



## بررسی رفتار وابسته به اندازه‌ی دینامیکی ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسر گیردار تحت تأثیر هم‌زمان ولتاژ DC ناگهانی و تحریک از پایه‌ی هارمونیک

محمدعلی مختاری امیرمجدی<sup>1</sup>، مسعود طهانی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

\* صندوق پستی 91775-1111، mtahani@um.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 مرداد 1396

پذیرش: 15 آبان 1396

ارائه در سایت: 15 دی 1396

کلید واژگان:

ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسر گیردار

ناپایداری کشیدگی

تئوری تنش کوپل اصلاح شده

تحریک از پایه‌ی هارمونیک

### چکیده

هدف این پژوهش، بررسی رفتار وابسته به اندازه‌ی ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسرگیردار با جرم متمرکز در وسط تحت تأثیر هم‌زمان ولتاژ DC ناگهانی و تحریک از پایه‌ی هارمونیک می‌باشد. بدین منظور، برای مدل‌سازی اثرات اندازه از تئوری تنشی کوپل اصلاح شده، استفاده می‌شود. همچنین برای جلوگیری از وقوع پدیده‌ی تشدید میرایی ویسکوز در مدل‌سازی لحاظ می‌گردد. در ادامه با بکارگیری اصل همپلتون معادله‌های حاکم بر مسئله بدست می‌آیند. سپس با استفاده از تقریب تک مدی گالرکین، معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادله‌های دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردند. برای حل معادله‌های بدست آمده از روش رانج-کوتای مرتبه‌ی چهار استفاده می‌شود. جهت کسب اطمینان از صحت نتایج بدست آمده، نتایج بدست آمده با مقدارهای گزارش شده‌ی موجود در ادبیات صحت‌گذاری شده و تطابق خوبی مشاهده می‌گردد. به علاوه، نتایج بدست آمده با داده‌های حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار کامسول مقایسه و صحت‌گذاری می‌شوند. در نهایت، اثر پارامترهای متفاوت موجود در مسئله بر روی ناپایداری کشیدگی میکرو-ژيروسکوپ و همچنین دامنه‌ی نوسان‌های آن بررسی می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که در اثر قرار گرفتن سیستم در معرض تحریک از پایه‌ی هارمونیک، میکرو-ژيروسکوپ توسط دو فرکانس متفاوت تحریک می‌گردد.

## Size-dependent analysis of micro-bridge gyroscopes under the combined effects of instantaneous DC voltage and harmonic base excitations

Mohammad Ali Mokhtari Amir Majdi, Masoud Tahani\*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

\* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, mtahani@um.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 20 August 2017  
Accepted 06 November 2017  
Available Online 05 January 2018

#### Keywords:

Micro-bridge gyroscopes  
Pull-in instability  
Modified couple stress theory  
Harmonic base excitation

### ABSTRACT

The aim of the proposed study is to investigate the size dependent behavior of the micro-bridge gyroscopes under the combined effects of instantaneous DC voltage and harmonic base excitation. To do so, modified couple stress theory is utilized to model the size-dependent behavior of the micro-gyroscope. To avoid resonance, viscous damping is used. Hamilton's principle is then employed to derive the governing equations of motion. Afterwards, to convert the partial differential equations of motion to ordinary differential equations of motion, a Galerkin based single mode approximation is made. Then fourth-order Range-Kutta method is used to solve the governing equations of motion. To check the accuracy of the present model, the results are then validated through comparison with the available results in the literature and the comparison shows good agreements. In addition to the previous comparison, the present results are the validated through comparison with the results of COMSOL simulation. Furthermore, the effects of different parameters on the dynamic pull-in instability and amplitude of the vibrations are investigated. The observation shows that for the case of the harmonic base excitation, the system will be excited on two frequencies.

[3]

### 1- مقدمه

در پی گسترش دامنه‌ی کاربردهای میکرو-ابزارها، نیاز به بررسی دقیق رفتار آن‌ها در شرایط متفاوت کاری بیش از پیش احساس می‌گردد. بدین جهت محقق‌های بسیاری سعی در مدل‌سازی میکرو-ابزارها با المان‌های متفاوت نموده‌اند. در بین اجزاء مکانیکی مورد استفاده جهت مدل‌سازی میکرو-ابزارها، تیرها جزء پرکاربردترین المان‌ها می‌باشند. مجاهدی و همکاران

سیستم‌های میکرو-الکترو-مکانیکی امروزه محدوده‌ی وسیعی از کاربردها را پوشش می‌دهند. به دلیل ابعاد کوچک، قابلیت تولید انبوه و احتیاج به توان مصرفی کم، میکرو-ابزارها مسیر خود را در انواع زمینه‌های مهندسی از قبیل صنایع رباتیک [1] و مسیریابی [2] هموار کرده‌اند. از همین‌رو، توجه بسیاری از محققان به بررسی رفتار میکرو-ابزارها در شرایط مختلف جلب شده است

### Please cite this article using:

M. A. Mokhtari Amir Majdi, M. Tahani, Size-dependent analysis of micro-bridge gyroscopes under the combined effects of instantaneous DC voltage and harmonic base excitations, Modares Mechanical Engineering, Vol. 18, No. 01, pp. 231-238, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

توانایی مقابله با نیروی الکترواستاتیک را نداشته باشد. ناپایداری کشیدگی در میکرو-ابزارها توسط پژوهشگران بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است [9]، اما تحقیق‌های کمی در زمینهی بررسی ناپایداری کشیدگی میکرو-ژيروسکوپ‌ها صورت گرفته است. مجاهدی و همکاران [10] در زمره‌ی نخستین پژوهشگرانی هستند که به بررسی ناپایداری کشیدگی میکرو-ژيروسکوپ‌ها پرداخته‌اند. ناپایداری کشیدگی میکرو-ژيروسکوپ‌هایی را مورد مطالعه قرار دادند که توسط ولتاژ DC ناگهانی تحریک شده بودند. در این تحقیق اثرات میرایی از نوع لایه‌ی فشرده‌ی سیال<sup>5</sup>، انحنای غیرخطی و فشار هوا نیز در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که در نظر گرفتن انحنای غیرخطی موجب افزایش سفتی سیستم شده و در نتیجه ولتاژ کشیدگی افزایش می‌یابد. آن‌ها همچنین در پژوهش خود نشان دادند که در نظر گرفتن میرایی تأثیر بسزایی در تعیین رفتار میکرو-ژيروسکوپ‌ها دارد.

در هنگام مدل‌سازی میکرو-ابزارها، توجه به این موضوع که حداقل یکی از ابعاد این ابزارها از حدود میکرومتر می‌باشد، از اهمیت فراوانی برخوردار است. امروزه ثابت شده است که چنانچه حداقل یکی از ابعاد سیستم‌ها از حدود میکرومتر باشد، تئوری‌های کلاسیک قادر به توصیف دقیق رفتار آن‌ها نمی‌باشند [11]. لذا بسیاری از پژوهشگران تفاوت‌های چشمگیری را میان نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی مشاهده نمودند [12]. در همین راستا به منظور بهبود تئوری‌های کلاسیک، تئوری‌های وابسته به اندازه معرفی گردیدند [13-15]. میندلین و اشل [16] تئوری گرادیان کرنش<sup>6</sup> را معرفی نمودند که در آن علاوه بر دو ثابت لامه، پنج ثابت دیگر نیز معرفی شده بود. در ادامه کار آن‌ها، فلک و هاجینسون [17]، تئوری وابسته به اندازه‌ی دیگری را ارائه دادند که در آن رفتار سیستم‌ها را به تانسورهای گرادیان چرخش و گرادیان کشیدگی مربوط دانستند. جهت بهبود این تئوری، لام و همکاران [18]، اثرات تانسورهای گرادیان اتساع<sup>7</sup>، گرادیان انحراف و گرادیان چرخش متقارن را بر رفتار وابسته به اندازه‌ی میکرو-ابزارها مورد بررسی قرار دادند. در نتیجه آن‌ها تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته را با سه پارامتر وابسته به بعد معرفی نمودند. به علاوه، توپین [13]، تئوری تنش کوپل را ارائه داد که در آن برای بررسی رفتار سیستم تنها به داشتن دو پارامتر وابسته به اندازه نیاز بود. با وجود آنکه این تئوری فقط از دو پارامتر وابسته به بعد بهره می‌گیرد، اما استفاده از آن همچنان مشکل می‌باشد. بدین جهت یانگ و همکاران [15]، برای بهبود این تئوری، رفتار سیستم را علاوه بر تانسور کرنش به قسمت انحرافی تانسور انحرافی ارتباط دادند و تئوری تنش کوپل اصلاح شده را با تنها یک پارامتر وابسته به بعد معرفی نمودند. برای مسائلی که تنها با بارگذاری خمشی روبرو هستند، ثابت شده است که تئوری تنش کوپل اصلاح شده دارای دقت بالایی می‌باشد [19].

