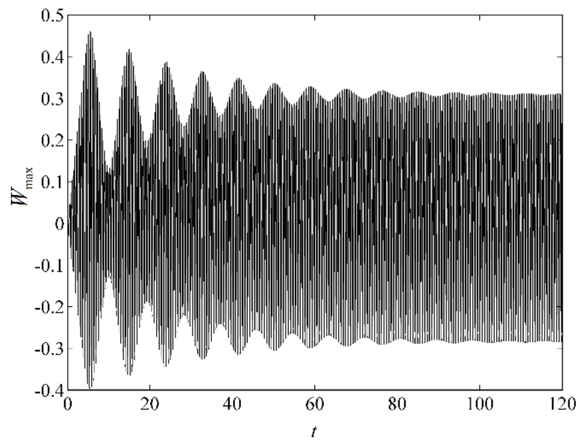


Fig. 6 Time history near points P

شکل 6 تاریخچه خیز نقطه P

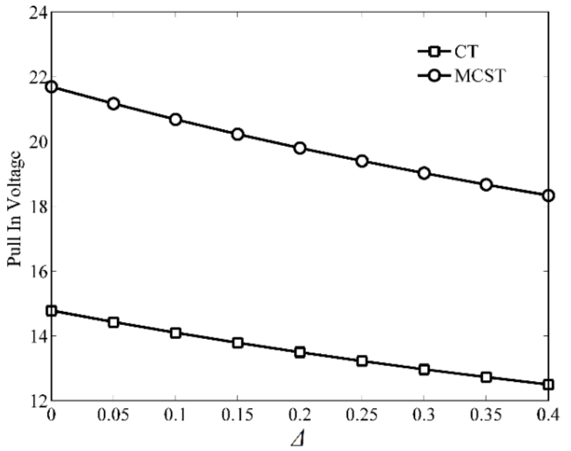


Fig. 7 Effects of anelastic relaxation intensity on the Pull-In voltage obtained by the CT and MCST

شکل 7 اثر شدت انالاستیک بر ولتاژ پولین براساس تئوری‌های کلاسیک و کوپل تنش بهبود یافته برای میکروتیر

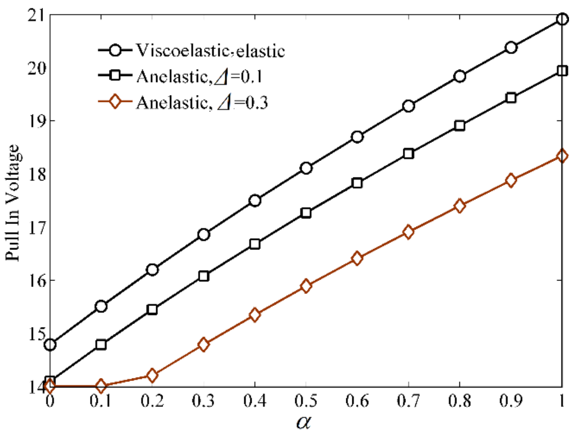


Fig. 8 variation of Pull-in voltage for different mechanical behaviours of materials for some length scales

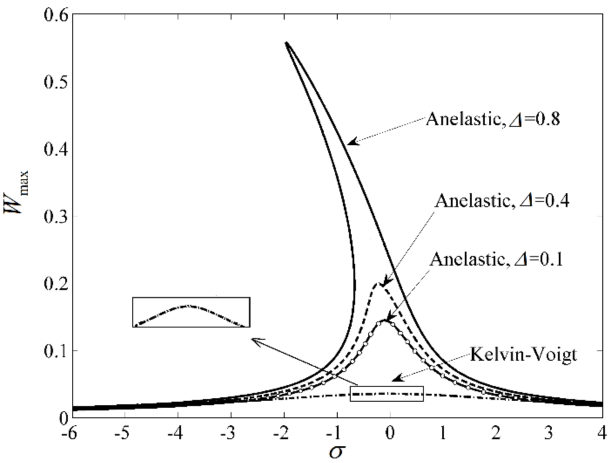
شکل 8 تغییرات ولتاژ پولین برای مقادیر مختلف اثر اندازه برای رفتارهای مختلف مواد میکروتیر

می‌یابد. این شکل نشان می‌دهد که ولتاژ پولین در هر مقدار اثر اندازه برای تیر الاستیک و ویسکوالاستیک یکسان می‌باشد.

