مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1396، دوره 17، شماره 7، ص‌ص 141-151

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات تیر خمیده لایه‌ای عمیق تحت بار متحرک با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و نیروی برشی

هدی سرپرست[1]، سیامک اسماعیل‌زاده‌خادم[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
*تهران، صندوق پستی 14115-177، khadem@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 19 فروردین 1396
پذیرش: 27 خرداد 1396
ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۶

کلید واژگان:
تحلیل دینامیکی
بار متحرک
کامپوزیت لایه‌ای
تیر تیموشنکو خمیده
سرعت بحرانی

چکیده

بررسی رفتار ارتعاشاتی سازه‌های خمیده کامپوزیتی تحت حرکت وسایل نقلیه به ندرت در میان تحقیقات گذشته وجود دارد. در این مقاله به تحلیل پاسخ دینامیکی یک تیر خمیده لایه‌ای عمیق با تکیه‌گاه‌های ساده تحت بار متحرک شعاعی بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو پرداخته شده است. به این منظور معادلات حرکت حاکم با فرض ثابت بودن انحنای تیر، تحت بار متحرک متمرکز با دامنه و سرعت ثابت به روش همیلتون استخراج شده‌اند. برای حل معادلات سیستم از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شده و پاسخ دینامیکی تیر در جهت‌های محوری، شعاعی و پیچشی به‌دست آمده‌اند. سرعت بار متحرک، شعاع و زاویه تیر خمیده در مدت زمان حضور بار متحرک بر تیر مؤثر است. اثرات مشخصات بار متحرک، هندسی و ماده بر پاسخ دینامیکی، فرکانس پایه‌ای تیر و سرعت بحرانی بار متحرک بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که در میان انواع مختلف لایه‌چینی‌های مورد بررسی کمترین و بیشترین خیز تیر برای تیر چهار لایه به ترتیب مربوط به حالت لایه‌چینی [90/0/90/0] و [45/-45/-45/45] است. علاوه‌بر این مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت بار متحرک تا پیش از سرعت بحرانی، جابه‌جایی دینامیکی تیر کاهش می‌یابد. در ضمن نشان داده می‌شود که افزایش شعاع تیر خمیده منجر به کاهش فرکانس و افزایش سرعت بحرانی بار متحرک می‌شود.

Vibration Analysis of a Laminated Deep Curved Beams Subjected to a Moving Load by Considering the Rotary Inertia and Shear Force

Hoda Sarparast, Siamak Esmaeilzade Khadem*

- Department of Mechanical Engineering TarbiatModaresUniversity, Tehran, Iran
*P.O.B. 14115-177 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 April 2017
Accepted 17 June 2017
Available Online ۱۳ July 2017

Keywords:
Dynamic Analysis, Moving Load, Laminated Composite, Curved Timoshenko Beam, Critical Speed.

ABSTRACT

The vibration analysis of curved composite structures under the moving vehicles is rarely investigated in litreture. Therefore, this paper studied the dynamic response of a simply supported laminated deep curved beam under a moving load based on Timoshenko beam theory. It is assumed that the curvature of the beam and the amplitude and the speed of the moving load are constant. The governing equations of motion for the system are extracted by Hamilton principles. Numerical and analytical methods are applied to obtain the dynamic response of the system. Also, the critical speed of the moving load and the fundamental frequency of the beam are obtained. The effects of the moving load characteristics, geometrical and material parameters such as the moving load speed, the radius of curvature and the modulus of elasticity in principal direction on the dynamic responses, fundamental frequency and critical speed of the system are investigated. The results show that the minimum and maximum deflection of the beam occur for lay-up [90/0/90/0] and [45/-45/-45/45] respectively. Furethermore, increasing the speed moving load l leads to decrease in the dynami deflection. It is also shown that the increase in the radius…leads to a decrease in the frequency/decrease of the frequency and critical speed moving load.

1- مقدمه

رفتار ارتعاشی سازه‌های مهندسی نظیر ریل‌ها، پل‌ها، جاده‌ها و باند فرودگاه‌ها به طور گسترده در سال‌های اخیر مطالعه شده است [2,1]. محققان با شبیه‌سازی سازه‌هایی مانند تیر، صفحه یا پوسته به مطالعه ارتعاشات آن‌ها تحت بارهای متحرک واحد یا چندتایی با سرعت ثابت یا متغیر پرداخته‌اند [5-3]. سانگ و همکارانش [6] روش عنصر طیفی حوزه فرکانس[1] را برای تخمین پاسخ دینامیکی تیر تحت بار متحرک نقطه‌ای پیشنهاد کرده‌اند. خلیلی و همکارانش [7] روش مربعات دیفرانسیلی ریتز مخلوط[2] را برای مطالعه ارتعاشات تیرهای تقویت شده تابعی[3] تحت بار متحرک ارائه داده‌اند. دیانگ و همکارانش [8] تجزیه و تحلیل دینامیکی تیرها روی بستر غیرخطی تحت بار متحرک را مطالعه کرده‌اند. بیللو و برگمن [9] یک مطالعه تئوری و

[1] Frequency Domain Spectral Element Method (SEM)

[2] Mixed Ritz-DQ

[3] Functionally Graded (FG)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

H. Sarparast, S. Esmaeilzade Khadem, Vibration Analysis of a Laminated Deep Curved Beams Subjected to a Moving Load by Considering the Rotary Inertia and Shear Force, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 141-151, 2017 (in Persian)

تجربی برای تجزیه و تحلیل ارتعاشی تیر اویلر- برنولی دارای ترک تحت بار متحرک انجام داده‌اند.

تیرهای خمیده به دلیل قابلیت تحمل بار بیشتر نسبت به تیرهای مستقیم، توسط تعداد زیادی از محققان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بررسی‌های متعددی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای خمیده با انحنای ثابت و یا غیریکنواخت انجام شده است [11,10]. تحقیقات گوناگونی با هدف تحلیل ارتعاشات تیرهای خمیده تحت بار متحرک ارائه شده‌اند. وو و چیانگ [12] پاسخ دینامیکی تیر هیبریدی و دایره‌ای یکنواخت تحت بار متحرک را تخمین زده‌اند. آن‌ها تأثیر نیروی اصطکاک و گریز از مرکز و سرعت بار متحرک را بر رفتار دینامیکی تیر بررسی کرده‌اند. میسنر و روتا [13] ارتعاشات خارج صفحه‌ای تیر خمیده غیرمنشوری با مقطع و انحنای متغیر را تحت بار متحرک با سرعت متغیر مطالعه کرده‌اند. وو و چیانگ [14] پاسخ دینامیکی تیر خمیده دایره‌ای تیموشنکو ناشی از بار متحرک را با استفاده از اجزای تیر خمیده به‌دست آورده و اثرات نسبت لاغری تیر خمیده، سرعت بار متحرک، نیروی برشی و اینرسی دورانی را بر پاسخ دینامیکی بررسی کرده‌اند. نیکخواه و همکارانش [15] به مطالعه رفتار ارتعاشی تیر خمیده اویلر- برنولی تحت بار متحرک با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی پرداخته‌اند. نیکخواه و کنعانی‌پور [16] جابه‌جایی دینامیکی تیر خمیده با مقطع یکنواخت تحت بار متحرک ثابت و با شرایط مرزی مختلف را تخمین زده‌اند. لین و لی [17] یک روش نیمه‌تحلیلی را برای تعیین پایداری ارتعاشی یک جرم متمرکز در حال حرکت بر یک تیر خمیده با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند. ایشان نتیجه گرفتند فقط زمانی که سرعت حرکت پایین است مسئله جرم متحرک را می‌توان با دقت خوبی توسط مدل بار متحرک تخمین زد. هوانگ و همکارانش [18] یک حل دقیق را برای تیر خمیده دایره‌ای تحت بار متحرک با استفاده از روش تبدیل لاپلاس پیشنهاد کرده‌اند. آن‌ها اثر مشخصات بار متحرک (نظیر سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک) و اثر مشخصات هندسی (مانند شعاع انحنا، تعداد دهانه و زاویه بازشدگی) را روی پاسخ دینامیکی بررسی کرده‌اند. ونگ و تیسو [19] فرکانس‌های مودال و شکل مودهای مربوط به ارتعاشات خارج صفحه‌ای تیر خمیده را با در نظر گرفتن اینرسی اعوجاجی و ممان کششی مقطع با استفاده از روش تحلیلی به‌دست آورده‌اند. آن‌ها نشان دادند که فرکانس‌های مودال با افزایش شعاع اولیه تیر افزایش می‌یابند و سرعت بحرانی تیر مستقیم بالاتر از محدوده تیر خمیده است. دای و انگ [20] یک پاسخ تحلیلی را برای پاسخ حالت پایدار یک تیر خمیده روی بستر الاستیک میرای ویسکوز تحت بارهای متحرک متوالی ارائه کرده‌اند. لی و همکاران [21] سازه‌های مسیر را به صورت تیر خمیده تیموشنکو دو وجهی مدل کرده‌اند و جابه‌جایی دینامیکی دقیق مسیر خمیده تحت بارهای متحرک را تخمین زده‌اند. آن‌ها نشان دادند که با فرض بارگذاری ثابت، جابه‌جایی مسیر خمیده با افزایش شعاع مسیر به میزان کمی کاهش می‌یابد. یانگ و وو [22] یک حل تحلیلی را برای تیر خمیده افقی تحت بار متحرک واحد و مجموعه‌ای از بارهای متحرک با فاصله برابر در جهت‌های افقی و عمودی استخراج کرده‌اند. آن‌ها شرایط پدیده تشدید و حذف بار را نیز بررسی کرده‌اند.

