



Self-Activated Acoustical Swimmer and Functionality Comparison with Equivalent Hydrodynamic Swimmers: Spherical Model at Low Reynolds Number Condition

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Dadgarfard A.¹ MSc,
Rajabi M.*¹ PhD

How to cite this article

Dadgarfard A, Rajabi M. Self-Activated Acoustical Swimmer and Functionality Comparison with Equivalent Hydrodynamic Swimmers: Spherical Model at Low Reynolds Number Condition. Modares Mechanical Engineering, 2019;19(11):2581-2588.

ABSTRACT

In this paper, a simple, practical and versatile model has been developed for a self-activated acoustic driven spherical swimmer that its surface may oscillate partially at dipole state (first mode of vibration). Regard to the nonlinear acoustic effects, the net acoustic radiation force exerted on the device is analytically derived and the non-zero states are approved. Considering hydrodynamics effects assuming low Reynolds number operating condition, the effects of active section angle and frequency of operation on the force, velocity and requirement power of swimmer are discussed. It is shown that comparing with many types of artificial and natural living matter swimmers, the swimming velocity of the developed model is satisfactory. The challenge of the random walk due to host medium fluctuations is discussed, and it is shown that the developed model can overcome the ubiquity of the Brownian motion, as well. Due to the simplicity of the developed model which leads to computing the swimmer features (such as force, velocity, etc.) analytically, this study can be considered for development of contact-free precise handling, drug distribution and delivery systems, entrapment technology of active carriers and the self-propulsive controllable devices which are essential in many engineering and medicine applications.

Keywords Acoustical Swimmer; Self-Activated; Low Reynolds Number

¹Mechanical Engineering Faculty, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Faculty, Iran University of Science & Technology, Hengam Avenue, Resalat Square, Tehran, Iran, Postal Code: 1684613114
Phone: +98 (21) 77240649
Fax: +98 (21) 77240488
majid_rajabi@iust.ac.ir

Article History

Received: August 27, 2018

Accepted: May 21, 2019

ePublished: November 2, 2019

CITATION LINKS

[1] Wireless capsule endoscopy [2] Swimming micro-machine driven by magnetic torque [3] Mechanics of swimming and flying [4] Life at low Reynolds number [5] The efficiency of propulsion by a rotating flagellum [6] Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres [7] Three-sphere low-Reynolds-number swimmer with a cargo container [8] Self-motile swimmers: Ultrasound driven spherical model [9] Magnetically actuated colloidal microswimmers [10] Microscopic artificial swimmers [11] Motility of catalytic nanoparticles through self-generated forces [12] Self-motile colloidal particles: From directed propulsion to random walk [13] Active motion of a Janus particle by self-thermophoresis in a defocused laser beam [14] Self-propulsion of immersed objects via natural convection [15] On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers [16] Stirring by squirmers. Journal of Fluid Mechanics [17] Inertial squirmer [18] The Centenary of a Paper on Slow Viscous Flow by the Physicist H [19] A note on swimming using internally generated traveling waves [20] Acoustics: An introduction to its physical principles and applications [21] Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells [22] Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force [23] Negative axial radiation forces on solid spheres and shells in a Bessel beam [24] On the contribution of circumferential resonance modes in acoustic radiation force experienced by cylindrical shells [25] Low Reynolds number hydrodynamics: With special applications to particulate media [26] Propulsion of microorganisms by surface distortions [27] Random walks in biology [28] Analysis of the swimming of microscopic organisms [29] Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid. Proceedings of the Royal Society of London [30] Theory of acoustic radiation pressure for actual fluids

شناگر آکوستیکی خودتحریک و مقایسه عملکرد با شناگرهای معادل هیدرودینامیکی: مدل کروی در شرایط رینولدز پایین

ابوزر دادگرفرد MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

مجید رجبی PhD*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله مدلی ساده، انجام‌پذیر و پرکاربرد برای شناگر آکوستیکی خود تحریک کروی شکل که قسمتی از سطح آن می‌تواند در حالت دوقطبی (مد اول ارتعاشی) نوسان کند، توسعه داده شده است. با توجه به اثرات آکوستیک غیرخطی، برآیند نیروی ارتعاشی آکوستیکی که روی جسم اعمال می‌شود به صورت تحلیلی به دست آمده و غیرصفر بودن آن نیز تأیید شده است. با در نظر گرفتن اثرات هیدرودینامیکی در شرایط کاری رینولدز پایین، تأثیر زاویه قسمت فعال و فرکانس کاری روی نیرو، سرعت و توان مورد نیاز شناگر مورد بحث قرار گرفته است. نشان داده شده است که سرعت حرکت شناگر توسعه یافته در مقایسه با انواع شناگرهای مصنوعی یا طبیعی راضی کننده است. چالش‌هایی نظیر پدیده حرکت تصادفی به دلیل وجود نویزهای اتفاقی در محیط میزبان مورد بحث قرار گرفته شده است و نشان داده شده که مدل پیشنهادی می‌تواند به پدیده شایع حرکت براونی غلبه کند. به دلیل ساده بودن مدل پیشنهادی که منجر به محاسبه تحلیلی ویژگی‌های شناگر (نظیر نیرو، سرعت و غیره) شده است، این پژوهش می‌تواند برای توسعه جابه‌جایی‌های دقیق بدون تماس اجسام، سیستم‌های توزیع و حمل دارو، تکنولوژی به‌دام‌انداختن حامل‌های اکتیو و دستگاه‌های قابل کنترل خود تحریک که در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و پزشکی، حائز اهمیت هستند مورد توجه قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: شناگر آکوستیکی، خودتحریک، عدد رینولدز پایین

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۶/۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۱

* نویسنده مسئول: majid_rajabi@iust.ac.ir

۱- مقدمه

طراحی و ساخت نانو و میکروشناگرهای مصنوعی که قابلیت انجام وظایف پیچیده‌ای نظیر انتقال دارو^[1] یا انجام درمان‌های تهاجمی در داخل بدن انسان^[2] را داشته باشند، به دلیل حاکم بودن شرایط رینولدز پایین که در آن نیروهای اینرسی در مقابل اثر ویسکوزیته ناچیز می‌باشند، بسیار چالش‌برانگیز است. در واقع به علت ناچیز بودن نیروهای اینرسی، این امکان وجود دارد که هر حرکت هارمونیک و برگشت‌پذیری، منجر به حرکت و اصطلاحاً شنای شناگر نشود^[3].