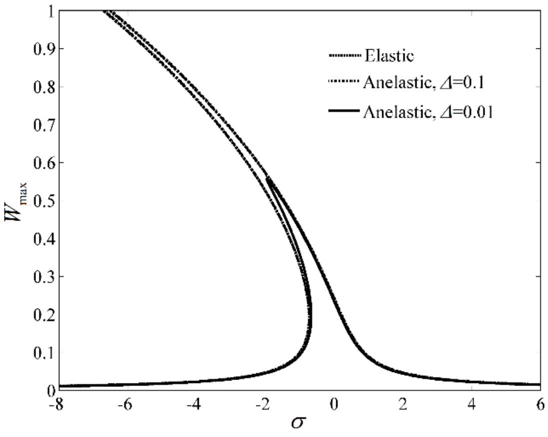
در ادامه به بررسی اثر رفتارهای مختلف مواد (الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک) و پارامترهای مختلف بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی پرداخته می‌شود. در "شکل 9" منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای مدل‌های الاستیک، ویسکوالاستیک (کلوین-وویت) و انالاستیک برای مقادیر مختلف زمان آزاد سازی و شدت‌های انالاستیک آورده شده است. همچنان که این شکل‌ها نشان می‌دهند برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، دامنه پاسخ فرکانسی به‌دست آمده از مدل انالاستیک بیشتر از مدل ویسکوالاستیک می‌باشد. از طرفی با افزایش شدت انالاستیک، دامنه پاسخ فرکانسی افزایش پیدا کرده یا به‌عبارتی نرمی سیستم بیشتر می‌شود. مقایسه بین مدل‌های انالاستیک و الاستیک نشان می‌دهد که در زمان‌های آزادسازی پایین (0.01) و برای شدت انالاستیک 0.1، منحنی پاسخ فرکانسی برای هر دو تیر الاستیک و انالاستیک تقریباً مشابه می‌باشند ولی با افزایش شدت انالاستیک، اختلاف بین دو مدل بیشتر می‌شود. در زمان‌های آزادسازی بیشتر (0.1)، برای هر مقدار شدت انالاستیک، نتایج به‌دست آمده از مدل‌های انالاستیک و ویسکوالاستیک متفاوت می‌باشد. تغییرات منحنی پاسخ فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر

اثر اندازه برای میکروتیر انالاستیک در "شکل 10" بررسی شده است. این شکل نشان می‌دهد که در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه سفتی تیر را افزایش داده و باعث کاهش دامنه پاسخ می‌شود. از این شکل دیده می‌شود که با افزایش پارامتر اثر اندازه از 0.1 به 0.3، مقدار بیشینه دامنه پاسخ 69.5 درصد کاهش می‌یابد.

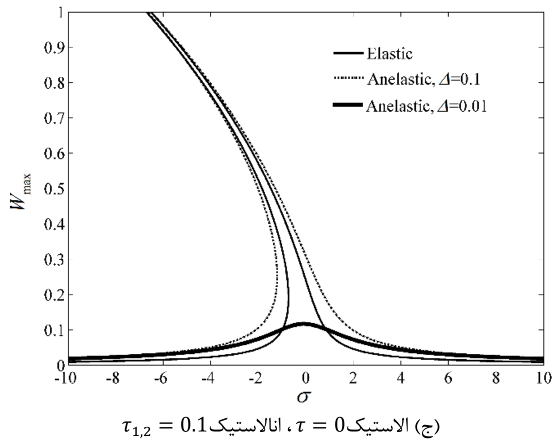
اثر زمان آزادسازی انالاستیک بر منحنی‌های فرکانسی در "شکل 11" مطالعه شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش زمان آزادسازی



(الف) ویسکو الاستیک $\tau = 0.01$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.01/\Delta$



(ب) الاستیک $\tau = 0$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.01$



(ج) الاستیک $\tau = 0$ ، انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.1$

Fig. 9 Effect of elastic, viscoelastic and anelastic deformation behaviours on frequency-response curves