در سال‌های اخیر مواد کامپوزیتی به دلیل سبک وزن بودن، مقاومت و سختی بالا و مقرون به صرفه بودن مورد علاقه طراحان سازه واقع شده‌اند. به همین دلیل تجزیه و تحلیل ارتعاشی سازه‌های کامپوزیتی اهمیت ویژه‌ای دارد. اثر بار متحرک بر تیرهای لایه‌ای مستقیم به روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی شده است. پراساد و هرمان [23] ارتعاشات تیر تیموشنکو کامپوزیتی نامحدود را روی یک بستر الاستیک تحت بار متحرک و در حضور و غیاب میرایی مطالعه کرده‌اند. رضوانی و همکاران [24] پاسخ تیر کامپوزیتی لایه‌ای تحت بار هارمونیک متحرک روی بستر ویسکوالاستیک پسترناک[1] براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به‌دست آورده‌اند. لیو و همکاران [25] یک روش عددی و تجربی را برای پیش‌گویی رفتار ارتعاشی پل‌های کامپوزیتی قطارهای با سرعت‌های بالا ارائه کرده‌اند. کایا [26] تجزیه و تحلیل دینامیکی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای تحت بارهای متحرک را با استفاده از روش اجزای محدود چند لایه‌ای انجام داده است. او نتیجه گرفت که برای کامپوزیت‌های لایه‌ای تحت بار متحرک لایه‌چینی عمود بر هم مناسب‌تر از لایه‌چینی با زوایای دیگر است. کدیور و محب‌پور [27] یک روش اجزای محدود را برای محاسبه پاسخ دینامیکی تیرهای ارتوتروپیک لایه‌ای کامپوزیتی غیرمتقارن تحت بار متحرک براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌کار گرفته‌اند.

بر طبق تحقیقات یادشده در بالا، تجزیه و تحلیل ارتعاشاتی تیرهای خمیده لایه‌ای عمیق تحت بار متحرک تا به حال مطالعه نشده است؛ بنابراین مقاله کنونی به مطالعه رفتار دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای عمیق تیموشنکو با انحنای ثابت تحت بار متحرک شعاعی با سرعت ثابت پرداخته است. مدل ارائه شده در این پژوهش می‌تواند به مدل‌سازی سازه‌های صنعتی مانند پل‌های خمیده، تقویت‌کننده‌ها در صنعت هوافضا، زیر دریایی، سقف‌ها، پوسته‌ها و بخش‌های مکانیکی نظیر قلاب جرثقیل، گیره‌ها و غیره کمک نماید. برای نمونه پل خمیده‌ای که تحت بار یا جرم‌های متحرک قرار دارد. به این دلیل نتایج حاصل از این پژوهش برای طراحان و یا مهندسان مفید است. شرایط مرزی تیر خمیده لایه‌ای تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده و معادلات حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. برای تجزیه و تحلیل رفتار ارتعاشی سیستم روش‌های تحلیلی و عددی به کار رفته است، همچنین فرکانس پایه‌ای تیر و سرعت بحرانی بار متحرک به دست آمده است. در ادامه تأثیر چندین پارامتر مانند سرعت بار متحرک، زاویه تیر، مدول الاستیسیته جهت اصلی، نوع لایه‌چینی و تعداد لایه‌ها بر رفتار سیستم بررسی شده است.

2- مدل ریاضی

مدل تیر خمیده کامپوزیتی لایه‌ای با ضخامت و عرض یکنواخت h و b در شکل 1 نشان داده شده است. تیر با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت بار متحرک شعاعی p_w با سرعت ثابت v قرار گرفته (شکل 1) و انحنای تیر ثابت فرض شده و شعاع انحنا و زاویه تیر R و θ_l است. مختصات انتخاب شده برای تیر s، y و z که به ترتیب در امتداد طول، عرض و ضخامت است. u و w جابه‌جایی‌های مربوط به جهت‌های s و z، ψ هم چرخش حول محور s است. جابه‌جایی‌ها از صفحه میانی اندازه‌گیری می‌شوند (شکل 1). لایه‌های تیر کاملاً به یکدیگر چسبیده‌اند و ارتوتروپیک است. در مدل تیر خمیده لایه‌ای بررسی شده در این مقاله، میرایی سیستم اصلی ناچیز فرض شده و به همین دلیل در مدل‌سازی در نظر گرفته نشده است.

2-1- روابط تنش- کرنش

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای استخراج معادلات حاکم بر تیر استفاده شده است و جابه‌جایی یک نقطه دلخواه از تیر طبق رابطه (1) تعریف می‌شود.

[1] Pasternak

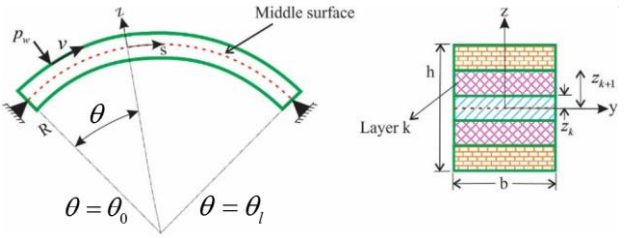

Fig 1. Schematic diagram of loading and boundary conditions of the laminated curved beam

شکل 1 نمای کلی از شرایط بارگـذاری و شرایط مرزی یک تیر خمـیده لایه‌ای

$$U(s,z,t) = u(s,t) + z\psi(s,t), W(s,z,t) = w(s,t) \quad (1)$$

که در آن t نشان‌دهـنده زمان است. کرنش‌های برشی و عمودی در هر نقطه از تیر طبق رابطه (2) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1+\frac{z}{R}}(\varepsilon_s^0 + z\chi_s), \quad \gamma_{sz} = \frac{1}{1+\frac{z}{R}}\gamma_{sz}^0 \quad (2)$$

χ_s نشان‌دهنده تغییرات انحنا و ε_s^0 و γ_{sz}^0 کرنش عمودی و برشی صفحه میانی است که طبق رابطه (3) داده شده‌اند [28].

$$\varepsilon_s^0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \chi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \gamma_{sz}^0 = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} + \psi \quad (3)$$

روابط تنش- کرنش در k-امین لایه از تیر خمیده لایه‌ای براساس قانون هوک است (رابطه (4)).

$$\begin{Bmatrix}\sigma_s \\ \tau_{sz}\end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}^k & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_s \\ \gamma_{sz}\end{Bmatrix}_k \quad (4)$$

که σ_s و τ_{sz} تنش‌های عمودی و برشی و $\bar{Q}_{11}^k$ و $\bar{Q}_{55}^k$ ثابت‌های سختی الاستیک است (رابطه (5)) [28].

$$\bar{Q}_{11}^k = Q_{11}^k \cos^4\alpha^k, \quad \bar{Q}_{55}^k = Q_{55}^k \cos^2\alpha^k,$$
$$Q_{11}^k = \frac{E_{11}}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}, \quad Q_{55}^k = G_{13} \quad (5)$$

α^k زاویه جهت اصلی لایه k-ام را با محور s مشخص می‌کند. E_{11} مدول الاستیسیته کامپوزیت در جهت اصلی و G_{13} مدول برشی، υ_{12} و υ_{21} ضرایب پواسون است.

با انتگـرال‌گیری از تنـش‌ها بر ضخامت تیر، نیروها و گشتاور به‌دست می‌آیند (رابطه (6)).

$$N = b\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s\, dz, \qquad Q = b\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{sz}\, dz,$$
$$M = b\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s\, z dz \quad (6)$$

N نیروی محوری و Q و M به ترتیب نیروی برشی و گشتاور خمشی است. رابطه (6) به صورت رابطه (7) می‌تواند نوشته شود.

$$N = b\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_s\, dz, \qquad Q = b\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \tau_{sz}\, dz,$$
$$M = b\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_s z\, dz \quad (7)$$

n تعداد لایه‌ها و z_k و z_{k+1} مختصات پایین‌ترین و بالاترین نقطه لایه k-ام را نشان می‌دهد (شکل 1).

رابطه (8) رابطه بین نیروها و ممان با تنش‌های عمودی، برشی و انحنا را مشخص می‌کند.

$$\begin{bmatrix}N \\ M \\ Q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_s^0 \\ \chi_s \\ \gamma_{sz}^0\end{bmatrix} \quad (8)$$

A_{11}، A_{55}، B_{11} و D_{11} ضرایب سختی و طبق رابطه (9) تعریف شده است.

$$A_{11} = Rb\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{11}^k \ln\left(\frac{R+z_{k+1}}{R+z_k}\right)$$
$$B_{11} = Rb\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{11}^k\left[(z_{k+1}-z_k) - R\ln\left(\frac{R+z_{k+1}}{R+z_k}\right)\right]$$
$$D_{11} = Rb\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{11}^k\left[\frac{1}{2}(z_{k+1}^2 - z_k^2) - 2R(z_{k+1}-z_k) + R^2\ln\left(\frac{R+z_{k+1}}{R+z_k}\right)\right]$$
$$A_{55} = k_s Rb\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{55}^k \ln\left(\frac{R+z_{k+1}}{R+z_k}\right) \quad (9)$$

k_s ضریب تصحیح برشی است و برای تیر کامپوزیتی لایه‌ای به پارامترهای مختلف تیر مانند نوع لایه‌چینی، زاویه ارتوتروپیک، خواص مواد، شرایط مرزی و بارگذاری بستگی دارد [29]. تعیین مقدار دقیق برای ضریب تصحیح برشی یک مسئله حل نشده است و تحقیقات در این زمینه همچنان ادامه دارد [30]، ولی در این تحقیق مانند مراجع [32,31] مقدار 5/6 برای آن در نظر گرفته می‌شود.