تلاش‌های بسیاری در راستای غلبه بر این مشکل صورت پذیرفته است. برای نمونه پُرسل شناگری را پیشنهاد می‌دهد که قادر است، با حرکت متناوب خود، تقارن معکوس زمانی را بشکند^[4, 5]. گستانیان با در نظر داشتن مدل پرسل، مدل شناگر حاوی ۳ کره را پیشنهاد می‌دهد. با توجه به ساختار ساده‌تر این شناگر در مقایسه با شناگر پرسل، تعداد زیادی از خواص آن را می‌توان به صورت تحلیلی به دست آورد^[6, 7]. مجاهد و رجبی نیز نوعی از شناگر به اصطلاح خودتحریک صوتی را پیشنهاد دادند^[8].

از دیگر روش‌ها می‌توان به روش‌های مغناطیسی، شیمیایی و گرادیان دما اشاره نمود. روش مغناطیسی، روشی است که در آن با تشکیل و تولید میدان مغناطیسی، موجب حرکت میکرو و نانو ذرات و سلول‌ها می‌شوند^[9, 10]. برای نمونه درایفوس یک تاژک مصنوعی انعطاف‌پذیر را مورد بررسی قرار داد. این تاژک که از

سلول‌های قرمز خونی تشکیل شده است، به واسطه انتشار موج مغناطیسی به حرکت درمی‌آید. این سلول‌ها به وسیله کلویدهای مغناطیسی و چندین مولکول دی.ان.ای به مانند زنجیری به یکدیگر متصل شده‌اند. وی مشاهده کرد که هنگام اعمال میدان مغناطیسی، جسم شروع به حرکت می‌کند و این حرکت غیربازگشتی می‌باشد^[10].

روش شیمیایی، براساس فعل و انفعالات نامتقارن شیمیایی، پیرامون ذره صورت می‌پذیرد^[11, 12]. این توزیع نامتقارن می‌تواند به علت هندسه نامتقارن ذره یا جنس ناهمگن حامل پدیدار شود. برای نمونه، هائوس و همکارانش با روکش کردن نیمی از کره پلی‌استری به وسیله پلاتینیوم و قراردادن این ذره در محلولی شیمیایی، حرکت ذره مذکور را به دلیل توزیع نامتقارن واکنش‌های شیمیایی در اطراف جسم، گزارش کردند^[12].

روش گرادیان دما شباهت زیادی به روش شیمیایی دارد. برای نمونه جیانگ و همکارانش، حرکت ذره کلوییدی با پوشش نیمه فلزی تحت تابش لیزر را مورد مطالعه قرار دادند. جذب لیزر توسط پوشش فلزی منجر به ایجاد گرادیان دمای محلی و موجبات حرکت ذره را فراهم می‌سازد^[13]. مرسیر و همکارانش نیز از این پدیده برای حرکت ذرات کوچک استفاده کردند^[14].

شناگرهای مصنوعی دیگری با الهام‌گیری از حرکت، موجودات زنده کوچک مقیاس که حرکت آن‌ها ناشی از تغییر شکل موج‌گونه سطح خارجی بدنشان می‌باشد نیز مورد توجه و توسعه قرار گرفته‌اند^[15-19].

در کار پیش‌رو، هدف پیشنهاد و توسعه شناگری کروی شکل و خودتحریک و مقایسه آن با شناگر هیدرودینامیکی می‌باشد. حرکت این شناگر ناشی از میدان صوتی است که بر اثر ارتعاش بخشی از سطح شناگر به وجود می‌آید. در واقع منبع این میدان صوتی، ارتعاش سطح کره محسوب می‌شود و هیچ میدان خارجی در به وجود آوردن آن اثرگذار نمی‌باشد. نکته حائز اهمیت این است که، تعداد زیادی از خواص این شناگر نظیر نیرو، سرعت و توان را می‌توان توسط روابط تحلیلی محاسبه نمود.

مهم‌ترین نوآوری فعالیت پژوهشی حاضر، به ظهور و بروز نیروی غیرصفر پیش‌برنده برمی‌گردد که در تناقض با ماهیت میدان‌های آکوستیکی هارمونیک خطی با میانگین زمانی صفر، برای فشار و هر کمیت فیزیکی دیگر در هر نقطه روی جسم شناور است. به عبارتی، انتظار یا حدس اولیه از نیروی کل وارد به جسم مرتعش، همان شرایط نیروی صفر می‌باشد، اما بسط میدان فشار در رژیم غیرخطی و بررسی اثرات مرتبه دوم میدان سرعت در نیروی وارده بر جسم، ظهور نیروی غیرصفر را نشان می‌دهد. در این کار، مسئله به مود اول ارتعاشی توسعه پیدا کرده است. همچنین، برای اولین بار، مشخصات حرکتی و توان مصرفی شناگر آکوستیکی با شناگر مشابه هیدرودینامیکی مقایسه شده است که می‌تواند رهیافت مناسبی از امکان‌سنجی استفاده و توسعه این شناگرها ارائه دهد.

۲- شناگر آکوستیکی

۲-۱- معادلات پایه آکوستیکی

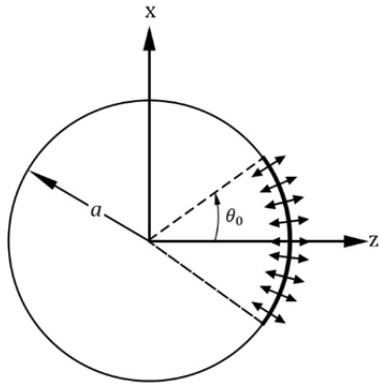
مطابق با روش تئوری آکوستیک، می‌توان معادله پیوستگی خطی‌سازی شده برای سیال ایده‌آل، غیرلزج و تراکم‌پذیر که توانایی تحمل تنش برشی را ندارد به صورت رابطه (۱) تعریف نمود^[20].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho v) \quad (1)$$

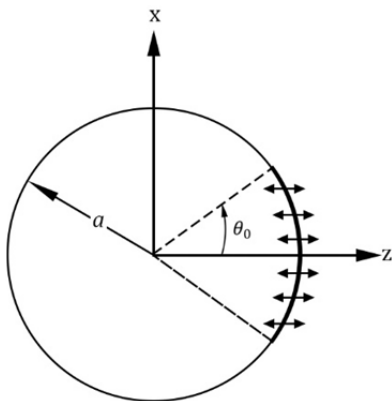
که در آن، ρ چگالی محیط میزبان و v نیز بردار سرعت ذرات سیال