شکل 9 اثر رفتارهای تغییر شکل الاستیک، ویسکوالاستیک و انالاستیک بر منحنی پاسخ فرکانسی

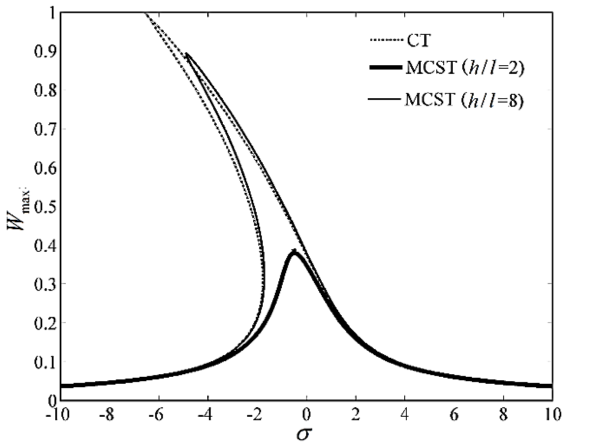


Fig. 10 Effect of modified couple stress theory on frequency-response curves $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

شکل 10 اثر تئوری کوپل تنش بهبود یافته بر منحنی پاسخ فرکانسی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

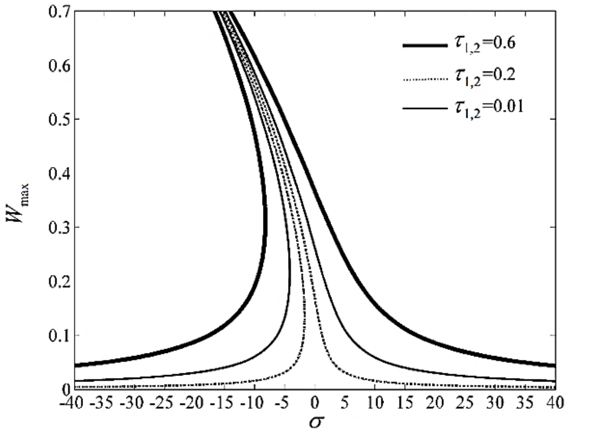


Fig. 11 Effect of anelastic relaxation time on frequency-response curves $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

شکل 11 اثر زمان آزادسازی انالاستیک بر منحنی پاسخ فرکانسی میکروتیر انالاستیک $\tau_{1,2} = 0.2, \Delta = 0.01$

سفتی کلی سازه افزایش پیدا کرده و منجر به کاهش دامنه پاسخ می‌شود. همچنین دیده می‌شود که با افزایش زمان آزادسازی رنج فرکانس عملیاتی نیز گسترش پیدا می‌کند.

6- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر با به‌کارگیری رفتار تنش-کرنش وابسته به زمان برای ماده با تغییر شکل انالاستیک، ارتعاشات غیرخطی میکروتیر تحت تحریک نیروی الکترواستاتیک مطالعه شد. معادلات حاکم بر حرکت براساس تئوری کوپل تنش بهبود یافته و با در نظر گرفتن نیروی کشیدگی لایه میانی به دست آمدند. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از روش اغتشاشات حل شدند و با استفاده از روش رانگ-کاتا نتایج به‌دست آمده صحه‌گذاری گردید. حل عددی نشان داد که مودهای مرتبه بالا تاثیر بسیار کمی بر جواب‌ها داشته و مود مرتبه اول می‌تواند به‌عنوان مود غالب در نظر گرفته شود. موارد زیر از نتایج این تحقیق می‌باشد:

1- در میکروسازه‌ها، بررسی رفتار تنش-کرنش مواد در فرآیند بارگذاری و باربرداری به‌منظور شناسایی رفتار تغییر شکل ماده بسیار مهم می‌باشد.

2- با افزایش شدت انالاستیک، سفتی کلی سازه کاهش پیدا کرده که باعث کاهش ولتاژ پولین و نهایتا افزایش دامنه پاسخ فرکانسی می‌شود.

3- مشابه با تیرهای الاستیک و انالاستیک، با افزایش اثر اندازه سفتی کلی سازه افزایش پیدا کرده که باعث کاهش دامنه پاسخ و افزایش ولتاژ پولین می‌شود.