اگرچه که با معرفی تئوری‌های وابسته به اندازه تمرکز پژوهش بسیاری از محقق‌ها به سوی بررسی اثر اندازه بر روی رفتار میکرو-ابزارها معطوف شده است، اما رفتار وابسته به اندازه‌ی میکرو-ابزارها توجه کمی را دریافت کرده است. غایش و همکاران [20]، از تئوری تنش کوپل اصلاح شده جهت بررسی اثر اندازه بر روی رفتار میکرو-ژيروسکوپ‌های از نوع میکرو-تیر یکسرگیردار با جرم نوک استفاده نمودند.

علاوه بر موارد ذکر شده، نکته‌ی دیگری که در مدل‌سازی میکرو-سیستم‌ها حائز اهمیت است این است که میکرو-ابزارها عموماً بر روی

[4] با بکارگیری المان تیر یکسرگیردار با جرم متمرکز در نوک به بررسی پایداری استاتیکی میکرو-ژيروسکوپ‌ها پرداختند. آن‌ها در بررسی خود اثر غیر خطی هندسه‌ی را نیز بر روی رفتار میکرو-ژيروسکوپ مورد بررسی قرار دادند. سپس نتیجه گرفتند که در نظر گرفتن انحنای غیرخطی سبب کاهش دامنه‌ی استاتیکی می‌شود.

با توسعه و گسترش کاربردهای تکنولوژی میکرو-ابزارها، زمینه برای ظهور انواع ابزارها در ابعاد میکرون و زیر میکرون فراهم گردید. لذا تلاقی تکنولوژی میکرو-ابزارها با تکنولوژی‌هایی که در گذشته با مشکلاتی همچون حجم بالا، دشواری حمل و نقل و وزن زیاد همراه بودند، منجر به ظهور تکنولوژی‌های نوینی گردیده است. از جمله‌ی این ابزارها می‌توان به میکرو-ژيروسکوپ‌ها اشاره نمود که گستره‌ی وسیعی از کاربردها، همچون واقعیت مجازی [5] را پوشش می‌دهند. در حالت عمومی، میکرو-ژيروسکوپ وسیله‌ای برای اندازه‌گیری حرکت زاویه‌ای یک سیستم می‌باشد. در چند دهه‌ی اخیر تلاش‌های بسیاری در راستای مدل‌سازی و پیش‌بینی رفتار و ساخت این میکرو-ابزارها صورت پذیرفته است. این تلاش‌ها به پیدایش انواع مختلف میکرو-ژيروسکوپ‌ها منجر گردیده است. در میان انواع میکرو-ژيروسکوپ‌ها، میکرو-ژيروسکوپ‌هایی که بر پایه‌ی اثر کوریولیس کار می‌کنند به علت استفاده از یک جزء مرتعش، فرآیند ساخت آسانی را دارند. اجزای مرتعش متنوعی جهت مدل‌سازی این نوع از میکرو-ژيروسکوپ‌ها موجود می‌باشند. از میان این اجزای مکانیکی، غالباً المان‌هایی همچون تیر، حلقه و تیونینگ فورک<sup>1</sup> برای مدل‌سازی رفتار میکرو-ژيروسکوپ‌ها بکار گرفته می‌شوند [6]. تیرهای با حرکت دورانی از جمله اجزای مکانیکی پرکاربرد در طراحی میکرو-ژيروسکوپ‌ها می‌باشند. اساس کار این نوع از میکرو-ژيروسکوپ‌ها به این صورت است که میکرو-تیر در معرض حرکت دورانی حول محور خنثی خود قرار داده می‌شود. سپس در یک جهت مشخص، که با نام جهت تحریک<sup>2</sup> شناخته می‌شود، به سیستم بار دینامیکی اعمال می‌گردد. در نتیجه‌ی اعمال هم‌زمان بار دینامیکی و حرکت دورانی، شتاب‌های کوریولیس در راستایی عمود بر راستای اعمال بار دینامیکی به وجود می‌آیند. با اندازه‌گیری حرکت در این جهت، که از آن با نام جهت حسگر<sup>3</sup> یاد می‌شود، و با مشخص بودن نوع بار دینامیکی، حرکت زاویه‌ای سیستم مشخص می‌گردد.

در پی گسترش کاربردهای میکرو-ژيروسکوپ‌هایی که بر پایه‌ی اثر کوریولیس کار می‌کنند، محقق‌های بسیاری درصدد بررسی رفتار این نوع از میکرو-ابزارها برآمدند [7]. از جمله‌ی این محقق‌ها می‌توان به قوم و همکاران [8] اشاره نمود که از یک میکرو-تیر یکسرگیردار با جرم نوک جهت مدل‌سازی رفتار میکرو-ژيروسکوپ‌ها بهره گرفتند. آن‌ها در مدل‌سازی، اثرات ممان دوم جرمی را نیز بر روی رفتار میکرو-ژيروسکوپ در نظر گرفتند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که اعمال ولتاژهای DC بالا و فرکانس ولتاژ AC نزدیک فرکانس طبیعی میکرو-تیر موجب بهبود عملکرد میکرو-ژيروسکوپ می‌گردد. لذا توجه به این نکته که میکرو-سیستم‌ها در ولتاژهای بالا در معرض خطر ناپایداری کشیدگی<sup>4</sup> قرار می‌گیرند، حائز اهمیت می‌باشد. لذا بررسی ناپایداری کشیدگی میکرو-ژيروسکوپ‌ها به یک بحث با اهمیت فراوان مبدل گردیده است.

ناپایداری کشیدگی زمانی رخ می‌دهد که نیروی بازگرداننده‌ی تکیه‌گاه

<sup>1</sup> Tuning fork

<sup>2</sup> Drive direction

<sup>3</sup> Sense direction

<sup>4</sup> Pull-in instability

<sup>5</sup> Squeeze film damping

<sup>6</sup> Strain gradient theory

<sup>7</sup> Dilatation gradient tensor

تحت تأثیر تحریک از پایه‌ی  $\mathbf{r}_0$  قرار گرفته است. شایان ذکر است که دستگاه‌های  $(X, Y, Z)$  و  $(x, y, z)$  به ترتیب دستگاه‌ها ثابت و دورانی می‌باشند.

## 1-2- انرژی کرنشی

بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، انرژی کرنشی بصورت تابعی از تانسور کرنش کوشی و قسمت متقارن تانسور انحنا در نظر گرفته می‌شود [15]. طبق این تئوری، انرژی کرنشی سیستم بصورت رابطه (1) قابل بیان می‌باشد:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\vec{\sigma} : \vec{\epsilon} + \vec{m} : \vec{\chi}) dV \quad (1)$$

که در آن  $\vec{\sigma}$ ،  $\vec{\epsilon}$ ،  $\vec{m}$  و  $\vec{\chi}$  به ترتیب نشانگر تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش کوشی، قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل و قسمت متقارن تانسور انحنا می‌باشند. این تانسورها، از معادله‌های (2) بدست می‌آیند:

$$\vec{\sigma} = \lambda \text{tr}(\vec{\epsilon}) \vec{I} + 2\mu \vec{\epsilon}, \quad \vec{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \\ \vec{m} = 2\mu l^2 \vec{\chi}, \quad \vec{\chi} = [\nabla \theta + (\nabla \theta)^T] \quad (2)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه،  $\mathbf{u}$  بردار موقعیت نسبت به دستگاه دورانی،  $l$  پارامتر وابسته به اندازه و  $\theta$  بردار چرخش می‌باشد. باید توجه داشت که بردار چرخش از معادله‌ی (3) بدست خواهد آمد:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