که در آن $H(\cdot)$ تابع هوی ساید می‌باشد. با جایگزینی معادله (۶) در معادله (۸)، ضرب طرفین در عبارت $\sin\theta p_n(\cos\theta)$ و انتگرال گیری روی $0 \leq \theta \leq \pi$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$-kA_n(\omega)h_n(ka) = \frac{2n+1}{2}VL \int_{\cos\theta_0}^1 \cos\theta \sin\theta p_n(\cos\theta) d\theta = \frac{1}{2}V \left[\frac{n+1}{2n+3} (p_n(\cos\theta_0) - p_{n+2}(\cos\theta_0)) + \frac{n}{2n-1} (p_{n-2}(\cos\theta_0) - p_n(\cos\theta_0)) \right] \quad (9)$$



شکل ۱) هندسه شناگر آکوستیکی خودتحریک در حالت تک قطبی



شکل ۲) هندسه شناگر آکوستیکی خودتحریک در حالت دو قطبی

۲-۲- نیروی رانش آکوستیکی

برهم کنش‌های موجود میان موج صوتی و جسم موجب به وجود آمدن نیروی تشعشع آکوستیکی می‌شود. در رژیم‌های غیرخطی، این پدیده را می‌توان به عنوان نیروی محرکه در نظر گرفت، این نیرو ممکن است به صورت نیروی جلوبرنده (فشار) یا کشنده (کشش) روی جسم عمل کند [21-24].

این نیرو ناشی از مومنتوم منتقل شده از حرکت نوسانی ذرات ماده میزبان و توزیع نامتقارن فشار اطراف، روی سطح بیرونی جسم می‌باشد که برای میدان موج هارمونیک زمانی به صورت معادله (۱۰) بیان می‌شود [21].

$$\langle F \rangle = \iint_{Y_0} \Gamma \cdot dy \quad (10)$$

که در آن $\langle \cdot \rangle$ به معنای میانگین زمانی روی یک تناوب نوسان، Y_0 سطح خارجی جسم در حالت تعادل، $\Gamma_{ij} = -\langle p \rangle \delta_{ij} - \langle \rho v_i v_j \rangle$ تانسور تنش تشعشی بریلوین، δ_{ij} دلتای کرونکر، ρ چگالی محیط میزبان و v_i مؤلفه‌های سرعت ذراتی از سیال که در تماس مستقیم با سطح خارجی جسم، Y ، می‌باشند.

می‌باشد. معادله اوپلر، در ناحیه آکوستیک خطی برای سیال را می‌توان مانند معادله (۲) نوشت.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla p \quad (2)$$

که در آن، p فشار سیال را معرفی می‌کند. با ادغام معادله (۱) و معادله (۲)، معادله (۳) استخراج می‌شود.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \nabla(\nabla \cdot v) \quad (3)$$

که در آن $c = \{(\partial p / \partial \rho)_{s,0}\}^{1/2}$ سرعت امواج صوتی در سیال میزبان و اندیس "s,0" نمایانگر شرایط آنتروپی ثابت می‌باشد. با توجه به ذات غیرچرخشی پدیده گسترش موج ($\nabla \times v = 0$)، می‌توان بردار سرعت ذرات سیال را به صورت تغییرات جهتی یک تابع پتانسیل، به فرم $v = \nabla \psi$ ، نوشت. با جای گذاری آن در معادله (۳)، رابطه (۴) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \quad (4)$$

با در نظر داشتن یکدست بودن ذاتی میدان صوتی در هنگام نوسان با فرکانس ω ، منطقی است که فرض شود:

$$\psi(r, t) = \text{Re}(\varphi(r)e^{-i\omega t})$$

با این فرض و جای گذاری آن در معادله (۴)، معادله به اصطلاح، هلمهولتز به صورت رابطه (۵)، به دست می‌آید [20].

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0 \quad (5)$$

که در آن، $k = \omega/c$ عدد موج برای موج گسترش یافته در محیط مورد نظر می‌باشد.

جواب معادله (۵) با توجه به شرایط مرزی سیستم، میدان سرعت ذرات سیال را به شکل $v = -\nabla \text{Re}(\varphi(r)e^{-i\omega t})$ و فشار آکوستیکی سیال را نیز به شکل زیر نتیجه می‌دهد.

$$p(r, \theta, t) = \rho \frac{\partial \text{Re}(\varphi(r)e^{-i\omega t})}{\partial t}$$

حال با در نظر گرفتن شرایط تشعشع سامرفیلد برای امواج تشعشع یافته از سازه، می‌توان نشان داد که برای هر جسم متقارن محوری، تابع پتانسیل سرعت میدان تشعشع آکوستیکی، جواب معادله (۵) را می‌توان به صورت رابطه (۶) نوشت [20].

$$\varphi_{\text{rad}}(r, \theta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\omega) h_n(ka) p_n(\cos\theta) e^{-i\omega t} \quad (6)$$

که در آن $h_n(x) = j_n(x) + iy_n(x)$ تابع هانکل کروی از نوع اول و مرتبه n ، $j_n(x)$ و $y_n(x)$ ، به ترتیب تابع بسل کروی نوع اول و نوع دوم از مرتبه n و $p_n(x)$ تابع لژاندر از مرتبه n می‌باشند و همچنین $A_n(\omega)$ نیز ضریب مجهول موج ساطع شده از سازه به سیال خارج می‌باشد که می‌توان آن را با اعمال شرایط مرزی مناسب به دست آورد. لازم به ذکر است در ادامه برای سادگی از عبارت $e^{-i\omega t}$ صرف نظر شده است.

حال برای به دست آوردن ضریب مجهول A_n ، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم. حالت اول که در آن بخشی از سطح شناگر به صورت شعاعی نوسان می‌کند (حالت تک قطبی؛ شکل ۱)، در این صورت با توجه به شرایط مرزی و برای $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم [8].

$$A_n(\omega) = -\frac{V}{2kh_n(ka)} [(p_{n-1}(\cos\theta_0) - p_{n+1}(\cos\theta_0))] \quad (7)$$

حالت دوم، بخشی از شناگر در راستای محور z نوسان می‌کند (حالت دو قطبی؛ شکل ۲). با اعمال شرایط مرزی، معادله (۸) نتیجه می‌شود.

$$A_n(\omega) = -\frac{V}{2kh_n(ka)} [(p_{n-1}(\cos\theta_0) - p_{n+1}(\cos\theta_0))] \quad (8)$$

$$v_{\text{rad}}|_{r=a} = -\frac{\partial \varphi_{\text{rad}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = |V| \cos\theta e^{-i\omega t} [H(\theta) - H(\theta - \theta_0)]$$

$$\begin{aligned} \langle f_{r\theta} \rangle &= 2\pi a \rho \int_0^\pi \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=a} \right\rangle \sin^2 \theta d\theta \\ &= 2\pi k a \rho \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \langle R_n R_{n+1} \rangle \right. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\left. - \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \langle R'_n R_{n+1} \rangle \right] \\ \langle f_t \rangle &= -\frac{\pi a^2 \rho}{c^2} \int_0^\pi \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \Big|_{r=a} \right\rangle \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -2\pi \rho (ka)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \langle R_n R_{n+1} \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

۲-۳- توان

توان مورد نیاز برای راندن جسم را می‌توان از رابطه (۲۶) استخراج کرد.

$$P_{\text{req}} = \iint_{\gamma_0} \langle P_{\text{rad}} v \rangle \cdot d\gamma \quad (26)$$

که در آن فشار تشعشی و γ بردار جزء سطح که در جهت شعاعی و به سمت خارج کره می‌باشد.