2-2- روابط انرژی

انرژی کرنشی تیر خمیده لایه‌ای با رابطه (10) تعریف می‌شود [28].

$$U = \frac{1}{2}\int_s \{N\varepsilon_s^0 + M\chi_s + Q\gamma_{sz}^0\} ds \quad (10)$$

با توجه به این‌که $s = R\theta, ds = Rd\theta$ و با استفاده از روابط (3) و (8) رابطه (10) به صورت رابطه (11) نوشته می‌شود [32].

$$U = \frac{1}{2}\int_\theta \{A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial(R\theta)} + \frac{w}{R}\right)^2 + 2B_{11}\frac{\partial\psi}{\partial(R\theta)}\left(\frac{\partial u}{\partial(R\theta)} + \frac{w}{R}\right) + D_{11}\left(\frac{\partial\psi}{\partial(R\theta)}\right)^2 + A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial(R\theta)} - \frac{u}{R} + \psi\right)^2\} Rd\theta \quad (11)$$

تابع انرژی جنبشی تیر می‌تواند براساس رابطه (12) تعریف شود [32].

$$T = \frac{1}{2}\int_\theta \left\{\bar{I}_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2\bar{I}_1\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \bar{I}_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + \bar{I}_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} Rd\theta \quad (12)$$

عبارت‌های اینرسی با رابطه (13) تعیین می‌شوند.

$$\bar{I}_0 = I_0 + \frac{I_1}{R}, \bar{I}_1 = I_1 + \frac{I_2}{R}, \bar{I}_2 = I_2 + \frac{I_3}{R}$$
$$[I_0, I_1, I_2, I_3] = b\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^k [1, z, z^2, z^3] dz \quad (13)$$

در رابطه (13) ρ^k چگالی kامین لایه است.

2-3- معادلات دیفرانسیلی حاکم

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون به‌دست می‌آید (رابطه (14)).

$$\delta\int_0^t (T + W - U)\, dt = 0 \quad (14)$$

در رابطه (13)، W کار نیروهای خارجی است که با رابطه (15) مشخص می‌شود.

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_l} p_w\, \delta(R\theta - vt) wRd\theta \quad (15)$$

δ تابع دلتای دیراک است.

با جای‌گذاری روابط (15,12,11) در رابطه (14) معادلات دیفرانسیلی حرکت در راستاهای محوری، شعاعی و پیچشی به صورت روابط (16-18) به‌دست می‌آیند.

$$\bar{I}_0R^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{I}_1R^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}-A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)-B_{11}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}-A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-u+R\psi\right)=0 \quad (16)$$

$$\bar{I}_0R^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+w\right)+B_{11}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\bar{I}_1-A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\frac{\partial u}{\partial \theta}+R\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)=p_wR^2\delta(R\theta-vt) \quad (17)$$

$$\bar{I}_1R^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{I}_2R^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}-B_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)-D_{11}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}+A_{55}R\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-u+R\psi\right)=0 \quad (18)$$

2-4- توابع مقایسه‌ای

برای حل معادلات (16-18) باید بخش زمانی و مکانی معادلات را با استفاده از روش گلرکین جدا کرد. در این روش جابه‌جایی در راستای شعاعی، محوری و پیچشی توسط توابعی که شرایط مرزی، هندسی یا هر دو را ارضا نمایند، در نظر گرفته می‌شوند [33]. در این‌جا جابه‌جایی شعاعی توسط توابع مقایسه‌ای سینوسی که شرایط مرزی دو سر مفصل را ارضا می‌کنند، معرفی می‌شود.

$$w(\theta,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_{w_i}(t)\sin\left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l}\right) \quad (19)$$

که q_{w_i} پاسخ زمانی شعاعی مربوط به iامین مختصات عمومی است.

با حل معادلات (16-18) در حالت استاتیکی تغییر مکان محوری (u) و پیچشی (ψ) تیر به صورت روابط (21,20) به‌دست می‌آیند.

$$u(\theta,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_{u_i}(t)\left(1-\cos\left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l}\right)-\left(1-(-1)^i\right)\frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (20)$$

$$\psi(\theta,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_{\psi_i}(t)\left(\cos\left(\frac{i\pi\theta}{\theta_l}\right)-1+\left(1-(-1)^i\right)\frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (21)$$

q_{u_i} و q_{ψ_i} با روابط (23,22) تعیین می‌شوند.

$$q_{u_i}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{\theta_l}{i\pi}\right)^2q_{w_i}(t) \quad (22)$$

$$q_{\psi_i}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_{11}+\frac{B_{11}}{R}}{B_{11}+\frac{D_{11}}{R}}\left(q_{w_i}(t)\frac{\theta_l}{i\pi}+q_{u_i}(t)\right) \quad (23)$$

β و γ هم طبق روابط (25,24) تعریف می‌شوند.

$$\beta=-A_{11}-A_{55}+\frac{B_{11}-RA_{55}}{B_{11}+\frac{D_{11}}{R}}\left(A_{11}+\frac{B_{11}}{R}\right) \quad (24)$$

$$\gamma=A_{11}\frac{i\pi}{\theta_l}+A_{55}\left(\frac{i\pi}{\theta_l}\right)^3+\frac{RA_{55}-B_{11}}{B_{11}+\frac{D_{11}}{R}}\left(A_{11}+\frac{B_{11}}{R}\right) \quad (25)$$

q_{u_i} و q_{ψ_i} پاسخ زمانی محوری و پیچشی مربوط به iامین مختصات عمومی است.

در واقعیت بارهای متحرک بر سازه در مدت زمان کوتاهی از روی تیر عبور می‌کنند؛ بنابراین این نوع مسائل ذاتاً گذراست. در نتیجه تنها مود اول به میزان قابل توجهی تحریک می‌شود. این موضوع زمانی که تیر تحت بار با

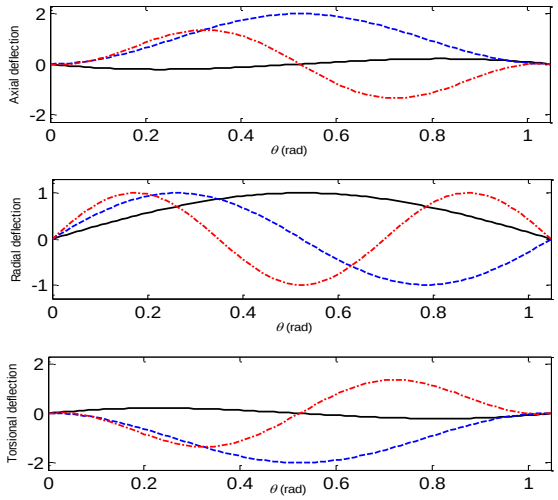

Fig. 2 The first three modes of simply supported laminated curved beam for $\theta=\pi/6$; 1st Mode: black solid line, 2nd Mode: blue dashed line, 3rd Mode: red dash- dotted line (axial, radial and torsioanal)

شکل 2 سه شکل مود اول تیر با تکیه‌گاه ساده برای $\theta=\pi/6$؛ شکل مود اول: خط سیاه توپر، شکل مود دوم: خط‌چین آبی و شکل مود سوم: خط‌نقطه قرمز (به ترتیب از بالا به پایین: محوری، شعاعی و پیچشی)

سرعت بالا قرار می‌گیرد، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. با توجه به این‌که فرکانس‌های سیستم به طور کافی مجزا و از هم دور است و جابه‌جایی کلی تیر در جهت‌های محوری، شعاعی و پیچشی یک بار با در نظر گرفتن مود اول و بار دیگر با درنظر گرفتن دو مود اول محاسبه و مشاهده شده است که مود اول بیشترین سهم را در جابه‌جایی کلی تیر در سه راستا دارد، جابه‌جایی‌های ناشی از مودهای بالاتر در مقابله با جابه‌جایی ناشی از مود اول قابل صرف نظر هستند. به همین دلیل و بر طبق مراجع [22,20]. فقط شکل مود اول تیر در جهت‌های محوری، شعاعی و پیچشی (شکل 2) در نظر گرفته شده است، طبق روابط (19-21) که با در نظر گرفتن تعداد مودهای بیشتر از تیر، پاسخ‌های دقیق‌تری به‌دست خواهند آمد.

$$u(\theta,t)=q_{u_1}(t)(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}) \quad (26)$$

$$w(\theta,t)=q_{w_1}(t)\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l} \quad (27)$$

$$\psi(\theta,t)=q_{\psi_1}(t)\left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right) \quad (28)$$

q_{u_1}، q_{w_1} و q_{ψ_1} نخستین مختصات عمومی برای جابه‌جایی‌های محوری، شعاعی و پیچشی است.