برای مدل‌سازی رفتار میکرو-ژيروسکوپ، فرض شده است که تیر مورد بررسی از قوانین جابجایی تیر اولر-برنولی تبعیت نماید. از همین‌رو، میدان جابجایی تیر اولر-برنولی بصورت روابط (4) قابل نمایش است:

$$\mathbf{u} = u_0 - y \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v = v_0, \quad w = w_0 \quad (4)$$

که در آن  $(u, v, w)$  و  $(u_0, v_0, w_0)$  به ترتیب جابجایی‌های یک نقطه روی سطح مقطع تیر، روی سطح مقطع و تار خنثی در فاصله‌ی  $x$  از یک انتهای تیر و در زمان  $t$  در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند. با در نظر گرفتن اثر کشش صفحه‌ی میانی، مؤلفه‌ی غیر صفر تانسور کرنش بصورت رابطه (5) بدست می‌آید [21]:

$$\epsilon_{xx} = u'_0 - v'_0 y - w'_0 z + \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} w_0'^2 \quad (5)$$

که در آن پرایم نشان دهنده‌ی مشتق‌های توابع نسبت به مکان می‌باشد. از جایگذاری معادله‌ی (4) در معادله‌ی (3) و نتیجه‌ی حاصل در معادله‌ی (2)، مؤلفه‌های غیر صفر قسمت متقارن تانسور انحنا طبق روابط (6) حاصل می‌شود:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} w_0'', \quad \chi_{xz} = \frac{1}{2} v_0'' \quad (6)$$

بنابراین انرژی کرنشی سیستم را می‌توان بصورت رابطه (7) بیان نمود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \left( u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + (EI_{zz} + \mu l^2 A) v_0''^2 + (EI_{yy} + \mu l^2 A) w_0''^2 \right] dx \quad (7)$$

که در آن  $E$  مدول یانگ ماده‌ی سازنده‌ی تیر است و  $I_{zz}$  و  $I_{yy}$  بصورت روابط (8) تعریف می‌شوند:

$$I_{yy} = \iint z^2 dA, \quad I_{zz} = \iint y^2 dA \quad (8)$$

## 2-2- انرژی جنبشی

موقعیت هر نقطه‌ی  $P$  روی یک سطح مقطع دلخواه از تیر را می‌توان بصورت مجموع موقعیت تکیه‌گاه و مکان هر نقطه نسبت به تکیه‌گاه بصورت رابطه (9) نوشت:

یک مدار نصب می‌شوند. این مدار می‌تواند حرکت مستقلی را داشته باشد و لذا حرکت آن بر روی رفتار میکرو-ابزارها تأثیر می‌گذارد. به اینگونه حرکت میکرو-ابزارها، حرکت پی سی بی<sup>1</sup> گفته می‌شود. با وجود اینکه میکروژيروسکوپ‌ها غالباً بر روی سیستم‌های دارای حرکت نصب می‌شوند، اما بررسی‌های کمی در راستای تعیین رفتار ناشی از حرکت عمومی سیستم صورت پذیرفته است. اسماعیلی و همکاران [6]، معادله‌های حاکم بر میکروژيروسکوپ‌های از نوع تیر یکسرگیردار با جرم نوک را با حرکت پایه‌ی عمومی بدست آوردند. سپس با استفاده از روش کاهش مرتبه‌ی گالرکین<sup>2</sup>، معادله‌های دیفرانسیل معمولی حاکم بر دینامیک مسئله را بدست آوردند. آن‌ها در نهایت مسئله را برای حالتی که میکرو-ژيروسکوپ حول محور خنثی خود حرکت دورانی داشته باشد حل نمودند. شایان ذکر است که آن‌ها رفتار سیستم را در حالتی که پایه‌ی سیستم سرعت ثابت داشته باشد نیز بررسی نمودند.

تمرکز پژوهش پیش‌رو بر روی بررسی رفتار وابسته به اندازه‌ی ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسرگیردار با یک جرم متمرکز در وسط با در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. میکرو-ژيروسکوپ مورد بررسی تحت تأثیر ولتاژ DC ناگهانی قرار گرفته و حرکت از پایه‌ی هارمونیک به عنوان یکی از متداول‌ترین انواع حرکت‌های پایه در نظر گرفته شده است. علاوه بر موارد ذکر شده، میرایی ویسکوز نیز در مدل‌سازی میکرو-ژيروسکوپ لحاظ گردیده است. اصل همپلتون برای بدست آوردن معادله‌های حاکم بر رفتار سیستم بکار گرفته شده است. سپس برای دستیابی به معادله‌های دیفرانسیل معمولی سیستم، از روش کاهش مرتبه‌ی گالرکین بهره گرفته شده است. در ادامه با استفاده از روش رانج-کوتای مرتبه‌ی چهار<sup>3</sup>، معادله‌های بدست آمده حل شده‌اند.

## 2- مدل‌سازی ریاضی

همان‌طور که در شکل 1 نشان داده شده است، یک تیر دوسرگیردار را به طول  $L$ ، ضخامت  $h$  در جهت تحریک، ضخامت  $b$  در جهت حسگر و جرم متمرکز  $M$  در وسط تیر، در نظر بگیرید. فاصله‌های اولیه‌ی تیر تا الکترودهای ثابت در جهت‌های تحریک و حسگر به ترتیب برابر با  $d_v$  و  $d_w$  می‌باشد. تیر در جهت تحریک توسط ولتاژ DC ناگهانی قرار داده شده است. به علاوه تیر حول تار خنثی با سرعت دورانی ثابت  $\Omega$  در حال دوران می‌باشد. همچنین تیر

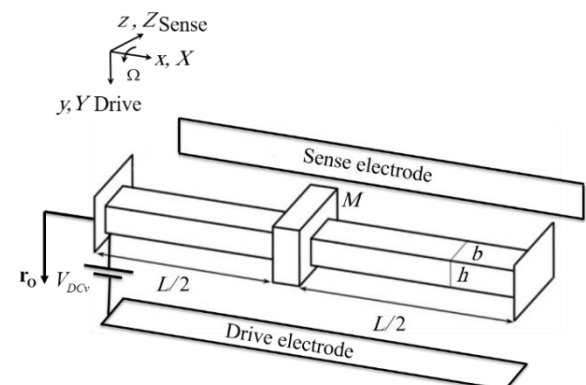


Fig. 1 Schematic of the micro-bridge gyroscope

شکل 1 شماتیک ژيروسکوپ با ساختار میکرو-تیر دوسر گیردار با جرم متمرکز در وسط

<sup>1</sup> Printed Circuit Board (PCB)

<sup>2</sup> Galerkin's reduced order model

<sup>3</sup> Fourth order Range-Kutta method

که در آن  $\varepsilon$  ضریب ثابت دی‌الکتریک مادهی واسط میان الکتروود تحریک و تیر است. همچنین  $A_v$  مساحت جرم متمرکز که در معرض نیروی الکترواستاتیک است، می‌باشد. لازم به ذکر است که در مسئلهی مورد بررسی مادهی واسط میان دو الکتروود هوا در نظر گرفته شده است.

#### 4-2- میرایی خطی

سیستم‌هایی که حرکت هارمونیک را تجربه می‌نمایند، بالقوه در معرض خطر تشدید می‌باشند. لذا برای پیشگیری از این حالت برای سیستم میرایی در نظر گرفته شده است. میرایی مورد بررسی در پژوهش پیش‌رو از نوع میرایی خطی می‌باشد و کار نیروی میرایی از معادلهی (15) بدست می‌آید:

$$\delta W_d = \int_0^L c \dot{v}_0 \delta v_0 dx \quad (15)$$

در معادلهی (15)،  $c$  ضریب میرایی ویسکوز می‌باشد.