به منظور محاسبه انتگرال ذکر شده، ما از روشی که در مرجع [8] استفاده شده است، پیروی می‌کنیم.

از آنجایی که در $kr \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود: $h_n(kr) \approx (-i)^{n+1} e^{ikr} / kr$ بنابراین $\partial \varphi_{\text{rad}} / \partial r \approx ik \varphi_{\text{rad}}$ بسط فشار و سرعت در نقاط دوردست می‌تواند به صورت (۲۷) نوشته شود.

$$P_{\text{rad}} = -i \rho c \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n(\omega) p_n(\cos \theta) \quad (27)$$

$$v_{\text{rad}} = i \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n(\omega) p_n(\cos \theta) \quad (28)$$

با جای‌گذاری معادله (۲۷) و (۲۸) در معادله (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$P_{\text{req}} = c \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) (ka) (\pi a^2) \bar{P}_{\text{rad}} = 2\pi \rho c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{(2n+1)} \quad (29)$$

که در آن، \bar{P}_{rad} ، توان مورد نیاز نرمالایز شده می‌باشد.

۳- شناگر هیدرودینامیکی

جهت بررسی شناگر هیدرودینامیکی و مقایسه آن با شناگر آکوستیکی در ادامه به معرفی شناگری که استون و ساموئل ارائه دادند [26]، می‌پردازیم.

دینامیک سیال غیرقابل تراکم در شرایط اعداد رینولدز پایین در اطراف یک میکروشناگر با استفاده از معادله نویر استوکس، می‌تواند به شکل معادله (۳۰) بیان گردد [20].

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 u = 0 = \nabla \cdot \sigma \quad \text{and} \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (30)$$

که در آن u و p به ترتیب بردار سرعت و فشار سیال، μ ویسکوزیته سیال و σ تانسور تنش می‌باشد.

جهت به‌دست‌آوردن رابطه حرکات سطح شناگر با سرعت آن از قضیه متقابل (رسیروکال تئورم) برای شرایط رینولدز پایین هیدرودینامیکی کمک می‌گیریم [25]. جهت به‌دست‌آوردن جواب معادله (۳۰) برای شناگری خودتحرک، نخست (u, σ) را به عنوان میدان‌های تنش و سرعت که جوابی برای معادله (۳۰) می‌باشند،

با بیان معادله حرکت غیرخطی اوپلر (۲) به عنوان تابعی از تابع پتانسیل سرعت، این معادله به رابطه (۱۱) منجر می‌شود.

$$\nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right) = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (11)$$

با فرض شرایط آدیاباتیک مرتبط با پدیده انتشار موج، قانون اول ترمودینامیک نتیجه می‌دهد $\nabla h = -\nabla p / \rho$ که در آن h آنتالپی را در واحد جرم محیط میزبان نشان می‌دهد. ترکیب این رابطه با معادله (۱۱) نتیجه می‌دهد که:

$$h = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right) + C \quad (12)$$

بسط تیلور فشار آکوستیکی، p نسبت به آنتالپی، h با در نظر گرفتن P_0 به عنوان فشار در حالت تعادل، برابر است با:

$$p = p_0 + (\partial p / \partial h)_{s,0} + (1/2) (\partial^2 p / \partial h^2)_{s,0} h^2 + \text{H.O.T} \quad (13)$$

می‌توان با استفاده از روابط زیر به رابطه (۱۴) رسید.

$$\begin{aligned} (\partial p / \partial h)_{s,0} &= \rho_{s,0} = \rho \\ (\partial^2 p / \partial h^2)_{s,0} &= (\partial \rho / \partial h)_{s,0} = (\partial \rho / \partial p)_{s,0} (\partial p / \partial h)_{s,0} = \rho / c^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right) - \frac{\rho}{2c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right)^2 + \text{H.O.T}$$

حال با جایگزینی معادله (۱۴) تا مرتبه دو تابع پتانسیل سرعت در رابطه (۱۰) میانگین زمانی نیروی تشعشی به صورت معادله (۱۵) به دست می‌آید [21].

$$\langle \vec{F} \rangle = \iint_{\gamma_0} \left[\left(\frac{\rho}{2c^2} \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle - \frac{\rho}{2} \langle |\nabla \psi|^2 \rangle \right) \hat{n} \right] d\gamma$$

$$+ \iint_{\gamma_0} [\rho \langle (v_n \hat{n} + v_t \hat{t}) v_n \rangle] d\gamma$$

که در آن \hat{n} و \hat{t} بردارهای واحد در جهات شعاعی و مماسی می‌باشند.

$$\psi(r, t) = \text{Re}(\varphi(r)) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\omega) p_n(\cos \theta) \quad (16)$$

$$R_n(\omega) = U_n(\omega) + iV_n(\omega) \quad (17)$$

$$U_n(\omega) = \text{Re}(A_n) j_n(kr) - \text{Im}(A_n) y_n(kr) \quad (18)$$

$$V_n(\omega) = \text{Re}(A_n) y_n(kr) + \text{Im}(A_n) j_n(kr) \quad (19)$$

با جایگزینی تابع پتانسیل سرعت (۱۶) در معادله (۱۵)، نیروی تشعشع آکوستیکی به معادله (۲۰) تبدیل می‌شود.