2-5- حل تحلیلی

جهت به کارگیری روش گلرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی (روابط (16-18)) به معادلات دیفرانسیلی معمولی (روابط (31-29)، دو طرف معادلات (16-18) به ترتیب در δu، δw و $\delta\psi$ که جابه‌جایی‌های مجازی است، ضرب شده و سپس از 0 تا θ_l انتگرال‌گیری شده‌اند.

$$a_1\ddot{q}_{u_1}+c_1\ddot{q}_{\psi_1}+d_1q_{u_1}+e_1q_{w_1}+g_1q_{\psi_1}=0 \quad (29)$$

$$b_2\ddot{q}_{w_1}+d_2q_{u_1}+e_2q_{w_1}++g_2q_{\psi_1}=p_wR^2\sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right) \quad (30)$$

$$a_3\ddot{q}_{u_1}+c_3\ddot{q}_{\psi_1}+d_3q_{u_1}+e_3q_{w_1}+g_3q_{\psi_1}=0 \quad (31)$$

ضرایب روابط (29-31) در ضمیمه الف تعریف شده و $L=R\theta_l$ است. پاسخ

کلی روابط (29-31) طبق روابط (32-34) به‌دست آمده‌اند.

$$q_{u_1}(t) = C_1 \sin(\omega_w t) + C_2 \cos(\omega_w t) + P_1 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (32)$$

$$q_{w_1}(t) = C_3 \sin(\omega_w t) + C_4 \cos(\omega_w t) + P_2 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (33)$$

$$q_{\psi_1}(t) = C_5 \sin(\omega_w t) + C_6 \cos(\omega_w t) + P_3 \sin\left(\frac{\pi v t}{L}\right) \quad (34)$$

ω_w فرکانس پایه‌ای تیر خمیده لایه‌ای است و از حل معادله مشخصه (35) به‌دست می‌آید.

$$A_1\omega_w^6 + A_2\omega_w^4 + A_3\omega_w^2 + A_4 = 0 \quad (35)$$

ضرایب معادله (35) در ضمیمه ب تعریف شده‌اند. P_1، P_2 و P_3 نیز از حل معادله (36) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1\left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & e_1 & g_1 - c_1\left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 \\ d_2 & e_2 - b_2\left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & g_2 \\ d_3 - a_3\left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 & e_3 & g_3 - c_3\left(\frac{\pi v}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -p_w R^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

با فرض این‌که تیر خمیده لایه‌ای پیش از قرار گرفتن تحت بار متحرک، در حالت تعادل پایدار باشد، جابه‌جایی و سرعت اولیه صفر است ($q_{u_1} = q_{w_1} = q_{\psi_1} = \dot{q}_{u_1} = \dot{q}_{w_1} = \dot{q}_{\psi_1} = 0$)؛ بنابراین ضرایب C_1 تا C_6 با توجه به شرایط اولیه تعیین خواهند شد (روابط (37-39)).

$$C_1 = -\frac{\pi v}{L\omega_w} P_1, \quad C_2 = 0 \quad (37)$$

$$C_3 = -\frac{\pi v}{L\omega_w} P_2, \quad C_4 = 0 \quad (38)$$

$$C_5 = -\frac{\pi v}{L\omega_w} P_3, \quad C_6 = 0 \quad (39)$$

برای سرعت یک مقدار بحرانی وجود دارد. ریشه‌های مثبت روابط (40) که از صفر قرار دادن دترمینان رابطه (36) به‌دست می‌آیند، سرعت بحرانی را مشخص می‌کنند. ضرایب روابط (40) در ضمیمه پ مشخص شده است.

$$B_1 v^6 + B_2 v^4 + B_3 v^2 + B_4 = 0 \quad (40)$$

اهمیت سرعت بحرانی به دلیل آن است که رفتار جابه‌جایی دینامیکی تیر در سرعت بحرانی دچار تغییر می‌شود. در سرعت‌های کم‌تر از مقدار بحرانی (مادون صوت) بیشینه جابه‌جایی شعاعی در زمان حضور بار بر تیر و مربوط به زمانی که بار در حال عبور از نقطه وسط آن است، ولی در سرعت‌های بالاتر از مقدار بحرانی (مافوق صوت) بیشینه جابه‌جایی شعاعی لزوماً مربوط به نقطه وسط تیر و در زمان حرکت بار بر سازه نیست. برای سرعت‌های بسیار بالاتر از سرعت بحرانی جابه‌جایی دینامیکی تیر به سرعت به سمت صفر میل پیدا می‌کند و برای سرعت‌های بسیار پایین‌تر از سرعت بحرانی جابه‌جایی دینامیکی تیر تقریباً به اندازه جابه‌جایی استاتیکی آن است. شعاعی که سرعت بحرانی در آن اتفاق می‌افتد شعاع بحرانی نام دارد. در سیستم‌های واقعی که شامل تیر خمیده تحت بار متحرک است معمولا شعاع تیر خمیده بزرگ‌تر از مقدار بحرانی انتخاب می‌شود [20,1].

2-6- حل عددی

برای مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی، روابط کوپل شده (29-31) به فرم فضای حالت نوشته شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول شده‌اند. این معادلات به صورت عددی و به کمک روش رانگ کوتای مرتبه چهارم در نرم افزار متلب حل شده‌اند.

3- نتایج و بحث

برای صحت‌سنجی روش ارائه شده در این مقاله برای آنالیز دینامیکی تیر خمیده لایه‌ای تحت بار متحرک متمرکز شعاعی ثابت، مشخصات هندسی، ماده و بار متحرک طبق جدول 1 درنظر گرفته شده است.

جابه‌جایی‌های محوری، شعاعی و پیچشی با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی پیشنهاد شده محاسبه شده‌اند. شکل 3 نشان می‌دهد که نتایج حل تحلیلی و عددی تطابق مناسبی با یکدیگر دارند.

در این تحقیق بیشینه جابه‌جایی‌های محوری، شعاعی و پیچشی نمایش داده شده‌اند. طبق روابط (19-21) بیشینه جابه‌جایی محوری و پیچشی در $\theta = 0.2196\theta_l$ و $\theta = 0.7803\theta_l$ و بیشینه جابه‌جایی شعاعی در $\theta = \theta_l/2$ رخ می‌دهد.

جدول 1 خصوصیات تیر خمیده لایه‌ای

Table 1 The properties of the laminated curved beam

R(m)	h(m)	b(m)	ρ(kg/m^3)	μ_{12}	μ_{21}
5	1	0.4	2015	0.24	0.24
E_{11} (Pa)	G_{13} (Pa)	Lay-up	v(m/s)	p_w (N)	
$120\cdot10^7$	$5.18\cdot10^9$	[0/90]	40	$1\cdot10^{10}$	

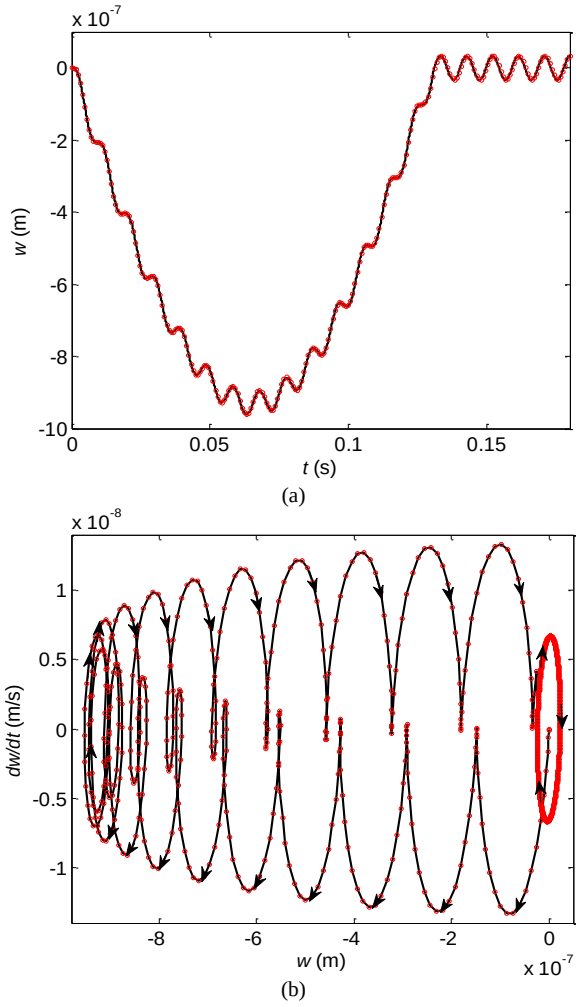

Fig. 3 a- Midpoint dynamic radial response, b- Phase plane for $R = 10\,m$; black solid line: analytical method, red hollow circle: numerical method

شکل 3 الف- پاسخ دینامیکی شعاعی نقطه وسط تیر، ب- صفحه فاز برای $R = 10\,m$؛ خط سیاه توپر: روش حل عددی، دایره توخالی قرمز: روش حل تحلیلی

در اغلب موارد نتایج به‌دست‌آمده برای جابه‌جایی محوری، شعاعی و پیچشی یکسان است؛ بنابراین در این مقاله معمولاً نتایج برای جابه‌جایی شعاعی ارائه شده و از آوردن نتایج برای جهات دیگر خودداری شده است. همان طور که در شکل 3-a مشاهده می‌شود پاسخ دینامیکی سیستم ترکیبی از یک منحنی نیم‌سینوسی با دامنه P_2 و فرکانس $\pi v/L$ (مربوط به زمان حضور بار متحرک بر تیر) و نوسانات سینوسی با دامنه C_3 و فرکانس ω_w (مربوط به پاسخ پایدار سیستم) است. زمانی که بار متحرک به نقطه وسط تیر می‌رسد جابه‌جایی نقطه وسط بیشینه می‌شود. به محض ترک بار از روی تیر ($t = L/v$) اثر بار متحرک بر جابه‌جایی تیر از بین رفته و تمامی نقاط تیر فقط حول مبدا به صورت هارمونیک نوسان می‌کنند. همان‌طور که در دیاگرام فاز سیستم (شکل 3-b) نیز دیده می‌شود مسیر سیستم پس از اتمام پاسخ گذرا (ناشی از عبور بار متحرک) جذب یک منحنی بسته حول مبدا می‌شود.

