



## ارائه فیلتر دوگانه بی‌رد/اچ بینهایت جهت تخمین حالت مسائل غیر خطی

محمد طهرانی<sup>1</sup>، نادر نریمانزاده<sup>2</sup>، مجتبی معصوم نژاد<sup>3\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- استاذ، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، رشت

\* رشت، صندوق پستی 3756، masoumnezhad@tvu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 بهمن 1395

پذیرش: 17 اسفند 1395

ارائه در سایت: 03 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

فیلتر دوگانه

فیلتر بی‌رد

فیلتر اچ بینهایت

تخمین متغیرها

### چکیده

موفقیت‌های اولیه فیلتر کالمن در دهه 60 میلادی در کارهای فضایی منجر به تلاش در به‌کارگیری آن در کاربردهای صنعتی معمول در دهه 70 میلادی شد. این تلاش‌ها به‌سرعت مشخص کرد که یک دسته عدم تطابق بین فرضیات فیلتر کالمن و مسائل تخمین حالت در صنعت وجود دارد. برای مسائل صنعتی مدل دقیق سیستم و ماهیت آماری نویز فرایند به‌راحتی در دسترس نمی‌باشد. در این مقاله روشی نوین برای ترکیب دو فیلتر غیرخطی کالمن بی‌رد (UKF) و فیلتر اچ بینهایت بی‌رد (UH<sub>∞</sub>F) برای غلبه بر این عدم شناخت ارائه شده است که جواب میانی بین دو فیلتر را ارائه می‌دهد و در مسائل مختلف قابلیت اطمینان بیشتری نسبت به دو فیلتر دیگر دارد. از مشخصه‌های عملکردی این فیلتر بی‌نیازی از خطی سازی مسائل غیرخطی و حصول اطمینان از پاسخ مناسب‌تر نسبت به دو فیلتر دیگر، با توجه به عدم شناخت ماهیت آماری نویز می‌باشد. بررسی‌ها نشان داد زمانی که در بخشی از تخمین فیلتر UKF و در بخشی دیگر فیلتر UH<sub>∞</sub>F بهتر عمل می‌کند، فیلتر دوگانه با ارائه یک تخمین بهینه می‌تواند نتایج بهتری ارائه کند. همچنین تحلیل واریانس مشخص کرد که فیلتر از مقاومت بالایی نسبت به ماهیت آماری نویز برخوردار است و به شکل مناسب می‌توان با تغییر متغیر آن جوابی مناسب یافت. صحت سنجی نتایج به کمک دو مسئله غیرخطی شبیه سازی سقوط آزاد و آونگ معکوس در حوزه مهندسی مکانیک بررسی شده است.

## The hybrid unscented/H<sub>∞</sub> Kalman filter in state estimation of nonlinear problems

Mohammad Tehrani<sup>1</sup>, Nader Narimanzadeh<sup>1</sup>, Mojtaba Masoumnezhad<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Technical and Vocational University, Rasht, Iran

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, masoumnezhad@tvu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 January 2017

Accepted 07 March 2017

Available Online 23 April 2017

Keywords:

Hybrid filter

UKF

H<sub>∞</sub>

State estimation

### ABSTRACT

The early success in the 1960s of the Kalman filter in aerospace applications led to attempts to apply it to more common industrial applications in the 1970s. However, these attempts quickly made it clear that a serious mismatch existed between the underlying assumptions of Kalman filters and industrial state estimation problems. Accurate system models and statistical nature of the noise processes are not as readily available for industrial problems. In this paper, a novel method of combining both nonlinear unscented Kalman filter and H<sub>∞</sub> unscented Kalman filter is presented so that the results are a compromise between the addition of more reliability compared to that of two other filters. One characteristic of this filter is there is no need to linearize the nonlinear problems and more suitable results are obtained than the other two filters with non-Gaussian noise. Investigations show, when in a part of estimating the UKF is best and in the other part the UH<sub>∞</sub>F, the hybrid filter can give better results. The variance analysis indicated that the filter is robust to statistical noises and a proper response can be found by changing its variable. Validation of results is performed by simulation of two nonlinear problems, free falling and inverted pendulum in mechanical engineering.