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle f \rangle \cdot (\hat{e}_z) \quad (20)$$

$$\langle f \rangle = \langle f_r \rangle + \langle f_\theta \rangle + \langle f_{r\theta} \rangle + \langle f_t \rangle \quad (21)$$

که \hat{e}_z بردار یکه در راستای محور z و $\langle f \rangle$ اندازه نیروی تشعشی می‌باشد.

$$\begin{aligned} \langle f_r \rangle &= -\pi a^2 \rho \int_0^\pi \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=a} \right\rangle \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -2\pi (ka)^2 \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \langle R_n R_{n+1} \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle f_\theta \rangle &= \pi \rho \int_0^\pi \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{r=a} \right\rangle \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \langle R_n R_{n+1} \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

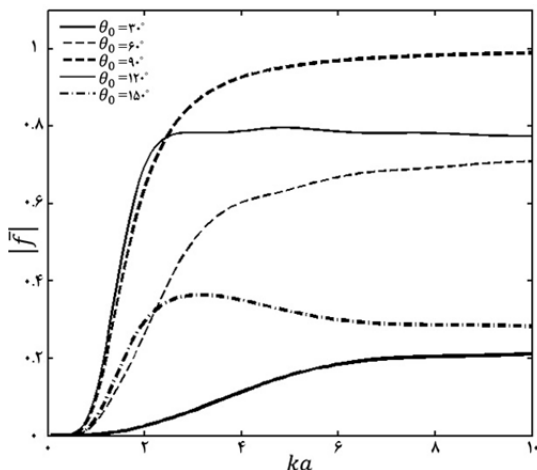
با کمی تغییرات از معادله (۳۶) برای شناگرهایی که شبه کروی هستند، نیز می توان استفاده کرد [6]. برای نمونه برای سایانوباکتیریا (شناگر هیدرودینامیکی مورد مطالعه) که سلولی شبه کروی با نسبت طول به عرض ۲ می باشد، سرعت از معادله (۳۷) به دست می آید.

$$\langle U \rangle = \frac{\pi}{8} \epsilon^2 n \omega a \hat{e}_z \quad (37)$$

۴- نتایج و بحث

جهت به دست آوردن رفتار شناگر آکوستیکی، کره ای به اندازه $100 \mu\text{m}$ و $a =$ سرعت ارتعاش $V \sim O(P_0/\rho c)$ که در آن P_0 شاخصی از بیشترین فشار آکوستیکی ($P_0 = 10^5 \text{Pa}$) در محیط سیال می باشد را به عنوان شناگر آکوستیکی در نظر می گیریم. سطح شناگر می تواند در دو حالت تک قطبی و دوقطبی با زاویه قسمت فعال $0 < \theta < \pi$ ، با دامنه ای از مرتبه $10^{-6} \mu\text{m}$ نوسان کند. شناگر هیدرودینامیکی را سایانوباکتیریا انتخاب می کنیم. این شناگر هم اندازه با شناگر آکوستیکی می باشد، دامنه نوسانات سطح آن برابر ($\epsilon = 1/20$) و فرکانس نوسانات سطح آن را از مرتبه 10^6 s^{-1} فرض می کنیم [26]. سیال میزبان، آب در شرایط اتمسفریک (سرعت انتشار امواج صوت در آب، $c = 1/480 \times 10^3 \text{ m/s}$ ، چگالی آب، $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$ و ویسکوزیته $\eta = 1/9 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$ می باشد. جهت مقایسه مناسب نیرو برای شناگر آکوستیکی، اندازه نیروی تشعشع آکوستیکی را به صورت $\langle f \rangle = (\rho V^2 / \pi a^2) |f|$ نیروی تشعشعی نرمالایز شده می باشد. با توجه به اینکه چگالی از مرتبه 10^3 Kg/m^3 ، اندازه شناگر از مرتبه 10^{-6} m و سرعت ارتعاش سطح آن از مرتبه 10^6 m/s می باشد، نیروی تشعشعی از مرتبه 10^{-1} N به دست می آید.

در نمودارهای ۱ و ۲ تغییرات نیروی نرمالایز شده نسبت به فرکانس بی بعد به ترتیب در حالات تک قطبی و دوقطبی برای شناگر آکوستیکی رسم شده است. با در نظر گرفتن این تغییرات مشخص می گردد که نیروی تشعشع آکوستیکی با افزایش فرکانس، افزایش و پس از رسیدن به محدوده فرکانس خاصی به مقدار ثابتی میل می کند. این رفتار در مرجع [8] نیز گزارش شده است. بنابراین همواره نتیجه افزایش فرکانس نوسانات سطح، افزایش نیروی رانش تولید شده نخواهد بود. نکته قابل توجه کاهش مقدار نیرو در حالت دوقطبی نسبت به حالت تک قطبی می باشد.



نمودار (۱) نیروی نرمالایز شده نسبت به فرکانس بی بعد در حالت تک قطبی (شناگر آکوستیکی)

به گونه ای در نظر می گیریم که نیرو و گشتاور خالصی روی شناگر وارد نگردد. در حالت دیگر $(\hat{u}, \hat{\sigma})$ جوابی برای معادله (۳۰) می باشد در حالتی که همان شناگر در نتیجه اعمال نیروی F ، با سرعت \hat{U} حرکت انتقالی انجام می دهد. حال با در نظر گرفتن قضیه متقابل ارتباط بین دو جواب (u, σ) و $(\hat{u}, \hat{\sigma})$ با معادله (۳۱) بیان می شود.

$$\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot u dS = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \sigma \cdot \hat{u} dS \quad (31)$$

که در آن $S(t)$ سطح شناگر در هر لحظه، \hat{n} بردار یکه خارج شونده و عمود بر سطح S می باشد و $\hat{n} \cdot \sigma$ تنش است که توسط سیال به سطح جسم وارد می گردد. از آنجایی که بر سطح S ، $\hat{u} = \hat{U}$ و بر شناگر نیروی خالصی وارد نمی گردد، می توان سمت راست معادله (۳۱) صرف نظر کرد. بنابراین می توان سرعت سطح شناگر را به یک سرعت انتقالی $U(t)$ و سرعت ناشی از حرکات اغتشاشی سطح، w تجزیه کرد. حال با ساده سازی معادله (۳۱) داریم:

$$F(t) \cdot U(t) = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot w dS \quad (32)$$

معادله (۳۲) ارتباط بین سرعت لحظه ای شناگر و سرعت سطح آن برای هر شکل دلخواه بیان می کند.

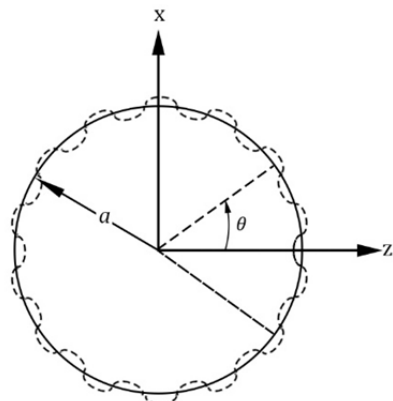
برای شناگر کروی با شعاع a ، تنش سطحی و نیروی درگ استوکس [20]، به ترتیب برابر است با $\hat{n} \cdot \sigma = -(3\eta/2a)\hat{U}$ و $F = -6\pi\eta a \hat{U}$ معادله (۳۳) نوشت:

$$U(t) = - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S(t)} w dS \quad (33)$$

جهت به دست آوردن سرعت شناگر، نقطه ای روی سطح آن، θ_m در نظر می گیریم. سطح شناگر می تواند با دامنه کوچکی به صورت سینوسی مطابق معادله (۳۴) حرکت کند.

$$\theta_m = \theta + \epsilon \cos(n\theta - \omega t) \quad (34)$$

که در آن ω فرکانس سرعت سطح، n عدد موج می باشد و θ زاویه هر نقطه از سطح از محور Z می باشد (شکل ۳).