4- تیر ویسکوالاستیک نسبت به تیر انالاستیک سفت‌تر بوده و برای خواص مشابه هندسی و مکانیکی تیر، ولتاژ پولین متناظر با تیر ویسکوالاستیک بیشتر از تیر انالاستیک و متناظراً دامنه پاسخ فرکانسی آن کمتر از تیر انالاستیک می‌باشد.

5- افزایش زمان آزادسازی انالاستیک منجر به افزایش سفتی سازه و نهایتاً کاهش دامنه پاسخ فرکانسی و وسیع‌تر شدن رنج فرکانس عملیاتی می‌شود.

6- در رنج پایین زمان آزاد سازی انالاستیک ($\tau_{1,2} = 0.01$) برای شدت انالاستیک $\Delta = 0.1$، دو مدل الاستیک و انالاستیک نتایج مشابه‌ای را پیش‌بینی می‌کنند ولی با افزایش شدت انالاستیک، اختلاف بین نتایج بیشتر می‌شود. در رنج‌های بالاتر زمان آزادسازی انالاستیک، برای هر مقدار دلخواه شدت انالاستیک، نتایج به دست آمده از مدل‌های الاستیک و انالاستیک متفاوت می‌باشند.

7- مراجع

[1] R. Lakes, *Viscoelastic Material*, pp. 58-88, Cambridge University Press, 2009.

[2] A. S. Nowick, B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, pp. 1-76, Academic Press, INC, New York, 1972.

[3] W. D. Nix, Mechanical properties of thin films, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 20, No. 11, pp. 2217-2245, 1989.

[4] D. Choi, H. Kim, W. D. Nix, Anelasticity and damping of thin aluminum films on silicon substrates, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 230-237, 2004.

[5] L. I. J. C. Bergers, J. P. M. Hoefnagels, N. K. R. Delhey, M. G. D. Geers, Measuring time-dependent deformations in metallic MEMS, *Microelectronics Reliability*, Vol. 51, No. 6, pp. 1054–1059, 2011.

[6] S. P. Baker, R. P. Vinci, T. Arias, Elastic and anelastic behavior of materials in small dimensions, *MRS Bulletin*, Vol. 27, No. 1, pp. 26-29, 2002.

[7] K. Gall, P. Kreiner, D. Turner, M. Hulse, Shape-memory polymers for micro electromechanical systems, *Journal of Microelectromechanial Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 472-483, 2004.

[8] M. Sadeghi, M. Fathalilou, Gh. Rezazadeh, Study on the size dependent behavior of a micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015. (In Persianفارسی)

[9] A. Raheli, S. Azizi, Sh. Faroughi, Dynamic analysis of a micro beam based on sub-harmonic parametric excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 372-382, 2017. (In Persianفارسی)

[10] H. Etemadi, M. Fathalilou, R. Shabani, Gh. Rezazadeh, A study on the size-dependent behavior of electrostatic microbeams immersed in incompressible fluid, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 185-192, 2017. (In Persianفارسی)

[11] Y. Lei, T. Murmu, S. Adhikari, M. I. Friswell, Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 42, No. 6, pp.125-136, 2013.

[12] Y. Lei, S. Adhikari, M. I. Friswell, Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams, *Engineering Science*, Vol. 66-67, No. 6, pp. 1-13, 2013.

[13] T. Teng, N. Hu, Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 29-30, pp. 3881- 3892, 2001.

[14] M. I. Friswell, S. Adhikari, Y. Lei, Non-local finite element analysis of damped beams, *Solids and Structures*, Vol. 44, No. 22-23, pp. 7564-7576, 2007.

[15] H. Amoushahi, M. Azhari, Static analysis and buckling of viscoelastic plates by a fully discretized nonlinear finite strip method using bubble functions, *Composite Structures*, Vol. 100, No. 3, pp. 205–217, 2013.

[16] M. Shariyat, A. Jafari, M. Alipour, Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, No. 1, pp. 88-98, 2013.

[17] M. Salehi, F. Ansari, Viscoelastic buckling of euler-bernoulli and timoshenko beams under time variant general loading conditions, *Iranian Polymer Journal*, Vol. 15, No.3, pp. 183-193, 2006. (In Persion فارسی)

[18] A. Manevich, Z. Kolakowski, Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 49, No.1, pp. 3-16, 2011.