#### 5-2- معادله‌های حرکت

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر دینامیک سیستم، از اصل همیلتون استفاده می‌شود. با توجه به معادله‌های (7)، (13)، (14) و (15)، معادله‌های حاکم بر سیستم بصورت روابط (16) بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \left( u'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) \right] = 0 \quad (16-الف)$$

$$\left( \rho A + M \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} (\dot{v}_0 - \Omega w_0 + V_0 \times \cos(\theta)) - \left( \rho A + M \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) (\Omega \dot{w}_0 + \Omega^2 v_0 - \Omega V_0 \sin(\theta)) - EA \frac{\partial}{\partial x} (u'_0 v'_0 + \frac{1}{2} v_0'^3 + \frac{1}{2} v_0' w_0'^2) + c \dot{v}_0 + (EI_{zz} + \mu l^2 A) v_0'''' = F_v \quad (16-ب)$$

$$\left( \rho A + M \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} (\dot{w}_0 + \Omega v_0 - V_0 \times \sin(\theta)) - \left( \rho A + M \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) (\Omega^2 w_0 - \Omega \dot{v}_0 - \Omega V_0 \cos(\theta)) - EA \frac{\partial}{\partial x} (u'_0 w'_0 + \frac{1}{2} w_0' v_0'^2 + \frac{1}{2} w_0'^3) + (EI_{yy} + \mu l^2 A) \times w_0'''' = 0 \quad (16-ج)$$

همچنین شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} u_0(0, t) = 0, u_0(L, t) = 0 \\ k_0(0, t) = 0, k_0(L, t) = 0 \\ k'_0(0, t) = 0, k'_0(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن  $k_0$  می‌تواند  $v_0$  و یا  $w_0$  باشد. لازم به ذکر است که شرایط فوق بیانگر دوسرگیردار بودن میکروژيروسکوپ می‌باشد.

معادلهی (16-الف) همراه با شرایط مرزی موجود در معادلهی (17-الف) می‌تواند برای  $u_0$  بصورت تحلیلی حل گردد. با حل معادلهی (16-الف)،  $u_0$  را می‌توان بصورت تابعی از  $v_0$  و  $w_0$  بصورت رابطه (18) نوشت:

$$u_0 = -\frac{1}{2} \int_0^x (v_0'^2 + w_0'^2) dx + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_0'^2 + w_0'^2) dx \times x \quad (18)$$

برای بدست آوردن معادله‌های بی‌بعد حاکم بر دینامیک مسئله، پارامترها در روابط (19) معرفی شده‌اند:

$$\begin{aligned} \hat{w} = \frac{w_0}{d_w}, \hat{v} = \frac{v_0}{d_v}, \hat{x} = \frac{x}{L}, M_r = \frac{M}{\rho AL}, \Omega_r = \frac{\Omega}{\hat{t}} \\ \hat{t} = t \hat{\tau} = t \sqrt{\frac{EI_{zz}}{\rho AL^4}}, \bar{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\hat{t}}, \alpha_1 = 6 \left( \frac{d_v}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Gamma_P = \Gamma_0 + \Gamma_{rel} \quad (9)$$

که در آن  $\Gamma_0$  نشانگر تحریک از پایه و  $\Gamma_{rel}$  بیانگر موقعیت یک نقطه‌ی دلخواه نسبت به تکیه‌گاه است که در دستگاه مختصات دورانی بیان شده است. با توجه به اینکه تحریک از پایهی مورد بررسی در این پژوهش از نوع هارمونیک می‌باشد، می‌توان  $\Gamma_0$  را بصورت زیر بیان نمود:

$$\Gamma_0 = R_0 \sin(\Lambda t) J \quad (10)$$

که در آن  $R_0$ ،  $\Lambda$  و  $J$  به ترتیب، دامنه‌ی حرکت هارمونیک، فرکانس حرکت هارمونیک و بردار یکه در جهت  $Y$  دستگاه مختصات ثابت می‌باشند. با جایگذاری معادلهی (10) در معادلهی (9)، محاسبه‌ی مشتق زمانی حاصل و چشم‌پوشی از مشتق‌های زمانی جابجایی طولی تیر، سرعت نقطه‌ی دلخواه  $P$  از تیر با رابطه (11) بدست می‌آید:

$$v_P = (\dot{v}_0 - \Omega w_0 + V_0 \cos(\theta))j + (\dot{w}_0 + \Omega v_0 - V_0 \sin(\theta))k \quad (11)$$

که در آن  $V_0$  سرعت تحریک از پایه در جهت  $Y$  است و  $\theta$  زاویه‌ی بین محور  $Y$  از دستگاه مختصات ثابت و محور تحریک  $y$  از دستگاه مختصات دورانی می‌باشد. با توجه به ثابت بودن سرعت دوران میکرو-تیر، زاویه‌ی  $\theta$  از معادلهی (12) بدست خواهد آمد:

$$\theta = \Omega t + \theta_0 \quad (12)$$

در معادلهی (12) زاویه‌ی  $\theta_0$ ، زاویه‌ی اولیه‌ی میان محور ثابت تحریک از پایه‌ی  $Y$  و محور دورانی جهت تحریک  $y$  می‌باشد. جهت درک بهتر موقعیت دستگاه دورانی نسبت به دستگاه ساکن، شکل 2 شماتیک این دو دستگاه را نشان می‌دهد.

با توجه به معادلهی (11)، برای انرژی جنبشی سیستم می‌توان رابطه (13) را نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho A + M \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \left( (\dot{v}_0 - \Omega w_0 + V_0 \cos(\theta))^2 + (\dot{w}_0 + \Omega v_0 - V_0 \sin(\theta))^2 \right) dx \quad (13)$$

که در آن  $\delta$  تابع دلتای دیراک می‌باشد. شایان ذکر است که دات بیان‌کننده‌ی مشتق‌های زمانی توابع است.

#### 3-2- نیروی الکترواستاتیک

باید توجه داشت که در سیستم‌هایی نظیر میکرو-ژيروسکوپ‌ها که سطح مقطع تیر غالباً بصورت مربع و یا نزدیک مربع می‌باشد، اثرات لبه‌ای در تعیین نیروی الکترواستاتیک اعمالی حائز اهمیت می‌گردند. از این رو نیروی الکترواستاتیک را که توسط ولتاژ DC ناگهانی در جهت تحریک به سیستم اعمال می‌شود با در نظر گرفتن اثرات لبه‌ای، می‌توان بصورت رابطه (14) نوشت:

$$F_v = \frac{\varepsilon b (V_{DCv})^2}{2(d_v - v_0)^2} \left( 1 + 0.65 \frac{d_v - v_0}{b} \right) \left( 1 + \frac{A_v}{b} \times \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \quad (14)$$

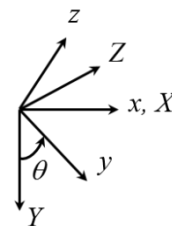


Fig. 2 Position of rotating coordinate system with respect to the fixed coordinate system

شکل 2 موقعیت دستگاه مختصات دورانی نسبت به دستگاه مختصات ساکن

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \sigma_1 = 2 \int_0^{0.5} \psi^2 Q dx \\
 \sigma_2 &= 2(1 + \eta_1) \int_0^{0.5} \psi \psi'''' dx - 2\Omega_r^2 \int_0^{0.5} \psi^2 Q dx \\
 \sigma_3 &= -4\Omega_r k \int_0^{0.5} \psi^2 Q dx \\
 \sigma_4 &= -4\alpha_1 \int_0^{0.5} \psi'^2 dx \int_0^{0.5} \psi \psi'' dx \\
 \sigma_5 &= -4\alpha_2 \int_0^{0.5} \psi'^2 dx \int_0^{0.5} \psi \psi'' dx, \sigma'_1 = \sigma_1 \\
 \bar{h}_1 &= 2 \int_0^{0.5} h_1 \psi dx, \bar{h}_2 = -\frac{\bar{h}_1}{k}
 \end{aligned} \tag{26}$$