شکل ۳ هندسه شناگر هیدرودینامیکی

با در نظر گرفتن رابطه (۳۴) می توان سرعت اغتشاشی سطح را از رابطه زیر به دست آورد.

$$w = a\epsilon\omega \sin(n\theta - \omega t)\hat{\theta} \quad (35)$$

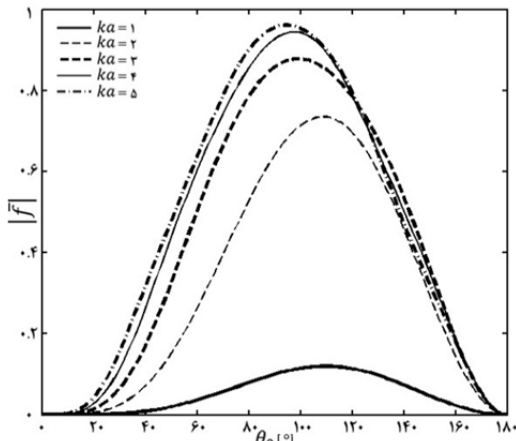
با جایگزینی معادله (۳۵) در معادله (۳۳) سرعت شناگر برابر می شود با:

$$\langle U \rangle = 4\epsilon^2 n \omega a \hat{e}_z \quad (36)$$

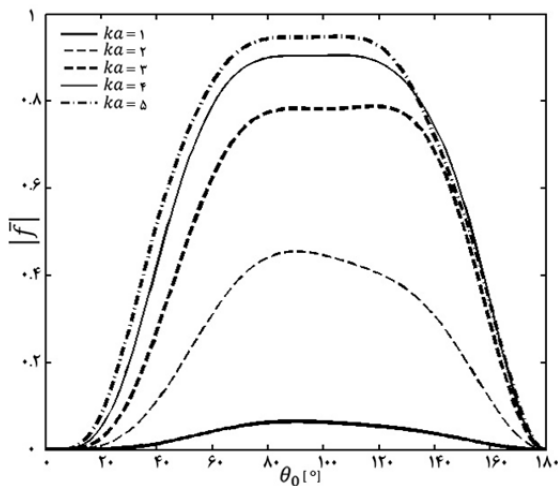
جهت به دست آوردن سرعت شناگر آکوستیکی، با در نظر گرفتن شرایط رینولدز پایین، از رابطه (۳۸) که در منبع [۵] پیشنهاد داده شده است، استفاده می‌کنیم.

$$V_s = |< f >| / 6\pi\eta a = |\bar{f}| \rho a V^2 / (12\eta) \quad (38)$$

با توجه به اینکه چگالی از مرتبه 10^3 Kg/m^3 ، اندازه شناگر از مرتبه 10^{-6} m ، ویسکوزیته از مرتبه 10^{-3} Pa.s و سرعت شناگر آکوستیکی از مرتبه 10^{-4} m/s مشخص می‌گردد، با در نظر گرفتن سرعت شناگر، عدد رینولدز به صورت $Re = \rho V_s a / \mu$ ، عدد رینولدز از مرتبه 10^4 به دست می‌آید که شرایط رینولدز پایین ارضا می‌شود. این در حالی است که سرعت شناگر هیدرودینامیکی از مرتبه 10^{-5} m/s به دست می‌آید.

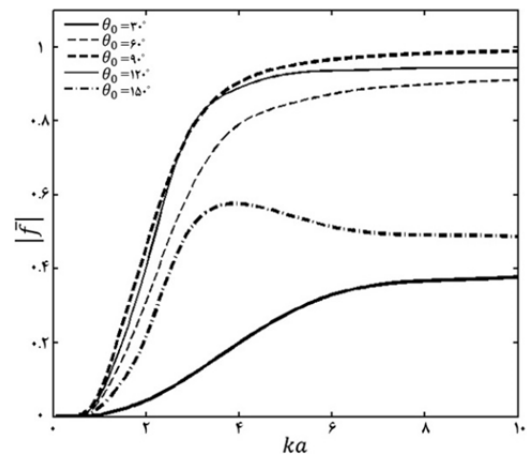


نمودار ۳) نیروی نرمالایز شده نسبت به زاویه قسمت فعال در حالت تک قطبی شناگر آکوستیکی



نمودار ۴) نیروی نرمالایز شده نسبت به زاویه قسمت فعال در حالت دوقطبی شناگر آکوستیکی

در نمودارهای ۵ و ۶، سرعت شناگر آکوستیکی نسبت به فرکانس بی‌بعد به ترتیب برای حالت تک قطبی و دوقطبی رسم شده است. الگوی عمومی تغییرات سرعت این شناگر نسبت به فرکانس بی‌بعد همانند آنچه که برای نیروی نرمالایز شده اتفاق می‌افتد، می‌باشد. با در نظر گرفتن مرتبه سرعت شناگر 10^{-4} m/s ، مشخص می‌گردد که این شناگر در هر ثانیه مسافتی مشابه اندازه خود را می‌پیماید که در مقایسه با انواع مختلفی از شناگرهای مصنوعی یا طبیعی، راضی کننده می‌باشد [5, 6, 9, 10, 15-17].



نمودار ۵) نیروی نرمالایز شده نسبت به فرکانس بی‌بعد در حالت دوقطبی شناگر آکوستیکی

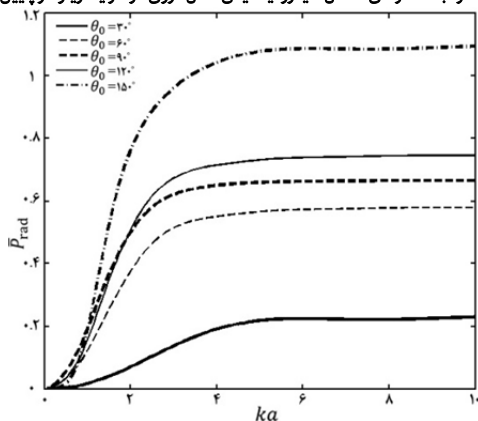
جهت بررسی تأثیر زاویه قسمت فعال در نیروی تولید شده، نمودار نیروی نرمالایز شده نسبت به زاویه قسمت فعال در حالت تک قطبی و دوقطبی برای شناگر آکوستیکی به ترتیب در نمودارهای ۳ و ۴ رسم شده‌اند. با بررسی تغییرات نیروی تشعشع آکوستیکی نسبت به زاویه قسمت فعال شناگر، مشخص می‌گردد که لزوماً با افزایش زاویه قسمت فعال، نیروی تشعشع آکوستیکی بیشتری تولید نمی‌شود. زمانی که شناگر در حالت تک قطبی می‌باشد، بیشینه نیروی تشعشع نرمالایز شده برای $89^\circ < \theta_0 < 110^\circ$ اتفاق می‌افتد. این رفتار در مرجع [8] نیز گزارش شده است. این در حالی است که بیشترین نیروی تولید شده در حالت دوقطبی برای $8^\circ < \theta_0 < 12^\circ$ اتفاق می‌افتد.