شکل 4 تأثیر پارامترهای هندسی و مادی تیر را بر فرکانس پایه‌ای شعاعی آن نشان می‌دهد. بر طبق شکل 4-a برای یک تیر خمیده با یک زاویه مشخص، افزایش شعاع تیر خمیده منجر به افزایش فرکانس آن می‌شود. البته در شعاع‌های بالاتر تأثیر افزایش شعاع در افزایش فرکانس ناچیز است. افزایش زاویه تیر برای تیر خمیده با یک شعاع مشخص منجر به کاهش فرکانس می‌شود. این نتایج با نتایج به‌دست‌آمده در مرجع [19] مطابقت دارد. شکل 4-b نیز تأثیر تغییرات مدول الاستیسیته در جهت اصلی و نوع لایه‌چینی را بر فرکانس پایه‌ای شعاعی نشان می‌دهد. سختی تیر مستقل از نوع لایه‌چینی با افزایش مدول الاستیسیته تیر در جهت اصلی افزایش می‌یابد، در نتیجه فرکانس پایه‌ای آن نیز افزایش می‌یابد. بر طبق نتایج به ازای تمامی مقادیر مدول الاستیسیته بیشترین مقدار به‌دست‌آمده برای فرکانس مربوط به لایه‌چینی [90/0/90/0] و کم‌ترین آن مربوط به لایه‌چینی [45/-45/-45/45] است.

برای ارزیابی تأثیر سرعت بار متحرک بر رفتار تیر در شکل 5 پاسخ زمانی سیستم به ازای سرعت‌های مختلف رسم شده است. دامنه پاسخ گذرای سیستم در سرعت‌های کم‌تر از سرعت بحرانی بزرگ‌تر از دامنه پاسخ پایدار است. با افزایش سرعت تا پیش از مقدار بحرانی طبق رابطه (36) ضرایب P_1، P_2 و P_3 (دامنه‌های منحنی نیم سینوسی) کاهش، طبق روابط (37-39) ضرایب C_1، C_3 و C_5 (دامنه‌های منحنی‌های سینوسی) کاهش می‌یابند. در حقیقت زمانی که بار متحرک با سرعت بیشتری از روی تیر عبور می‌کند نقاط مختلف تیر فرصت کمتری برای درک بار دارند و این عامل سبب جابه‌جایی کمتر نقاط مختلف تیر می‌شود.

شکل 6 نشان می‌دهد که افزایش شعاع و مدول الاستیسیته تیر در جهت اصلی هر دو سبب افزایش سرعت بحرانی بار متحرک می‌شود. این تأثیر در مقادیر پایین‌تر شعاع و مدول الاستیسیته بسیار بیشتر از مقادیر بالاست. خطوط تراز به‌دست‌آمده از سرعت بحرانی نیز با نتایج به‌دست‌آمده از مرجع [20] مطابقت دارد. در مرجع [20] این نتیجه به‌دست آمده است که سرعت بحرانی از یک تیر مستقیم به یک تیر خمیده افت قابل ملاحظه‌ای دارد. کم‌ترین سرعت بحرانی برای پاسخ داخل صفحه‌ای بسیار پایین‌تر از پاسخ خارج صفحه‌ای است.

شکل 7 اثر افزایش دامنه بار متحرک بر افزایش پاسخ دینامیکی محوری و شعاعی را نشان می‌دهد. دامنه نوسانات پایدار سیستم با افزایش بار افزایش می‌یابد.

شکل 8 نشان می‌دهد که دامنه نوسانات گذرا و پایدار سیستم در جهت

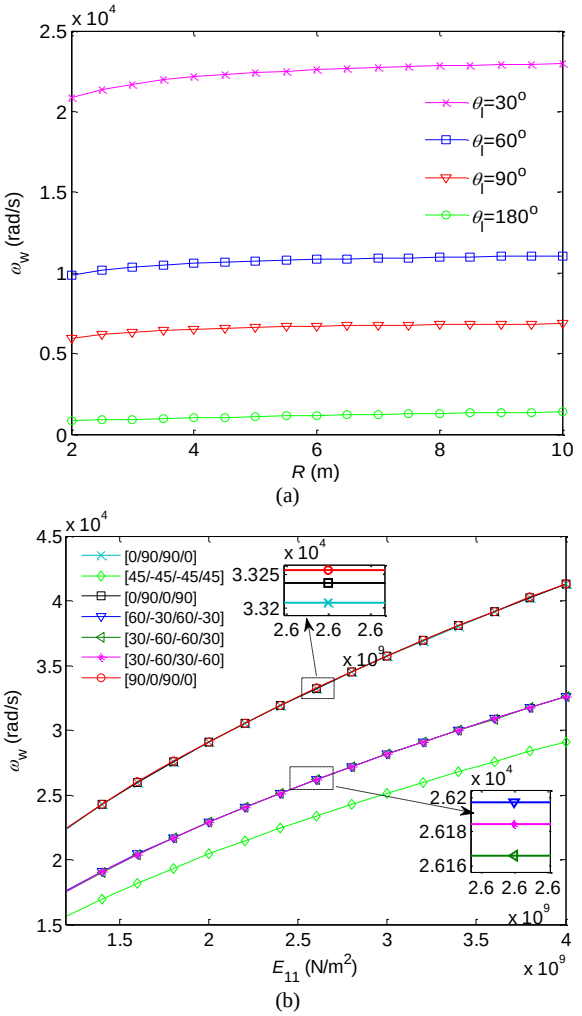

Fig. 4 The influence of (a) the radius and the angle of laminated curved beam (b) the modulus of elasticity of the composite material in the principal direction and the stacking sequence on the fundamental frequency

شکل 4 الف- تأثیر شعاع و زاویه تیر خمیده لایه‌ای بر فرکانس پایه‌ای تیر، ب- تأثیر مدول الاستیسیته جهت اصلی و نوع لایه‌چینی روی فرکانس پایه‌ای تیر

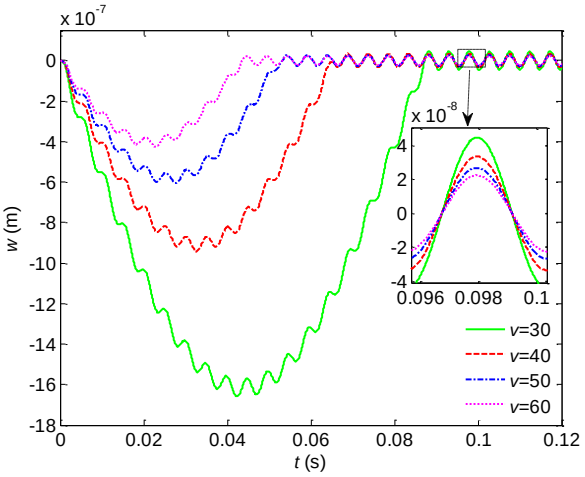

Fig. 5 The influence of the moving load speed on the midpoint radial response

شکل 5 تأثیر سرعت بار متحرک بر پاسخ شعاعی نقطه وسط تیر

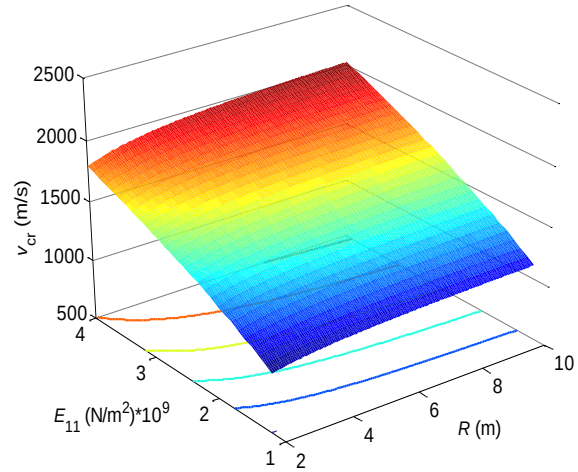

Fig. 6 The influence of the radius and the modulus of elasticity in the principal direction on the critical moving load speed

شکل 6 تأثیر شعاع و مدول الاستیسیته جهت اصلی بر سرعت بحرانی بار متحرک

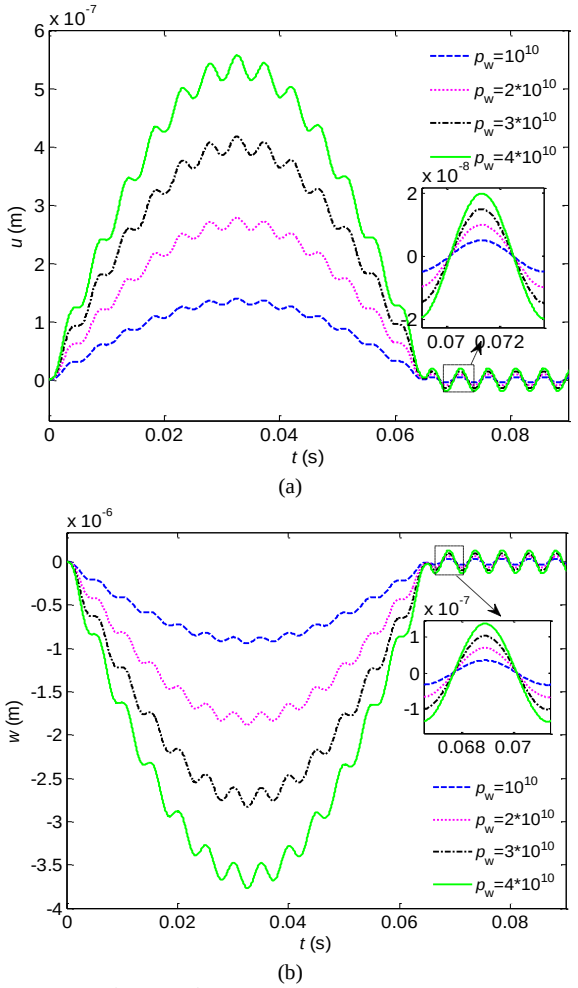

Fig. 7 The influence of the moving load value on the maximum a- axial and b- radial response

شکل 7 تأثیر مقدار بار متحرک بر بیشینه، الف- پاسخ محوری، ب- پاسخ شعاعی تیر

شعاعی با افزایش شعاع انحنا تقریباً تغییری نمی‌کند، ولی در جهت پیچشی کاهش می‌یابد. دلیل کاهش دامنه ارتعاشات پیچشی با افزایش شعاع، دور شدن فرکانس‌های خمشی و پیچشی از یکدیگر و کوپل‌شدگی کمتر است .