**4- نتایج**

**4-1 مقایسه و صحنه‌گذاری**

برای حل معادله‌های حاکم بر دینامیک مسئله از روش رانج-کوتای مرتبه‌ی چهار استفاده شده است. در ابتدا برای کسب اطمینان از صحت داده‌های بدست آمده، نتایج با داده‌های گزارش شده‌ی موجود مقایسه گردیده‌اند. از آنجایی‌که تاکنون نتایجی از ولتاژ کشیدگی دینامیکی ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسر گیردار با جرم متمرکز در وسط با در نظر گرفتن اثر هم‌زمان اندازه و تحریک از پایه‌ی هارمونیک منتشر نگردیده است، لذا در اولین قدم جهت مقایسه‌ی نتایج بدست آمده، پارامترهای  $M_r$ ،  $\Omega_r$  و  $\bar{\Lambda}$  برابر با صفر در نظر گرفته شده‌اند و از اثرات اندازه و میرایی صرف نظر شده است. در ادامه برای تعیین دقت مدل ارائه شده، مقایسه‌ای میان نتایج بدست آمده و نتایج موجود در پژوهش مقیمی زند و همکاران [22] انجام شده است. برای انجام این مقایسه، فرض شده است که مدول یانگ برابر با 183GPa، ضخامت  $b$  برابر با 20 $\mu$ m و ضخامت  $h$  برابر با 2 $\mu$ m باشند. بر طبق نتایج موجود در مرجع [22]، ولتاژ کشیدگی بی‌بعد، که برابر با مقدار  $\beta_1$  است، مساوی با 64.59 می‌باشد. بر اساس مدل ارائه شده، ولتاژ کشیدگی بی‌بعد برابر با 63.7 بدست می‌آید. با توجه به مقایسه، تطابق خوبی میان نتایج بدست آمده و نتایج موجود مشاهده می‌شود. شایان توجه است که ولتاژ کشیدگی بی‌بعد از این پس با نماد  $\beta_{DPI}$  نمایش داده خواهد شد.

بمنظور ارائه‌ی یک مقایسه‌ی دقیق‌تر، مدل مورد بررسی در نرم‌افزار کامسول<sup>1</sup> شبیه‌سازی شده است. از این رو مشخصات ماده‌ی مسئله مطابق جدول 1 انتخاب شده‌اند.

علاوه بر مشخصات ماده‌ی مورد استفاده، در پژوهش پیش‌رو از پارامترهای هندسی موجود در جدول 2 به عنوان مشخصات هندسی مسئله استفاده گردیده است.

علاوه بر پارامترهای آورده شده در جدول‌های 1 و 2، مقادیر  $M_r$ ،  $\Omega_r$  و  $\beta_3$  به ترتیب برابر با 0.3، 0.1 و 0.0025 در نظر گرفته شده‌اند. قابل توجه

**جدول 1** مشخصات ماده‌ی میکرو-ژيروسکوپ

$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$l$ ( $\mu$ m)
169	0.33	2331	0.592

**جدول 2** مشخصات هندسی مسئله

$b$ ( $\mu$ m)	$d_v$ & $d_w$ ( $\mu$ m)	$h$ ( $\mu$ m)	$L$ ( $\mu$ m)
3	3	3	200

<sup>1</sup> Comsol

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= 6 \left(\frac{d_w}{h}\right)^2, k = \frac{d_w}{d_v}, \eta_1 = \frac{\mu l^2 A}{EI_{zz}}, \eta_2 = \frac{\mu l^2 A}{EI_{yy}} \\
 \beta_1 &= \frac{\varepsilon b V^2 L^4}{2d_v^3 EI_{zz}}, \beta_2 = 0.65 \frac{d_v}{b}, \beta_3 = \frac{A_v}{bL}, c_1 = \frac{c \tilde{L} L^4}{EI_{zz}} \\
 h_1 &= -\rho A \left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \frac{A_0 L^4}{d_v EI_{zz}}, h_2 = -\frac{h_1}{k}
 \end{aligned} \tag{19}$$

که در آن  $A_0$  مقدار شتاب حرکت هارمونیک پایه می‌باشد. با جایگذاری معادله‌ی (18) در معادله‌های (16-ب) و (16-ج)، قرار دادن معادله‌های (19) در معادله‌ی بدست آمده و حذف بالانویس‌ها روابط (20) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \ddot{v} + c_1 \dot{v} - (1 + M_r \\
 &\times \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)) \Omega_r^2 v - 2\Omega_r k \left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &\times \dot{w} + h_1 \sin(\bar{\Lambda}t) \cos(\bar{\theta}) - \alpha_1 \int_0^1 v'^2 dx v'' \\
 &- \alpha_2 \int_0^1 w'^2 dx v'' + (1 + \eta_1) v'''' = \frac{\beta_1}{(1-v)^2} \\
 &\times (1 + \beta_2(1-v)) \left(1 + \beta_3 \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{20-الف}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \ddot{w} - \left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &\times \Omega_r^2 w + 2\Omega_r/k \left(1 + M_r \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \dot{v} \\
 &+ h_2 \sin(\bar{\Lambda}t) \sin(\bar{\theta}) - \alpha_1 \int_0^1 v'^2 dx w'' - \alpha_2 \\
 &\times \int_0^1 w'^2 dx w'' + (1 + \eta_1) w'''' = 0
 \end{aligned} \tag{20-ب}$$

که در آن  $\bar{\theta}$  بصورت رابطه (21) تعریف می‌شود:

$$\bar{\theta} = \Omega_r t + \theta_0 \tag{21}$$

**3- روش حل**

برای حل معادله‌های (16) از روش کاهش مرتبه‌ی گالرکین برای تبدیل معادله‌های با مشتق‌های جزئی به معادله‌های دیفرانسیل معمولی استفاده شده است. بر اساس این روش، از تقریب تک مدی گالرکین بهره گرفته شده است و بنابراین خیز یک نقطه از تیر بصورت رابطه (22) قابل بیان است:

$$i = \psi(x) q_i(t) = \frac{\varphi(x)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} q_i(t) \tag{22}$$

که در آن  $i$  می‌تواند  $v$  یا  $w$  باشد. همچنین  $\varphi(x)$  شکل مد نامیرای نصف تیر و  $q_i(t)$  تابع زمانی مد اول می‌باشد. با توجه به تقارن تیر می‌توان شکل مد نصف تیر را بصورت رابطه (23) بیان نمود:

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(x) &= \cosh(2\beta_n x) - \cos(2\beta_n x) \\
 &+ \frac{\sin(2\beta_n x) + \sinh(2\beta_n x)}{\cos(2\beta_n x) + \cosh(2\beta_n x)} (\sinh(2\beta_n x) - \sin(2\beta_n x))
 \end{aligned} \tag{23}$$

که در آن  $\beta_n$  از حل معادله‌ی (24) بدست می‌آید:

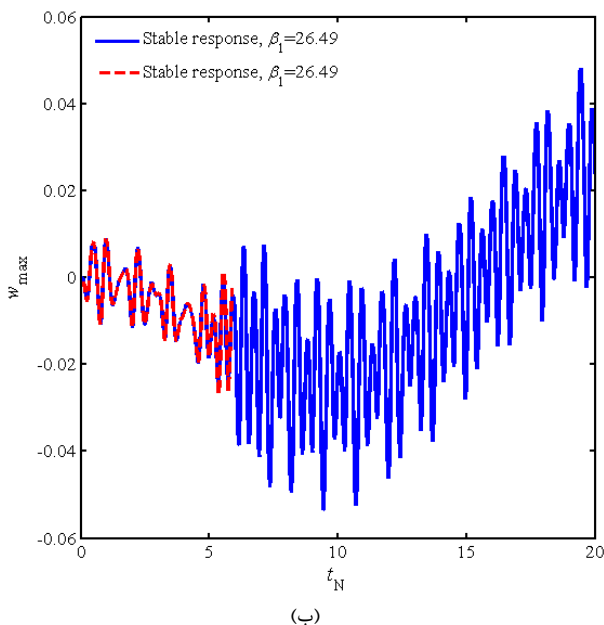
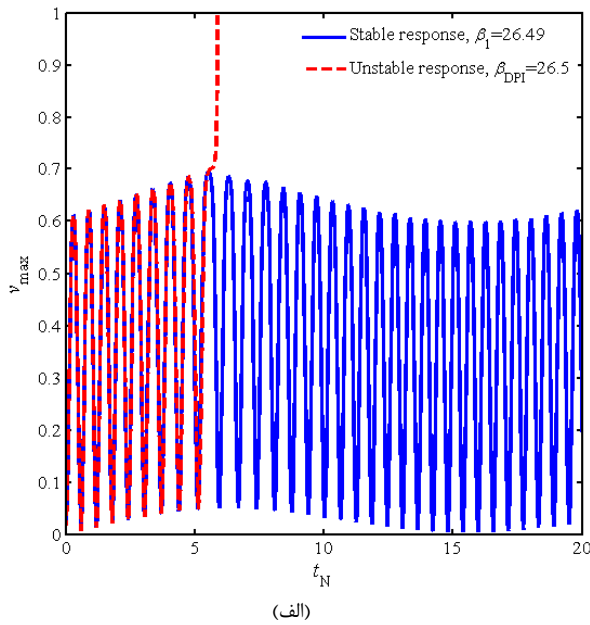
$$\begin{aligned}
 \sin(\beta_n) \cosh(\beta_n) + \sinh(\beta_n) \cos(\beta_n) + M_r \beta_n \\
 \times (\cos(\beta_n) \cosh(\beta_n) - 1) = 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