### 1- مقدمه

صنعتی معمول در دهه 1970 میلادی شد. این تلاش‌ها به‌سرعت مشخص کرد که یک دسته عدم تطابق بین فرضیات فیلتر کالمن و مسائل تخمین حالت در صنعت وجود دارد. در واقع برای مسائل صنعتی مدل دقیق سیستم به‌راحتی در دسترس نمی‌باشد. این امر منجر به ظهور فیلتر H<sub>∞</sub> شد، که هدف اصلی آن حداقل نمودن خطای تخمین در بدترین حالت ممکن برای

طی نیم قرن گذشته، الگوریتم‌های احتمالاتی پیچیده‌ای برای تخمین مقادیر حقیقی کمیت‌های فیزیکی که اصطلاحاً متغیرهای حالت سیستم نامیده می‌شوند، توسعه پیدا کرده‌اند. موفقیت‌های اولیه فیلتر کالمن در دهه 1960 میلادی در کارهای فضایی منجر به تلاش در به‌کارگیری آن در کاربردهای

Please cite this article using:

M. Tehrani, N. Narimanzadeh, M. Masoumnezhad, The hybrid unscented/H<sub>∞</sub> Kalman filter in state estimation of nonlinear problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 315-321, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

اچ بینهایت بی‌رد (UH<sub>∞</sub>F) در ابتدا فیلتر UKF ارائه می‌شود [9] و سپس تغییرات لازم برای فیلتر UH<sub>∞</sub>F بیان می‌شود.

معادلات غیرخطی زمان گسسته یک سیستم دینامیکی را می‌توان به صورت معادلات (1) و (2) توصیف نمود.

$$x_{k+1} = f(x_k, t) + w_k \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k, t) + v_k \quad (2)$$

به طوری که  $x_k \in R$  بردار متغیرهای حالت سیستم و  $y_k \in R$  بردار اندازه می‌باشند.  $f$  و  $g$  به ترتیب تابع دینامیک سیستم و تابع مشاهده می‌باشند. نویز فرایند  $w$  و نویز اندازه گیری  $v$  از نوع انرژی محدود می‌باشند. اگر فرض شود که تخمین حالت  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  و کواریانس همراه آن  $P_{k-1|k-1}$  در زمان  $k-1$  باشد فیلتر بی‌رد از معادلات (3) الی (16) استنتاج می‌شود:

در ابتدا، یک دسته نقاط سیگما بر پایه تخمین حالت در زمان  $k-1$

تولید می‌شود:

$$x_{k-1|k-1}^0 = \hat{x}_{k-1|k-1}, \omega^0 = \frac{\kappa}{n + \kappa} \quad (3)$$

$$x_{k-1|k-1}^s = \hat{x}_{k-1|k-1} + \left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_s \quad (4)$$

$$\omega^s = \frac{\kappa}{2(n + \kappa)}, s = 1 \dots n \quad (5)$$

$$x_{k-1|k-1}^s = \hat{x}_{k-1|k-1} - \left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_s \quad (6)$$

$$\omega^s = \frac{\kappa}{2(n + \kappa)}, s = n + 1 \dots 2n \quad (7)$$

در حالی که  $\kappa \in R$  ضریب مقیاس بوده و  $\left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_s$   $S$  آمین ردیف یا ستون از ریشه دوم ماتریس  $(n + \kappa) P_{k-1|k-1}$  می باشد.  $\omega^s$  وزن نرمال  $S$  آمین نقطه سیگما می‌باشد. توجه شود که تجزیه چولسکی<sup>7</sup> برای محاسبه ریشه دوم ماتریس مورد نیاز است.

میانگین و کواریانس پیش بینی شده به کمک ابزار انتقال بی‌رد<sup>8</sup> قابل حصول است [9]:

$$x_{k|k-1}^s = f(x_{k-1|k-1}^s) \quad (8)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s x_{k|k-1}^s \quad (9)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [x_{k|k-1}^s - \hat{x}_{k|k-1}] [x_{k|k-1}^s - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q \quad (10)$$

به همین شکل ماتریس کواریانس پیش‌بینی شده اندازه‌گیری و کواریانس متقاطع اندازه‌گیری-حالت به ترتیب به صورت عبارت‌های (11) و (12) حاصل می‌گردد:

$$P_{k|k-1}^{yy} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [h(x_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}] [h(x_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}]^T \quad (11)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [x_{k|k-1}^s - \hat{x}_{k|k-1}] [h(x_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}]^T \quad (12)$$

و نیز:

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s \hat{y}_{k|k-1} \quad (13)$$

یک سیستم دینامیکی زمان گسسته می‌باشد [1].

در بسیاری از مسائل، برخی از سیگنال‌های نویز، فرضیه فیلتر  $H_2$  (کالمن) را ارضا کرده، در حالی که برخی دیگر توسط انرژی سیگنال کران دار یعنی  $H_\infty$  به خوبی مدل می‌شوند. این مشکل را می‌توان تا حدی با توجه به فیلتر مرکب  $H_2/H_\infty$  حل کرد [2].