[19] C. J. Cheng, N. H. Zheng, Chaotic and hyperchaotic behaviors of the viscoelastic rectangular plates under transverse periodic load, *Acta Mech Sinica*, Vol. 30, No. 6, pp. 690–699, 1998.

[20] L. Librescu, N. K. Chandiramani, Dynamic stability of transversely isotropic viscoelastic plates, *Sound Vibration*, Vol. 130, No.3, pp. 467–486, 1989.

[21] Y. X. Sun, S. Y. Zheng, Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates, *Mechanical Science*, Vol. 43, No. 5, pp. 1208–1995, 2001.

[22] Y. M. Fu, Y. H. Lu, Analysis of the nonlinear dynamic response of viscoelastic symmetric cross-ply laminated plates with transverse matrix crack, *Composite Structures*, Vol. 72, No. 4, pp. 469–476, 2006.

[23] M. Shariyat, A nonlinear double-superposition global–local theory for dynamic buckling of imperfect viscoelastic composite/ sandwich plates: A hierarchical constitutive model, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 11, pp. 1890–1899, 2011.

[24] G. S. Payette, H. N. Reddy, Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euller-Bernoulli and Timoshenko beams, *Commun Numer Methods Engineering*, Vol. 26, No. 12, pp. 1736–1755, 2010.

[25] F. Chitsaz-Yazdi, A. Jalali, Vibration behavior of a viscoelastic composite microbeam under simultaneous electrostatic and piezoelectric actuation, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 19, No. 3, pp. 277-304, 2015.

[26] S. M. Hosseini, A. Shooshtari, H. Kalhori, S. N. Mahmoodi, Nonlinear-forced vibrations of piezoelectrically actuated viscoelastic cantilevers, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 78, No. 1, pp. 571-583, 2014.

[27] J. Zhang, Y. Fu, Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory, *Meccanica*, Vol. 47, No. 7, pp. 1649-1658, 2012.

[28] Y. Fu, J. Zhang, Nonlinear static and dynamic responses of an electrically actuated viscoelastic microbeam, A*cta Mechanica Sinica*, Vol. 25, No. 2, pp. 211–218, 2009.

[29] Y. Fu, J. Zhang, R. Bi, Analysis of the nonlinear dynamic stability for an electrically actuated viscoelastic micro-beam, *Microsystem Technology*, Vol. 15, No. 5, pp. 63–769, 2009.

[30] A. Shooshtari, S. M. Hoseini, S. N. Mahmoodi, H. Kalhori, Analytical solution for nonlinear free vibrations of viscoelastic microcantilevers covered with a piezoelectric layer, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 1-10, 2012.

[31] S. E. Koranian, S. Esmaeelzadeh Khadem, M. Kokabi, Nonlinear free vibration analysis of the polymeric nanocomposite viscoelastic plates containing carbon nanotubes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 429-438, 2016. (In Persianفارسی)

[32] A. S. Nowick, B. S. Berry, *Anelastic Relaxationin Crystalline Solids*, pp. 1-76, Academic Press, NewYork, 1972.

[33] A. Inoue, A. Takeuchi, Recent Progress in Bulk Glassy Alloys, *Materials Transactions*, Vol. 43, No. 8, pp. 1892-1906, 2002.

[34] B. S. Berry, *Metallic Glasses*, American Society of Metals, Cleveland, Ohio, pp. 161, 1978.

[35] A. I. Taub, F. Spaepen, Ideal.elastic, anelastic and viscoelastic deformation of a metallic glass, *Journal of Materials Science*, Vol. 16, No. 11, pp. 3087-3092, 1981.

[36] L. A. Davis, *Metallic Glasses*, American Society of Metals, Cleveland, Ohio, pp. 190, 1978.

[37] L. W. Teufel, Prediction of hydraulic fracture azimuth from anelastic strain recovery measurements of oriented core, Proc, *23rd US Symposium on Rock Mechanics Berkeley: CA, American Rock Mechanics Association*, pp. 238–245, 1982.

[38] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Journal of Solid Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.

[39] A. Saeedi-Vahdat, G. Rezazadeh, Effects of axial and residual stresses on thermoelastic damping in capacitive micro-beam resonators, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, No. 4, pp. 622–639, 2011.