با جایگذاری معادله‌ی (22) در معادله‌های (20)، ضرب حاصل در  $\psi$  و انتگرال‌گیری روی دامنه‌ی بی‌بعد، معادله‌های نهایی سیستم (25) بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \dot{q}_v + c_N \dot{q}_v + \sigma_2 q_v + \sigma_3 \dot{q}_w + \sigma_4 q_v^3 + \sigma_5 q_v q_w^2 \\
 + \bar{h}_1 \sin(\bar{\Lambda}t) \cos(\bar{\theta}) = 2\beta_1 \int_0^{0.5} \frac{\psi}{(1+\psi q_v)^2} \\
 \times (1 + \beta_2(1 + \psi q_v)) \left(1 + \beta_3 \delta \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx
 \end{aligned} \tag{25-الف}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma'_1 \dot{q}_w + \sigma'_2 \dot{q}_v + \sigma'_3 \dot{q}_w + \sigma'_4 q_w^3 + \sigma'_5 q_w q_v^2 \\
 + \bar{h}_2 \sin(\bar{\Lambda}t) \sin(\bar{\theta}) = 0
 \end{aligned} \tag{25-ب}$$

که در آن روابط (26) برقرارند:



**Fig. 3** Undamped stable and unstable time response of the micro-gyroscope for (a) drive direction and (b) sense direction

شکل 3 پاسخ زمانی پایدار و ناپایدار و نامیرایی میکرو-ژیروسکوپ برای جهت تحریک و (ب) جهت حسگر

مستقیم با میزان ولتاژ اعمالی به سیستم ارتباط دارد. اما هرچه که ولتاژ بیشتری به سیستم اعمال گردد، وقوع ناپایداری کشیدگی در میکرو-ژیروسکوپ بیش از پیش می‌گردد. لذا بررسی ولتاژ کشیدگی در این میکرو-ژیروسکوپ‌ها اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. شکل 5 تأثیر میرایی را بر روی ولتاژ کشیدگی برای سه نسبت سطح متفاوت از جرم متمرکز نشان می‌دهد.

نسبت سطح‌های،  $\beta_3$ ، مورد استفاده در این بررسی عبارتند از 0، 0.05 و 0.1. همان‌طور که از شکل 5 مشاهده می‌شود، افزایش میرایی سبب افزایش ولتاژ کشیدگی بی‌بعد بصورت خطی می‌شود. همچنین هرچه نسبت مساحت جرم متمرکز بیشتر گردد، ولتاژ کشیدگی کاهش می‌یابد. چرا که در نظر گرفتن نسبت سطح موجب به وجود آمدن عبارتهای ثانویه در نیروی الکترواستاتیک می‌گردد. این مهم سبب می‌شود که نیروی بیشتری به

است که در مدل‌سازی اخیر از اثرات اندازه، میرایی و تحریک از پایه‌ی هارمونیک صرف نظر گردیده است. با توجه به شبیه سازی انجام شده در نرم‌افزار کامسول، ولتاژ کشیدگی برابر با 205.4V بدست آمده است. مشاهده می‌شود که این مقدار با ولتاژ کشیدگی 206.94V حاصل از مدل ارائه شده‌ی پیش‌رو تطابق خوبی را دارد. با در نظر گرفتن مقایسه‌های انجام شده، می‌توان اطمینان حاصل نمود که مدل ارائه شده‌ی حاضر دقت بسیار خوبی در بررسی رفتار ژيروسکوپ‌های با ساختار میکرو-تیر دوسرگیردار با جرم متمرکز در وسط را دارد. در ادامه‌ی بررسی انجام شده، جنبه‌های متفاوتی از رفتار میکرو-ژیروسکوپ مد نظر قرار داده شده است.

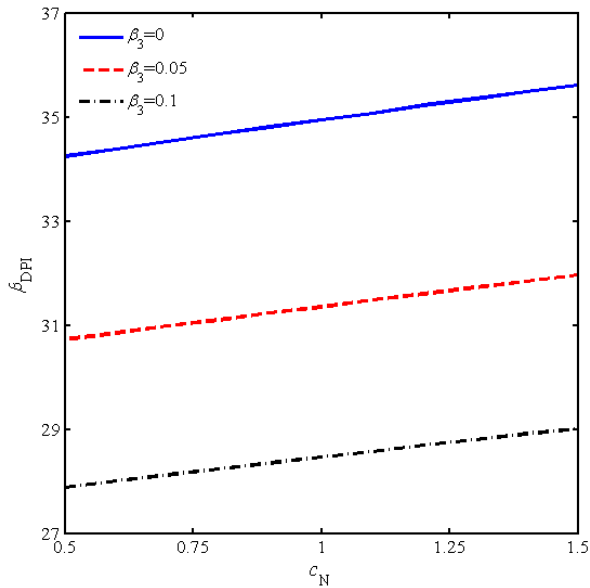
#### 2-4- پاسخ زمانی میکرو-ژیروسکوپ

با توجه به معادله‌های (25-الف) و (25-ب)، مشاهده می‌شود که تحریک پایه‌ی هارمونیک با تصویر شدن بر روی دو راستای تحریک و حسگر عبارتهایی را بصورت  $\bar{h}_1 \sin(\bar{\Lambda}t) \cos(\bar{\theta})$  و  $\bar{h}_2 \sin(\bar{\Lambda}t) \sin(\bar{\theta})$  در معادله‌های حاکم بر دینامیک میکرو-ژیروسکوپ ایجاد نموده است. جهت نمایش نحوه‌ی رفتار میکرو-ژیروسکوپ در اثر اعمال این دو عبارت، شکل 3 پاسخ زمانی میکرو-ژیروسکوپ را در حالت پایدار و ناپایدار و در عدم حضور میرایی نشان می‌دهد. شکل‌های (3-الف) و (3-ب) بترتیب نمایشگر جایجایی‌های میکرو-ژیروسکوپ در راستاهای تحریک و حسگر بر حسب زمان بی‌بعد می‌باشند. شایان ذکر است که برای رسم این شکل مقادیر  $\bar{h}_1$ ،  $\bar{\Lambda}$ ،  $\Omega_r$  و  $\beta_3$  به ترتیب برابر با 0.1، 0.2، 5 و 0.1 در نظر گرفته شده‌اند. برای این حالت ولتاژ کشیدگی بی‌بعد برابر با 26.5 بدست آمده است. قابل توجه است که از این پس در پژوهش پیش‌رو زمان بی‌بعد با نماد  $t_N$  نمایش داده می‌شود. با اتخاذ مقادیر متفاوت برای فرکانس‌های بی‌بعد  $\bar{\Lambda}$  و  $\Omega_r$  شکل‌های متنوعی برای پاسخ زمانی میکرو-ژیروسکوپ حاصل می‌گردد. اما از آنجایی که تحریک سیستم توسط توابع هارمونیک، میکرو-ژیروسکوپ را در معرض خطر تشدید قرار می‌دهد، وجود میرایی برای جلوگیری از این پدیده ضروری به نظر می‌رسد. لذا در ادامه‌ی پژوهش برای سیستم میرایی در نظر گرفته شده است. شکل 4 پاسخ زمانی سیستم را در دو راستای تحریک و حسگر در حالتی که  $C_N$  مقداری برابر با 1 داشته باشد، نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل 4 برداشت می‌شود، میرایی موجب کاهش دامنه‌ی حرکت و در نتیجه افزایش ولتاژ کشیدگی می‌گردد. در این حالت ولتاژ کشیدگی بی‌بعد برابر با 28.45 بدست آمده است.