بعد از ظهور فیلتر اچ بینهایت و به فاصله چند سال خارگنکار<sup>1</sup> و همکارش در سال 1992 فیلتر مرکب کالمن/اچ بینهایت را برای سیستم‌های دینامیکی خطی معرفی نمودند [3]. وی در مقاله خود با بررسی نرم  $H_2$  و  $H_\infty$  و ارائه یک شرط بهینه که هر دو نرم را توأمأ ارضاء کند، فیلتر مرکب را ارائه نموده است. فرایند انجام شده توسط وی در حوزه خطی قرار دارد و منجر به حل معادله ریکاتی می‌شود که با افزایش تعداد حالات و پیچیدگی، حل آن مشکل می‌شود.

سیمن یک روش ابتکاری به منظور بهره‌مندی از خواص هر دو فیلتر ارائه کرد که عبارت است از ترکیب خطی دو بهره پایدار<sup>2</sup> فیلتر کالمن و  $H_\infty$  [4]. وی همچنین بر پایه بهره پایدار فیلتر کالمن و اچ بینهایت فیلتر ترکیبی ارائه کرده است که بهره آن بر اساس حل یک معادله ریکاتی ترکیبی از دو فیلتر می‌باشد. اما حل این معادله مشکل و پیچیده می‌باشد [5].

در سال 2014 لیانگ و همکارانش به بررسی و مقایسه یک فیلتر ترکیبی با دیگر فیلترها در کنترل بازوی رباتیک در عمل قلب پرداختند و نشان دادند که دو خاصیت مهم این نوع فیلترها یعنی کاهش خطا و کاهش بدترین حالت، می‌تواند بسیار کارآمد باشد [6].

معصوم نژاد و همکاران حل مسئله تخمین نویز رنگی به کمک فیلتر دوگانه را در مقاله خود ارائه نمودند. بهینه‌سازی چند هدفه در تعیین حد نرم فیلتر  $H_\infty$  از ویژگی‌های این کار می‌باشد که منجر به طراحی غیر برخط فیلتر ترکیبی می‌گردد. همچنین فیلتر ارائه شده در زمینه خطی می‌باشد [7].

هیو در سال 2015 فیلتر دوگانه EKF<sup>3</sup> و EH<sub>∞</sub><sup>4</sup> را به شکل ترکیب خطی خروجی دو فیلتر ارائه نموده و اثر ترکیبی بهره‌ها بر خلاف کارهای قبلی در نظر گرفته نشده است [8].

با توجه به بررسی‌های انجام شده ترکیبات دو فیلتر کالمن و  $H_\infty$  اکثراً در حوزه خطی ارائه شده یا منجر به خطی سازی مسئله غیرخطی شده است. همچنین ارائه این فیلترها معمولاً به همراه حل یک معادله ریکاتی بوده است که با افزایش تعداد متغیرهای حالت، حل آن مشکل و پیچیده می‌شود [5]. در این مقاله برای اولین بار ترکیب دو فیلتر غیرخطی کالمن بی‌رد (UKF) و اچ بینهایت بی‌رد (UH<sub>∞</sub>F) ارائه می‌شود. این فیلتر دوگانه در مواجهه با مسئله غیرخطی نیاز به خطی سازی ندارد؛ بعلاوه اجرای آن منجر به حل معادله ریکاتی نمی‌شود. اساس کار ترکیب دو فیلتر بر اساس مقاله سیمن [4] و توسعه آن به ترکیب بهره دو فیلتر، تخمین پیشین<sup>5</sup> حالت و تخمین پیشین اندازه<sup>6</sup> در هر مرحله زمانی می‌باشد. باید توجه داشت که در مقالات، این نوع ترکیبات ارائه نشده‌اند یا به ترکیب بهره پایدار دو فیلتر بدون تغییر در هر مرحله زمانی اکتفا شده است [4,5,7].

## 2- فیلتر کالمن بی‌رد

با توجه به شباهت معادله‌های دو فیلتر کالمن بی‌رد (UKF) و فیلتر

<sup>1</sup> Khargonkar

<sup>2</sup> Steady state gain

<sup>3</sup> Extended Kalman Filter

<sup>4</sup> Extended H<sub>∞</sub> Kalman Filter

<sup>5</sup> The a priori state estimation

<sup>6</sup> The a priori measurement estimation

<sup>7</sup> Cholesky decomposition

<sup>8</sup> Unscented Transform

کواریانس نویز به‌عنوان  $Q$  و  $R$  انتخاب می‌شوند. همچنین زمانی که  $\infty \rightarrow \gamma$  فیلتر اچ بینهایت به سمت فیلتر بی‌رد کالمن میل پیدا می‌کند.