بنابراین بیشترین نیرو جهت حرکت نوسانگر در حالت دوقطبی برای $\theta_0 \approx 8^\circ$ و $ka \approx 5$ رخ می‌دهد. در حالی است که بیشینه نیرو برای حالت تک قطبی، در $\theta_0 \approx 90^\circ$ و فرکانس $ka \approx 6$ صورت می‌پذیرد [8].

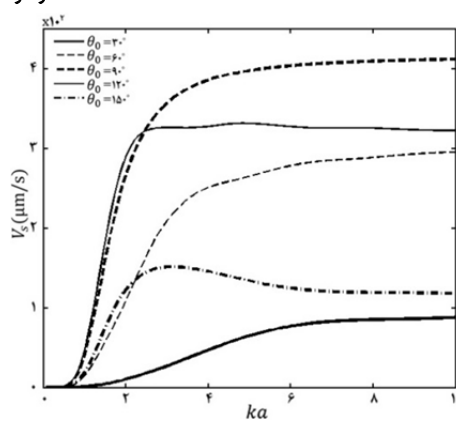
برای شناگر هیدرودینامیکی با توجه به رابطه (۳۷) و با در نظر گرفتن $\omega \sim 0(10^2) \text{ s}^{-1}$ ، $\epsilon \sim 0(10^2) \text{ rad}$ و $n = 5$ سرعت شناگر از مرتبه 10^{-5} m/s به دست می‌آید. با توجه به سرعت به دست آمده برای شناگر هیدرودینامیکی و رابطه $F = -6\pi\eta a U$ ، نیروی وارد بر شناگر هیدرودینامیکی از مرتبه 10^{-11} N محاسبه می‌شود که در حدود نیروی رانش شناگر آکوستیکی می‌باشد.

نکته حائز اهمیت تأثیر نویزهای اتفاقی موجود در محیط میزبان می‌باشد که می‌تواند به طور قابل توجهی بر حرکت میکرو شناگرها اثر بگذارد. دامنه نیروی نویز ناشی از گرمایی که بر اثر نوسانات اتفاقی در محیط میزبان حادث می‌شود [4, 28, 29]، برابر با $(6\pi\eta a k_B T)^{1/2}$ و از مرتبه 10^{-13} N می‌باشد، که در آن، $k_B = 1/38 \times 10^{-23} \text{ (kg m}^2\text{)/(s}^2\text{K)}$ ، ثابت بولتزمان محیط میزبان و T دمای محیط می‌باشد. با توجه به اینکه نیروی که موجب حرکت شناگرهای آکوستیکی و هیدرودینامیکی می‌شود به ترتیب از مرتبه 10^{-1} و 10^{-11} N می‌باشد، تأثیر حرکت براونی یا حرکت تصادفی برای این شناگرها قابل چشم‌پوشی می‌باشد و نویزهای اتفاقی موجود نمی‌توانند از حرکت این شناگرها جلوگیری کنند.

همچنین با در نظر گرفتن تقریب منابع [29, 30] برای ضخامت لایه مرزی ویسکوز آکوستیکی، δ به صورت $\sim 0(10^3) \mu\text{m}$ می‌توان اثر پدیده شارش آکوستیکی را نیز برای شناگر آکوستیکی نادیده گرفت.



نمودار ۸) توان موردنیاز نرمالایز شده نسبت به فرکانس بی بعد در حالت دوقطبی (شناگر آکوستیکی)



نمودار ۹) سرعت شناگر نسبت به فرکانس بی بعد در حالت تک قطبی (شناگر آکوستیکی)

۵- نتیجه گیری

در این مقاله مدلی ساده، انجام پذیر و پرکاربرد برای شناگر آکوستیکی کروی شکل خودتحریک توسعه یافت. به صورت تحلیلی نشان داده شد که میکروشناگر آکوستیکی که بخشی از سطح آن در حالت نوسانات دوقطبی می باشد به دلیل برهم کنش غیرخطی میدان آکوستیکی القاشده بر سطح آن، نیروی غیرصفری را احساس خواهد کرد که این نیرو می تواند منجر به حرکت آن شود که این نیرو بیشتر یا هم مرتبه با نیروی تولید شده توسط شناگر هیدرودینامیکی می باشد. با مقایسه نیروی به دست آمده با عواملی نظیر نویزهای اتفاقی موجود در سیستم که می توانند از حرکت شناگر جلوگیری کنند، مشخص گردید که پدیده هایی همچون حرکت براونی، حرکت تصادفی یا شارش آکوستیکی نمی توانند بر روی حرکت شناگر اثرگذار باشند. با بررسی سرعت به دست آمده برای شناگر آکوستیکی توسعه یافته مشخص شد که این شناگر در هر ثانیه مسافتی مشابه اندازه خود را می پیماید که در مقایسه با شناگر هیدرودینامیکی راضی کننده می باشد. همچنین نشان داده شد که لزوماً افزایش زاویه قسمت فعال و فرکانس نوسانات سطح، نمی تواند منجر به افزایش نیرو و سرعت شناگر شوند و تنها باعث مصرف توان زیادی خواهند شد.

پرکاربرد بودن، ساده بودن، به دست آوردن مؤلفه هایی نظیر نیروی رانش، سرعت حرکت و توان مورد نیاز جهت حرکت به صورت تحلیلی از ویژگی های مهم شناگر توسعه یافته می باشد که می تواند در زمینه های پزشکی، بیولوژی و مهندسی مورد استفاده قرار گیرند.

تشکر و قدردانی: موردی بیان نشد.

تأییدیه اخلاقی: موردی بیان نشد.