با مقایسه‌ی شکل‌های 3 و 4 به وضوح دیده می‌شود که در نظر گرفتن میرایی سبب کاهش دامنه‌ی ارتعاشات می‌گردد. این در حالیست که ولتاژ کشیدگی در شکل 4 بیشتر از مقدار بدست آمده برای شکل 3 می‌باشد. در نتیجه به ازای ولتاژهای یکسان، چنانچه میرایی وجود داشته باشد، دامنه‌ی حرکت در جهت حسگر به شدت کاهش می‌یابد. این امر بصورت مستقیم روی دقت میکرو-ژیروسکوپ تأثیر گذاشته و از دقت آن می‌کاهد. چرا که دقت میکرو-ژیروسکوپ‌ها بر پایه‌ی حداکثر دامنه‌ی ایجاد شده در جهت حسگر استوار است. از این رو، در سیستم‌هایی که در معرض تحریک از پایه‌ی هارمونیک هستند، بهتر است که میرایی انتخاب شده کمترین میزان ممکن را داشته باشد. در ادامه برای درک بهتر موضوع، تأثیر میرایی بر روی ولتاژ کشیدگی بررسی شده است.

#### 3-4- اثرهای میرایی و سطح جرم متمرکز بر ولتاژ کشیدگی

عملکرد ژيروسکوپ‌هایی که بر پایه‌ی اثر کوریولیس کار می‌کنند، به طور



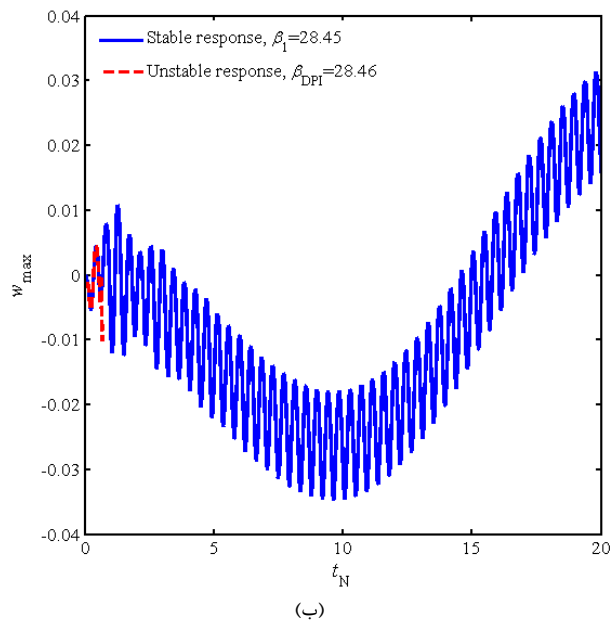
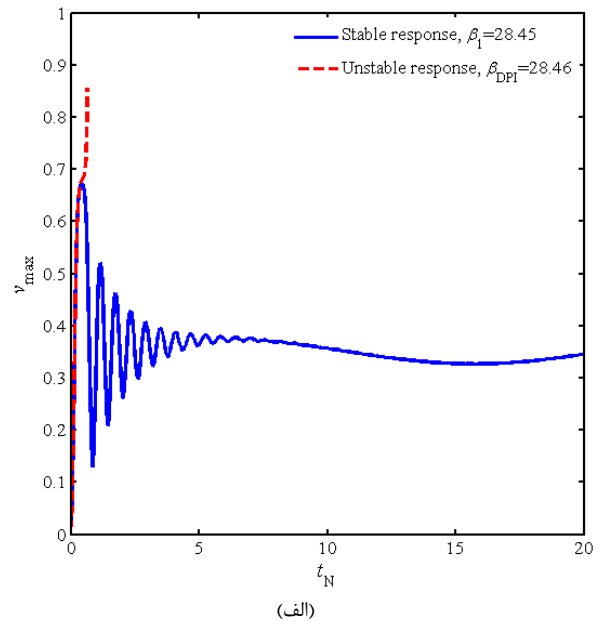
**Fig. 5** Variation of non-dimensional dynamic pull-in voltage versus non-dimensional damping coefficient for three values of area of proof mass ratio

شکل 5 تغییرات ولتاژ دینامیک کشیدگی بی‌بعد بر حسب ضریب میرایی بی‌بعد برای سه مقدار نسبت مساحت جرم متمرکز

می‌دهد. این تغییرات برای سه حالتی که ولتاژ تنها به سطح جرم، تنها به تیر و بصورت هم‌زمان به تیر و سطح جرم وارد شده باشد را نشان می‌دهد. از شکل 6- الف مشاهده می‌شود، چنانچه ولتاژ تنها به تیر وارد شود خیز تیر نسبت به حالتی که ولتاژ تنها به سطح جرم وارد شود بسیار بیشتر خواهد بود. این در حالی است که تفاوت چندانی در جهت حسگر وجود ندارد. این بدان معنی است که سیستم در معرض خطر ناپایداری کشیدگی قرار داده شده است، در صورتی که حساسیت آن به همان نسبت افزایش پیدا نکرده است. نکته‌ی دیگری که از شکل 6 برداشت می‌شود این است که چنانچه تحریک پایه در زمان اولیه در خلاف جهت حسگر و یا با توجه به شکل‌های 2 و 6 در زاویه‌ی  $\pi/2$  وارد شود، حساسیت میکرو-ژيروسکوپ حداقل خواهد بود. بنابراین برای بهبود رفتار میکرو-ژيروسکوپ بهتر است ولتاژ تنها به سطح جرم متمرکز وارد شده و از تحریک پایه‌ی هارمونیک با زاویه‌ی  $\theta_0$  بزرگتر از  $0.5 \text{ rad}$  و کوچکتر از  $2.5 \text{ rad}$  پرهیز گردد. شایان ذکر است که در بررسی انجام شده، ولتاژ بی‌بعد  $\beta_1$  برابر با 15 در نظر گرفته شده است. همچنین از این به بعد حداکثر خیز وسط تیر در جهت تحریک و حسگر بترتیب با  $V_{\max}$  و  $W_{\max}$  نشان داده خواهند شد.

### 5- نتیجه‌گیری

رفتار وابسته به اندازه‌ی ژيروسکوپ‌های با ساختار میکروتیر دوسرگیردار با جرم متمرکز در وسط تحت اثرهای هم‌زمان ولتاژ ناگهانی DC و تحریک از پایه‌ی هارمونیک مورد بررسی قرار گرفت. برای مدل‌سازی رفتار وابسته به بعد میکرو-ژيروسکوپ از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بهره گرفته شد. اصل همپلتون برای بدست آوردن معادله‌های حرکت میکرو-ژيروسکوپ استفاده شد. سپس معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل با بکارگیری تقریب تک مدی گالرکین به معادله‌های دیفرانسیل معمولی تبدیل گردیدند. در ادامه، معادله‌های بدست آمده با استفاده از روش رانج-کوتای مرتبه‌ی چهار حل شدند. نتایج بدست آمده سپس با داده‌های موجود در ادبیات مقایسه گردید و تطابق خوبی میان مدل ارائه شده و نتایج موجود مشاهده



**Fig. 4** Damped stable and unstable time response of the micro-gyroscope for (a) drive direction and (b) sense direction

شکل 4 پاسخ زمانی پایدار و ناپایداری و میرایی میکرو-ژيروسکوپ برای (الف) جهت تحریک و (ب) جهت حسگر

سیستم اعمال شود و از همین رو ناپایداری کشیدگی در ولتاژهای کمتری اتفاق می‌افتد.

همان‌طور که از شکل 5 مشهود است، در نظر گرفتن سطح جرم متمرکز تأثیر چشمگیری در تعیین ولتاژ کشیدگی دارد. بدین سبب در بخش بعد اثر در نظر گرفتن سطح جرم متمرکز مورد بررسی بیشتری قرار گرفته است.