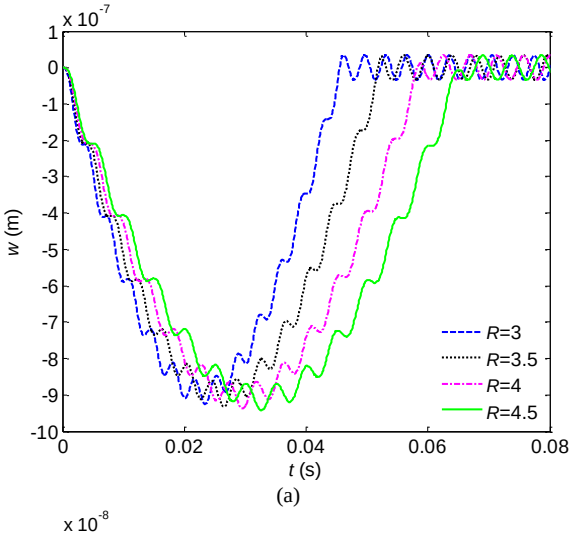

Fig. 8 The influence of the radius of the laminated curved beam on the maximum, a- radial and b- torsional response

شکل 8 تأثیر شعاع تیر خمیده لایه‌ای بر بیشینه، الف- پاسخ شعاعی، ب- پاسخ پیچشی تیر

افزایش شعاع انحنای تیر سبب می‌شود بار متحرک در زمان طولانی‌تری تیر را ترک کند.

شکل 9-a نشان می‌دهد که با افزایش زاویه تیر دامنه پاسخ گذرا افزایش می‌یابد و بار در زمان طولانی‌تری تیر را ترک می‌کند، همچنین دامنه نوسانات مربوط به پاسخ پایدار سیستم با افزایش زاویه تیر افزایش می‌یابد. شکل 9-b تأثیر افزایش زاویه تیر بر بیشینه پاسخ شعاعی آن را نشان می‌دهد. لازم به یادآوری است که بیشینه جابه‌جایی شعاعی تیر در تمام بازه زمانی که بار بر تیر حضور دارد و سپس تیر را ترک می‌کند در نظر گرفته می‌شود. تأثیر افزایش زاویه تیر بر افزایش پاسخ شعاعی در سرعت‌های پایین قابل ملاحظه است.

بسیاری از پژوهشگران در ادبیات فنی اثر نوع لایه‌چینی را بر مقاومت و جابه‌جایی تیر لایه‌ای کامپوزیتی مستقیم به صورت تئوری و تجربی مطالعه کرده‌اند [34,26]. تحقیقات در این زمینه بر لایه چینی‌های متنوعی انجام شده است. تعداد لایه‌ها، زوایای قرارگیری لایه‌ها بر یکدیگر و تقارن یا عدم تقارن لایه‌ها هر کدام به طور جداگانه تأثیر قابل توجهی در مقاومت و سختی تیر دارند. البته عوامل دیگر مانند وجود بار متحرک، هندسه و شرایط مرزی تیر نیز می‌توانند عوامل یادشده را تحت شعاع قرار دهند.

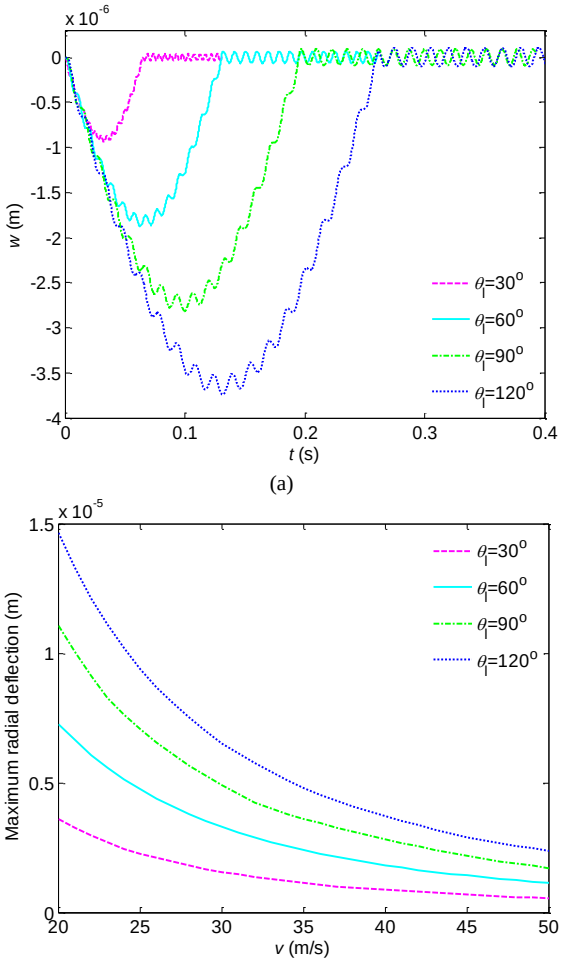

Fig. 9 The influence of the angle of laminated curved beam on the a- midpoint radial response and b- maximum midpoint radial response at different speeds

شکل 9 تأثیر زاویه تیر خمیده لایه‌ای بر الف- پاسخ شعاعی نقطه وسط تیر، ب- بیشینه پاسخ شعاعی نقطه وسط تیر در سرعت‌های مختلف

شکل b,a-10 نشان می‌دهد که تأثیر نوع لایه چینی بر پاسخ دینامیکی تیر در راستای پیچشی بسیار بیشتر از راستای شعاعی است و دامنه نوسانات پایدار و ناپایدار سیستم برای لایه‌چینی‌های [0/90/0/90] و [45/-45/-45/45] به ترتیب کم‌ترین و بیشترین مقدار را به خود اختصاص می‌دهند. شکل c-10 نیز بیشینه جابه‌جایی پیچشی تیر را برحسب نمایش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد اختلاف بین جابه‌جایی‌ها در سه راستا با لایه‌چینی‌های مختلف در سرعت‌های پایین بیش از سرعت‌های بالاست.

شکل a-11 تأثیر تعداد لایه‌های کامپوزیتی بر پاسخ دینامیکی شعاعی نقطه وسط تیر را نشان می‌دهد. براساس این شکل جابه‌جایی‌های تیر خمیده با افزایش تعداد لایه‌ها افزایش می‌یابد. تعداد لایه‌ها در دامنه نوسانات پایدار و زمان ترک بار از روی تیر اثری ندارند. براساس شکل b-11 بیشینه جابه‌جایی شعاعی نقطه وسط تیر با افزایش تعداد لایه‌ها افزایش می‌یابد. اختلاف بین جابه‌جایی‌ها در تعداد لایه‌های مختلف در سرعت‌های پایین بیش از سرعت‌های بالاست. البته تأثیر تغییر تعداد لایه‌ها در جابه‌جایی‌های سه راستا چندان قابل توجه نیست.

در نهایت تأثیر تغییرات مدول الاستیسیته تیر در جهت اصلی بر رفتار سیستم بررسی شده است. همان طور که شکل 12 نشان می‌دهد دامنه پاسخ

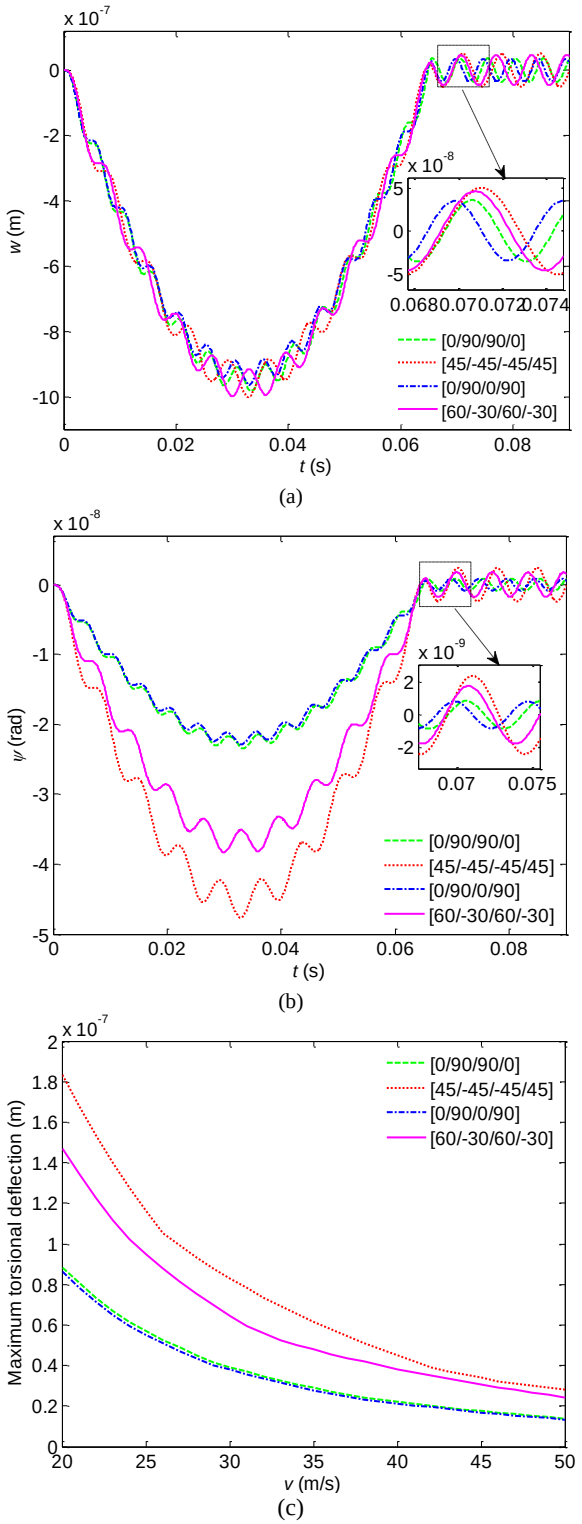

Fig. 10 The influence of the stacking sequence on the maximum,a- radial and b- torsional response, c- torsional response at the different speeds