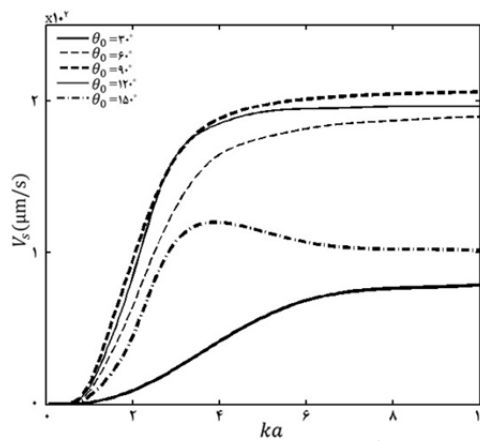
تعارض منافع: موردی بیان نشد.

سهم نویسندگان: ابوذر دادگرفرد (نویسنده اول)، نگارنده بحث (۳۰٪)؛ مجید رجبی (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی (۷۰٪)

منابع مالی: موردی بیان نشد.

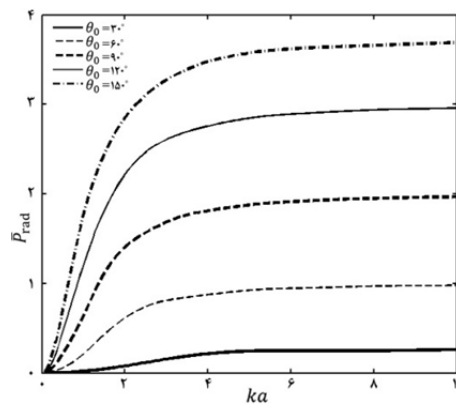
منابع

- 1- Iddan G, Meron G, Glukhovskiy A, Swain P. Wireless capsule endoscopy. Nature. 2000;405(6785):417.
- 2- Ishiyama K, Sendoh M, Yamazaki A, Arai KI. Swimming micro-machine driven by magnetic torque. Sensors and Actuators A: Physical. 2001;91(1-2):141-144.
- 3- Childress S. Mechanics of swimming and flying. Cambridge: Cambridge University Press; 1981.



نمودار ۱۰) سرعت شناگر نسبت به فرکانس بی بعد در حالت دوقطبی (شناگر آکوستیکی)

در نمودارهای ۷ و ۸، توان مورد نیاز نرمالایز شده جهت حرکت شناگر آکوستیکی نسبت به فرکانس بی بعد نشان داده شده است. رفتار عمومی توان مورد نیاز نرمالایز شده نسبت به فرکانس پس از طی سیر افزایشی به مقدار ثابتی میل می کند. این رفتار نسبت به زاویه قسمت فعال به گونه ای می باشد که هر چه زاویه قسمت فعال بیشتر باشد، توان مورد نیاز نیز بیشتر می باشد. با توجه به معادله (۲۹) توان مورد نیاز جهت رانش از مرتبه $W(10^{-6})$ به دست می آید. نکته قابل توجه این است که توان مورد نیاز جهت تولید بیشینه نیروی تشعشع آکوستیکی در حالت تک قطبی حدود ۳ برابر حالت دوقطبی می باشد این در حالی است که بیشینه نیروی تولید شده در حالت تک قطبی ۲ برابر حالت دوقطبی می باشد.



نمودار ۱۱) توان موردنیاز نرمالایز شده نسبت به فرکانس بی بعد در حالت تک قطبی (شناگر آکوستیکی)

- 17- Wang S, Ardekani A. Inertial squirmer. *Physics of Fluids*. 2012;24:101902.
- 18- Rallison JM. The Centenary of a Paper on Slow Viscous Flow by the Physicist H. A. Lorentz. *Journal of Fluid Mechanics*. 1996;323:411.
- 19- Ajdari A, Stone HA. A note on swimming using internally generated traveling waves. *Physics of Fluids*. 1999;11(5):1275.
- 20- Pierce AD. *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*. Unknown City: Acoustical Society of America; 1989.
- 21- Hasegawa T, Hino Y, Annou A, Noda H, Kato M, Inoue N. Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1993;93(1):154.
- 22- Marston PL. Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006;120(6):3518.
- 23- Marston PL. Negative axial radiation forces on solid spheres and shells in a Bessel beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007;122(6):3162.
- 24- Rajabi M, Behzad M. On the contribution of circumferential resonance modes in acoustic radiation force experienced by cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2014;333(22):5746-5761.
- 25- Happel J, Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics: With special applications to particulate media*. Berlin: Springer; 1983.
- 26- Stone HA, Samuel AD. Propulsion of microorganisms by surface distortions. *Physical Review Letters*. 1996;77(19):4102.
- 27- Berg HC. *Random walks in biology*. Princeton: Princeton University Press; 1993.
- 28- Taylor G. Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1951;209(1099):447-461.
- 29- Doinikov A. Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1994;447(1931):447-466.
- 30- Doinikov AA. Theory of acoustic radiation pressure for actual fluids. *Physical Review E*. 1996;54(6):6297.
- 4- Purcell EM. Life at low Reynolds number. *American Journal of Physics*. 1977;45(1):3-11.
- 5- Purcell EM. The efficiency of propulsion by a rotating flagellum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1997;94(21):11307-11311.
- 6- Najafi A, Golestanian R. Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres. *Physical Review E*. 2004;69(6):062901.
- 7- Golestanian R. Three-sphere low-Reynolds-number swimmer with a cargo container. *The European Physical Journal E*. 2008;25(1):1-4.
- 8- Mojahed A, Rajabi M. Self-motile swimmers: Ultrasound driven spherical model. *Ultrasonics*. 2018;86:1-5.
- 9- Tierno P, Golestanian R, Pagonabarraga I, Sagués F. Magnetically actuated colloidal microswimmers. *The Journal of Physical Chemistry B*. 2008;112(51):16525-16528.
- 10- Dreyfus R, Baudry J, Roper ML, Fermigier M, Stone HA, Bibette J. Microscopic artificial swimmers. *Nature*. 2005;437:862-865.
- 11- Paxton WF, Sen A, Mallouk TE. Motility of catalytic nanoparticles through self-generated forces. *Chemistry*. 2005;11(22):6462-6470.
- 12- Howse JR, Jones RAL, Ryan AJ, Gough T, Vafabakhsh R, Golestanian R. Self-motile colloidal particles: From directed propulsion to random walk. *Physical Review Letters*. 2007;99(4):048102.
- 13- Jiang HR, Yoshinaga N, Sano M. Active motion of a Janus particle by self-thermophoresis in a defocused laser beam. *Physical Review Letters*. 2010;105(26):268302.
- 14- Mercier MJ, Ardekani AM, Allshouse MR, Doyle B, Peacock T. Self-propulsion of immersed objects via natural convection. *Physical Review Letters*. 2014;112(20):204501.
- 15- Lighthill MJ. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1952;5(2):109-118.
- 16- Lin Z, Thiffeault JL, Childress S. Stirring by squirmers. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011;669:167-177.