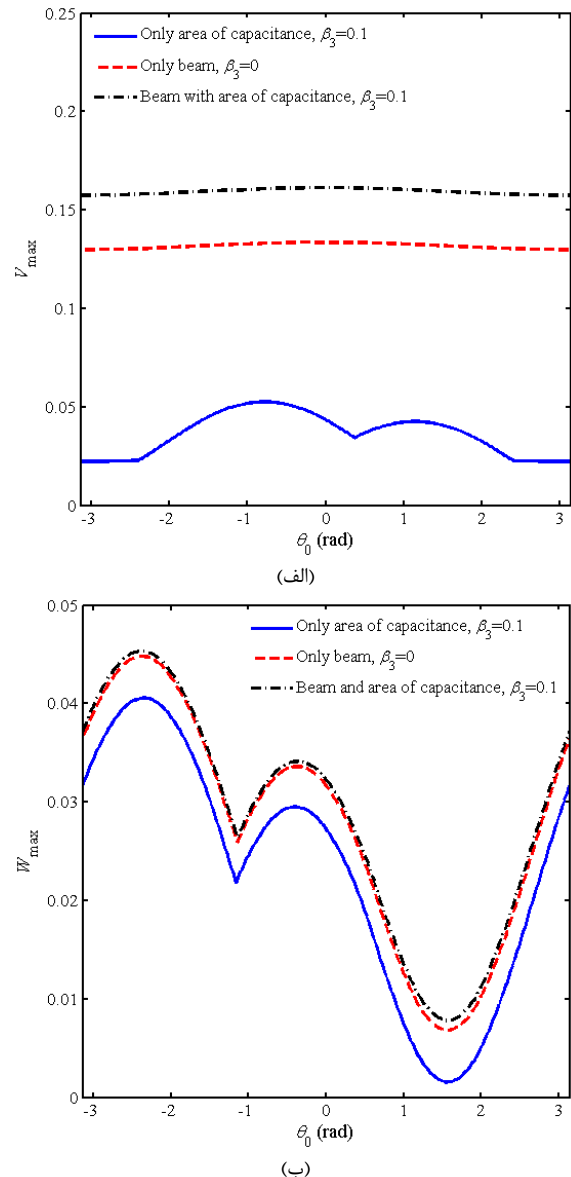
### 4-4- تأثیر در نظر گرفتن سطح جرم متمرکز

بنا بر مشاهدات بخش قبل، سطح جرم متمرکز تأثیر بسزایی در شکل‌گیری رفتار میکرو-ژيروسکوپ دارد. این تأثیر ناشی از حضور این عبارت در رابطه‌ی نیروی الکترواستاتیک می‌باشد. بمنظور بررسی دقیق‌تر، شکل 6 تغییرات حداکثر خیز وسط تیر در دو راستای تحریک و حسگر را در برابر زاویه‌ی اولیه‌ی میان محور  $Y$  دستگاه مختصات ساکن و محور تحریک را نشان

بر رفتار میکرو-ژيروسکوپ در حضور تحریک از پایه‌ی هارمونیک بررسی گردید. در ادامه نشان داده شد که چنانچه ولتاژ تنها به سطح جرم متمرکز وارد شود، دامنه‌ی حرکت میکرو-ژيروسکوپ در جهت تحریک شدت کاهش می‌یابد. این در حالی بود که کاهش دامنه در جهت حسگر بسیار کمتر بوده و لذا نتیجه گرفته شد که اعمال ولتاژ تنها به جرم متمرکز موجب بهبود رفتار میکرو-ژيروسکوپ خواهد شد. به علاوه اثر جهت اعمال تحریک از پایه‌ی هارمونیک بر رفتار میکرو-ژيروسکوپ نیز مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده شد که چنانچه تحریک پایه‌ی هارمونیک در ابتدا در خلاف جهت حسگر وارد شود سبب کاهش چشمگیر حساسیت سیستم خواهد شد.

### 6- مراجع

- [1] S. D. Senturia, *Microsystem Design*, pp. 3-29, New York: Springer US, 2007.
- [2] Z. Syed, P. Aggarwal, C. Goodall, X. Niu, N. El-Sheimy, A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems, *Measurement Science and Technology*, Vol. 18, No. 7, pp. 1897, 2007.
- [3] H. A. Tilmans, W. De Raedt, E. Beyne, MEMS for wireless communications: from RF-MEMS components to RF-MEMS-SIP, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 13, No. 4, pp. S139, 2003.
- [4] M. Mojahedi, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Static deflection and pull-in instability analysis of an electrostatically actuated microcantilever gyroscope considering geometric nonlinearities, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 8, pp. 2425-2434, 2013.
- [5] K. Liu, W. Zhang, W. Chen, K. Li, F. Dai, F. Cui, X. Wu, G. Ma, Q. Xiao, The development of micro-gyroscope technology, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, No. 11, pp. 113001, 2009.
- [6] M. Esmacili, N. Jalili, M. Durali, Dynamic modeling and performance evaluation of a vibrating beam microgyroscope under general support motion, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 1, pp. 146-164, 2007.
- [7] M. Rasekh, S. Khadem, Design and performance analysis of a nanogroscope based on electrostatic actuation and capacitive sensing, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 23, pp. 6155-6168, 2013.
- [8] M. Ghommem, A. Nayfeh, S. Choura, F. Najjar, E. Abdel-Rahman, Modeling and performance study of a beam microgyroscope, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 23, pp. 4970-4979, 2010.
- [9] S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert, H. A. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 458, 2002.
- [10] M. Mojahedi, M. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Dynamic pull-in instability and vibration analysis of a nonlinear microcantilever gyroscope under step voltage considering squeeze film damping, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 5, No. 03, pp. 1350032, 2013.
- [11] X. Guo, D. Fang, X. Li, Measurement of deformation of pure Ni foils by speckle pattern interferometry, *Mechanics and Engineering*, Vol. 27, No. 2, pp. 21-25, 2005.
- [12] A. W. McFarland, J. S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1060, 2005.
- [13] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [14] W. Koiter, Couple-Stresses in the Theory of Elasticity, I & II, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen*, Vol. 67, pp. 17-44, 1969.
- [15] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [16] R. Mindlin, N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109-124, 1968.
- [17] N. Fleck, J. Hutchinson, A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, No. 12, pp. 1825-1857, 1993.
- [18] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [19] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Ahmadian, Strain gradient beam element, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 68, pp. 63-75, 2013.
- [20] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, G. Alici, Size-dependent performance of microgyroscopes, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 100, pp. 99-111, 2016.
- [21] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, pp. 48-117, New York, John Wiley & Sons, 2017.
- [22] M. Moghimi Zand, M. Ahmadian, Dynamic pull-in instability of electrostatically actuated beams incorporating Casimir and van der Waals forces, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 9, pp. 2037-2047, 2010.



**Fig. 6** Variation of maximum displacement of the proof mass versus initial angle  $\theta_0$  when the voltage is applied to proof mass only, beam only and both proof mass and beam for (a) drive direction and (b) sense direction

شکل 6 تغییرات حداکثر خیر جرم متمرکز بر حسب زاویه‌ی اولیه‌ی  $\theta_0$  هنگامی که ولتاژ تنها به جرم، تنها به تیر و بصورت هم‌زمان به جرم و تیر وارد شود برای (الف) جهت تحریک و (ب) جهت حسگر

شد. علاوه بر مقایسه‌ی نتایج حاضر با کار سایر محققان، مسئله در نرم‌افزار کامسول شبیه سازی گردید و مقایسه‌ی میان نتایج کامسول و مدل حاضر تطابق بسیار خوبی را نشان داد. در نهایت ناپایداری کشیدگی و خیز میکرو-ژيروسکوپ در شرایط گوناگون بررسی گردید. پاسخ زمانی نامیرا در حضور تحریک از پایه‌ی هارمونیک در دو حالت پایدار و ناپایدار بدست آمد. برای جلوگیری از وقوع پدیده‌ی تشدید، اثرات میرایی نیز بر پاسخ زمانی سیستم ارائه گردید. علاوه بر پاسخ زمانی میرا، اثر ضریب میرایی بر ولتاژ کشیدگی بی‌بعد برای سه نسبت سطح جرم متمرکز بررسی گردید. نتایج نشان داد که میرایی سبب کاهش ولتاژ کشیدگی شده و ضروری است در سیستم‌هایی که با تحریک از پایه‌ی هارمونیک روبرو هستند، میرایی تا حد امکان کوچک انتخاب گردد. همچنین میزان تأثیر نسبت سطح جرم متمرکز