شکل 10 تأثیر نحوه لایه‌چینی بر بیشینه، الف- پاسخ شعاعی و ب- پاسخ پیچشی، پ- پاسخ پیچشی تیر در سرعت‌های مختلف

گذرا و پایدار سیستم با افزایش مدول الاستیسیته تیر در جهت اصلی کاهش می‌یابد و این کاهش برای جابه‌جایی‌های پیچشی بسیار بیشتر از جابه‌جایی‌های شعاعی است. افزایش مدول الاستیسیته تیر در جهت اصلی، افزایش سختی و در نتیجه افزایش فرکانس پایه‌ای تیر را به دنبال دارد؛

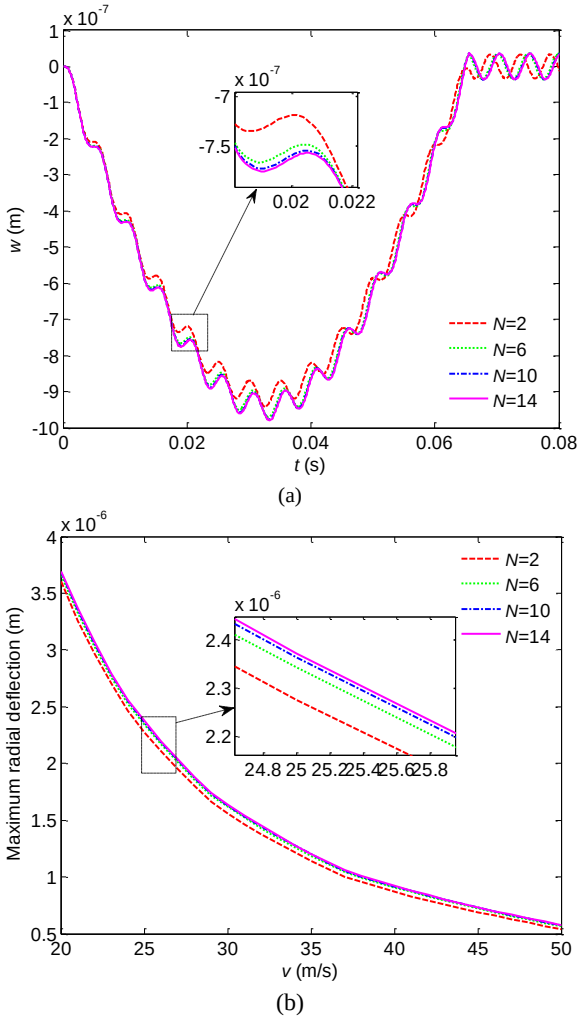

Fig. 11 The influence of the number of layers on the, a- midpoint radial response, b- maximum midpoint radial response at the different speeds

شکل 11 تأثیر تعداد لایه‌ها بر الف- پاسخ شعاعی نقطه وسط تیر، ب- بیشینه پاسخ شعاعی نقطه وسط تیر در سرعت‌های مختلف

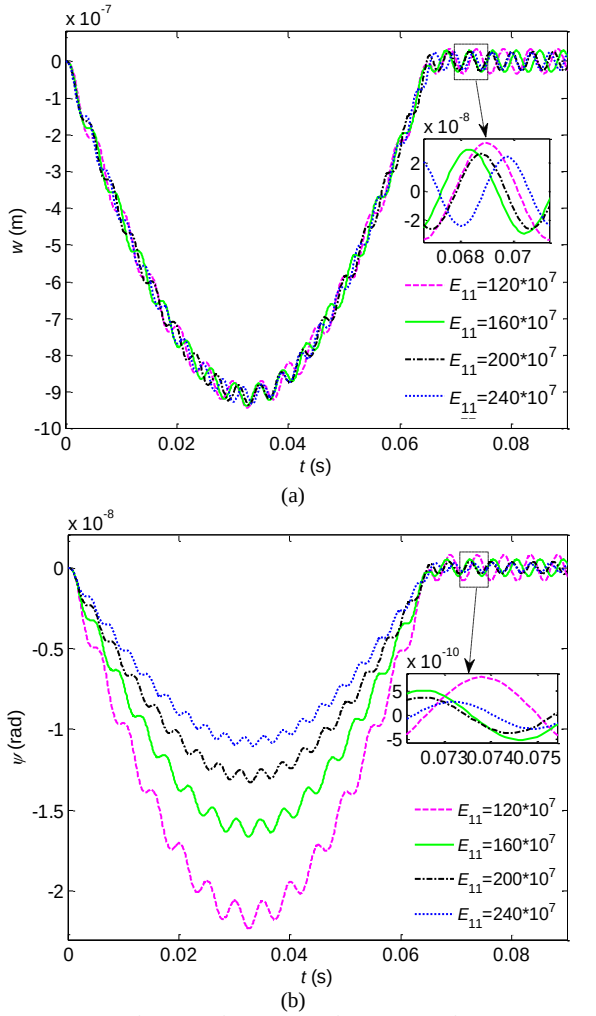

Fig. 12 The influence of modulus of elasticity of the composite material in the principal direction on the maximum a- radial response, b- torsional response

شکل 12 تأثیر مدول الاستیسیته جهت اصلی بر بیشینه الف- پاسخ شعاعی، ب- پاسخ پیچشی تیر

بنابراین طبق روابط (37-39) افزایش فرکانس پایه‌ای سبب کاهش دامنه نوسانات گذرای سیستم می‌شود.

4-نتیجه‌گیری

در این مطالعه رفتار ارتعاشی تیر لایه‌ای خمیده عمیق تحت بار متحرک با اندازه و سرعت ثابت بررسی شد. تیر خمیده با انحنای ثابت و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده درنظر گرفته شد. معادلات حرکت تیر با در نظر گرفتن ممان اینرسی دورانی و نیروی برشی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شدند. معادلات مشتق جزئی کوپل‌شده سیستم با استفاده از روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و به کمک دو روش تحلیلی و عددی حل شدند. برای یک تیر با مشخصات مفروض روابط مربوط به فرکانس پایه‌ای تیر و سرعت بحرانی بار متحرک خارجی به دست آمدند و تأثیر پارامترهای هندسی و ماده بر آن‌ها مطالعه و همچنین اثر پارامترهای مربوط به مشخصات بار متحرک، مشخصات هندسی و مشخصات ماده مانند سرعت بار متحرک، شعاع تیر خمیده و نوع لایه چینی بر پاسخ دینامیکی تیر بررسی شد. نتایج موارد بیان شده زیر را نشان داد.

- جابه‌جایی‌های تیر در هر سه راستای شعاعی، محوری و پیچشی تقریباً رفتار مشابهی دارند.
- تغییرات فرکانس پایه‌ای تیر با افزایش شعاع روند افزایشی و با افزایش زاویه تیر روند کاهشی داشت، همچنین فرکانس برای انواع لایه‌چینی با افزایش مدول الاستیسیته در جهت اصلی افزایش یافت و از میان لایه‌چینی‌های بررسی شده بیشینه و کمینه فرکانس به ترتیب مربوط به لایه‌چینی [90/0/90/0] و [45/-45/-45/45] بود.
- تغییرات سرعت بحرانی با تغییرات مدول الاستیسیته و شعاع تیر رابطه مستقیم دارد. البته در مقادیر پایین‌تر شعاع و مدول الاستیسیته تأثیر این دو پارامتر در تغییرات سرعت بحرانی بیشتر است.
- زمانی که بار متحرک با سرعت پایین بر تیر حرکت می‌کند نقاط مختلف تیر زمان بیشتری برای درک بار دارند، به همین دلیل در سرعت‌های پایین جابه‌جایی‌های تیر بیشتر بود.
- افزایش دامنه بار متحرک منجر به افزایش دامنه نوسانات گذرا و پایدار سیستم شد.
- با افزایش شعاع تیر خمیده جابه‌جایی شعاعی تغییر چندانی نکرد، ولی جابه‌جایی پیچشی کاهش یافت. دلیل کاهش دامنه ارتعاشات پیچشی،

با افزایش شعاع، دور شدن فرکانس‌های خمشی و پیچشی از یکدیگر و کوپل شدگی کمتر است.

- تأثیر افزایش زاویه تیر خمیده در افزایش بیشینه جابه‌جایی نقطه وسط تیر در سرعت‌های پایین بیشتر است. افزایش زاویه تیر خمیده سبب افزایش جابه‌جایی دینامیکی شعاعی تیر می‌شود.
- کوچک‌ترین تغییر در لایه‌چینی می‌تواند سبب تغییر قابل توجه در سختی تیر و در نتیجه جابه‌جایی دینامیکی آن شود. برای تیر چهار لایه کمترین و بیشترین مقدار بیشینه جابه‌جایی تیر به ترتیب برای لایه‌چینی‌های [0/90/0/90] و [45/-45/-45/45] است.
- افزایش تعداد لایه‌های تیر در یک لایه‌چینی ثابت سبب افزایش جابه‌جایی دینامیکی تیر شد.
- دامنه نوسانات پاسخ گذرا و پایدار آن با افزایش مدول الاستیسیته تیر خمیده لایه‌ای در جهت اصلی کاهش یافت.

5- پیوست‌ها

5-1- پیوست الف

$$a_1 = -\int_0^{\theta_l} \bar{I}_0 R^2 \left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$c_1 = \int_0^{\theta_l} \bar{I}_1 R^2 \left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$d_1 = \int_0^{\theta_l} \left(A_{11}\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} - A_{55}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)\right)\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$e_1 = \int_0^{\theta_l} \left((A_{11}+A_{55})\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$g_1 = -\int_0^{\theta_l} \left(B_{11}\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} + RA_{55}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)\right)\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$b_2 = -\int_0^{\theta_l} \bar{I}_0 R^2 \left(\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$d_2 = -\int_0^{\theta_l} \left((A_{11}+A_{55})\left(\frac{\pi}{\theta_l}\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}-\frac{2}{\theta_l}\right)\right)\left(\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$e_2 = -\int_0^{\theta_l} \left(A_{11}+A_{55}\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)^2\right)\left(\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$g_2 = -\int_0^{\theta_l} (B_{11}-RA_{55})\left(\frac{\pi}{\theta_l}\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}-\frac{2}{\theta_l}\right)\left(\sin\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$a_3 = \int_0^{\theta_l} \bar{I}_1 R^2 \left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$c_3 = -\int_0^{\theta_l} \bar{I}_2 R^2 \left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right)^2 d\theta$$

$$d_3 = \int_0^{\theta_l} \left(B_{11}\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} + RA_{55}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-2\frac{\theta}{\theta_l}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$e_3 = \int_0^{\theta_l} \left((B_{11}-RA_{55})\frac{\pi}{\theta_l}\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}\right)\left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

$$g_3 = -\int_0^{\theta_l} \left(D_{11}\left(\frac{\pi}{\theta_l}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l} + R^2A_{55}\left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi\theta}{\theta_l}-1+2\frac{\theta}{\theta_l}\right)d\theta$$

5-2- پیوست ب

$$A_1 = b_2c_3a_1 - b_2a_3c_1$$
$$A_2 = a_1(b_2g_3+e_2c_3) + d_1b_2c_3 - g_1b_2a_3 - c_1(b_2d_3+e_2a_3)$$
$$A_3 = a_1(e_2g_3-g_2e_3) + d_1(b_2g_3+e_2c_3) - d_2e_1c_3 + g_2e_1a_3 - g_1(b_2d_3+e_2a_3) + c_1(d_2e_3-e_2d_3)$$
$$A_4 = d_1(e_2g_3-e_3g_2) - d_2e_1g_3 + e_1g_2d_3 + g_1(e_3d_2-e_2d_3)$$

5-3- پیوست پ

$$B_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^6 (c_1b_2a_3 - a_1b_3c_3)$$
$$B_2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 [d_1b_3c_3 + (b_2+c_3)a_1 - g_1b_2a_3 - (b_2+a_3)c_1]$$
$$B_3 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 [-d_1(b_2+c_3) - a_1(a_2g_3-g_2a_3) + d_2e_1c_3 - e_1g_2a_3 + g_1(b_2+a_3) - c_1(d_2e_3-e_2d_3)]$$
$$B_4 = d_1(e_2g_3-g_2e_3) - e_1(d_2g_3-g_2d_3) + g_1(d_2e_3-e_2d_3)$$

6- مراجع

[1] L. Frýba, *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*, pp. 15-21, Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Y. B. Yang, J. Yau, Z. Yao, Y. Wu, *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With Applications to High-Speed Railways*, pp. 98-102, World Scientific, 2004.

[3] G. Michaltsos, Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds, *Sound and Vibration*, Vol. 258, No. 2, pp. 359-372, 2002.

[4] M. Ruzzene, A. Baz, Dynamic stability of periodic shells with moving loads, *Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 4, pp. 830-844, 2006.

[5] H. Sarparast, M. R. Ashory, M. Hajiazizi, M. Afzali, M. M. Khatibi, Estimation of modal parameters for structurally damped systems using wavelet transform, *Mechanics A/Solids*, Vol. 47, No. 3, pp. 82-91, 2014.

[6] Y. Song, T. Kim, U. Lee, Vibration of a beam subjected to a moving force: Frequency-domain spectral element modeling and analysis, *Mechanical Sciences*, Vol. 113, No. 5, pp. 162-174, 2016.

[7] S. Khalili, A. Jafari, S. Eftekhari, A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2497-2511, 2010.

[8] H. Ding, L. Q. Chen, S. P. Yang, Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load, *Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 10, pp. 2426-2442, 2012.

[9] C. Bilello, L. Bergman, Vibration of damaged beams under a moving mass: Theory and experimental validation, *Sound and Vibration*, Vol. 274, No. 3, pp. 567-582, 2004.

[10] P. Chidamparam, A. W. Leissa, *Vibrations of Planar Curved Beams, Rings, and Arches*, pp. 305-320, AmericanSociety of Mechanical Engineers, 1993.

[11] S. Y. Lee, Q. Z. Yan, Exact static analysis of in-plane curved timoshenko beams with strong nonlinear boundary conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015. http://dx.doi.org/10.1155/2015/646391.

[12] J. S. Wu, L. K. Chiang, Dynamic analysis of an arch due to a moving load, *Sound and Vibration*, Vol. 269, No. 3, pp. 511-534, 2004.

[13] M. Meissner, P. Ruta, Out-of-plane vibrations of curved nonprismatic beam under a moving load, *Civil Engineering and Management*, Vol. 18, No. 6, pp. 773-782, 2012.

[14] J. S. Wu, L. K. Chiang, Out-of-plane responses of a circular curved Timoshenko beam due to a moving load, *Solids and Structures*, Vol. 40, No. 26, pp. 7425-7448, 2003.

[15] A. Nikkhoo, H. Kananipour, H. Chavoshi, R. Zarfam, Application of differential quadrature method to investigate dynamics of a curved beam structure acted upon by a moving concentrated load, *Science and Technology*, Vol. 5, No. 8, pp. 3085-3089, 2012.

[16] A. Nikkhoo, H. Kananipour, Numerical solution for dynamic analysis of semicircular curved beams acted upon by moving loads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Mechanical Engineering Science*, Vol. 228, No. 13, pp. 2314-2322, 2014.

[17] S. M. Lin, K. W. Lee, Instability and vibration of a vehicle moving on curved beams with different boundary conditions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 375-384, 2016.
[18] C. Huang, Y. Tseng, C. Hung, An accurate solution for the responses of circular curved beams subjected to a moving load, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, No. 12, pp. 1723-1740, 2000.
[19] R. T. Wang, J. C. Tsu, Out-of-plane vibration of a multi-span Timoshenko curved beam due to a moving load including the warping inertia of the beam, *the Chinese Institute of Engineers*, Vol. 24, No. 4, pp. 407-417, 2001.
[20] J. Dai, K. K. Ang, Steady-state response of a curved beam on a viscously damped foundation subjected to a sequence of moving loads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Rail and Rapid Transi*t, Vol. 229, No. 4, pp. 375-394, 2015.
[21] K. F. Li, W. N. Liu, V. Markine, Z. W. Han, Analytical study on the dynamic displacement response of a curved track subjected to moving loads, *Zhejiang University SCIENCE A*, Vol. 14, No. 12, pp. 867-879, 2013.
[22] Y. B. Yang, C. M. Wu, J. D. Yau, Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads, *Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 3, pp. 519-537, 2001.
[23] B. Prasad, G. Herrmann, Response of a laminated beam to a moving load, *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 10, pp. 1424-1431, 1977.
[24] M. J. Rezvanil, M. H. Kargarnovin, D. Younesian, Dynamic analysis of composite beam subjected to harmonic moving load based on the third-order shear deformation theory, *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 6, No. 4, pp. 409-418, 2011.
[25] K. Liu, E. Reynders, G. De Roeck, G. Lombaert, Experimental and numerical analysis of a composite bridge for high-speed trains, *Sound and Vibration*, Vol. 320, No. 1, pp. 201-220, 2009.
[26] V. Kahya, Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 243, No. 7, pp. 41-48, 2012.
[27] M. Kadivar, S. Mohebpour, Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 29, No. 3, pp. 259-273, 1998.
[28] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam Structures: Classical and Advancd Theories*, pp. 65-71, John Wiley & Sons, 2011.
[29] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, pp. 33-41, CRC press, 2004.
[30] S. Dong, C. Alpdogan, E. Taciroglu, Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory, *Solids and Structures*, Vol. 47, No. 13, pp. 1651-1665, 2010.
[31] F. Gruttmann, W. Wagner, Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections, *Computational Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 199-207, 2001.
[32] T. Ye, G. Jin, X. Ye, X. Wang, A series solution for the vibrations of composite laminated deep curved beams with general boundaries, *Composite Structures*, Vol. 127, No. 2, pp. 450-465, 2015.
[33] S. S. Rao, *Vibratuion of Continuous Systems*, pp. 25-31, John Wiley & Sons, 2007.
[34] P. Johnson, F. K. Chang, Characterization of matrix crack-induced laminate failure—Part I: Experiments, *Composite Materials*, Vol. 35, No. 22, pp. 2009-2035, 2001.