تنها تفاوت معادلات استخراج تخمین حالت فیلتر بی‌رد اچ بینهایت با فیلتر بی‌رد کالمن در مورد تخمین کواریانس خطا یعنی معادله (15) می‌باشد. تخمین کواریانس فیلتر بی‌رد اچ بینهایت عبارت است از:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - [P_{k|k-1}^{xy} \quad P_{k|k-1}] R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{xy} \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

در معادله (23)،  $R_{e,k}$  می‌شود:

$$R_{e,k} = \begin{bmatrix} R + P_{k|k-1}^{yy} & [P_{k|k-1}^{xy}]^T \\ P_{k|k-1}^{xy} & -\gamma^2 I + P_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

در واقع با استفاده از معادله (23) به‌جای معادله (15)، معادلات فیلتر UKF به  $UH_{\infty}F$  تبدیل می‌شود.

باید توجه شود که به‌منظور تضمین مثبت بودن  $P_{k|k}$  وجود فیلتر  $H_{\infty}$  مقدار  $\gamma$  باید به‌دقت تنظیم شود. لی در مقاله [10] خود روشی برای تنظیم مقدار  $\gamma$  به شکلی که در هر تکرار کمترین مقدار را کسب کند ارائه نموده است. وی عبارت (25) را برای این مقدار استخراج کرده است. در معادله (25)،  $\alpha$  یک مقدار ثابت بزرگ‌تر از یک و عبارت eig به مفهوم مقدار ویژه می‌باشد.

$$\gamma_k^2 = \alpha \times \max \{ \text{eig}(P_{k|k-1}^{-1} + P_{k|k-1}^{-1} P_{k|k-1}^{xy} R^{-1} [P_{k|k-1}^{-1} \quad P_{k|k-1}^{xy}]^T)^{-1} \} \quad (25)$$

#### 4- فیلتر دوگانه بی‌رد/اچ بینهایت<sup>۴</sup> HU/H<sub>∞</sub>KF

با توجه به تحقیقات انجام شده و بررسی‌های صورت گرفته، فیلترهای دوگانه غیرخطی تا کنون کمتر ارائه شده‌اند و بیشترین کارهای انجام شده به روی ترکیب فیلتر EKF و  $H_{\infty}$  بوده است. با توجه به ارائه فیلتر  $UH_{\infty}F$  در سال 2010 [10]، ارائه فیلتر ترکیبی از دو فیلتر UKF و  $UH_{\infty}F$  می‌تواند در تحلیل مسائل با درجه غیرخطی بالا و باوجود عدم شناسایی ساختار آماری نویز کارآمد باشد. ترکیب دو فیلتر کالمن بی‌رد و فیلتر کالمن بی‌رد اچ بینهایت تحت عنوان فیلتر دوگانه بی‌رد کالمن/اچ بینهایت یا به‌اختصار  $HU/H_{\infty}KF$  نام‌گذاری می‌گردد. در ادامه مدل ترکیبی دو فیلتر ارائه می‌شود.

معادله تخمین گر جدید به شکل معادله (26) معرفی می‌شود.

$$x_{k+1}^+ = x_k^{-\text{Hybrid}} + K_k^{\text{Hybrid}} (y_k - y_k^{-\text{Hybrid}}) \quad (26)$$

مقادیر دوگانه یا دارای بالانویس Hybrid در معادله (26) به شکل معادله‌های (27) تا (29) ارائه شده‌اند.

$$K_k^{\text{Hybrid}} = dK_k^{\text{UKF}} + (1-d)K_k^{\text{H}_{\infty}} \quad (27)$$

$$x_k^{-\text{Hybrid}} = dx_k^{-\text{UKF}} + (1-d)x_k^{-\text{H}_{\infty}} \quad (28)$$

$$y_k^{-\text{Hybrid}} = dy_k^{-\text{UKF}} + (1-d)y_k^{-\text{H}_{\infty}} \quad (29)$$

در این معادله‌ها بالانویس UKF- به معنای مقادیر تخمین پیشین حاصل از فیلتر بی‌رد و بالانویس  $H_{\infty}$ - به معنای مقادیر تخمین پیشین حاصل از فیلتر اچ بینهایت می‌باشد. همچنین  $K$  با بالانویس UKF و  $H_{\infty}$  به ترتیب مقادیر بهره حاصل از دو فیلتر نامبرده می‌باشند و  $d$  یک ثابت عددی بوده که وزن هر فیلتر را مشخص می‌کند. این وزن مقداری در بازه  $[0,1]$  دارد و زمانی که برابر 1 انتخاب شود پاسخ منطبق بر تخمین حاصل از فیلتر بی‌رد و هنگامی که برابر 0 در نظر گرفته شود پاسخ منطبق بر تخمین حاصل از

در نهایت تخمین فیلتر شده به همراه کواریانس خطای آن حاصل می‌شود:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}^{xy} (R + P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (14)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{k|k-1}^{yy} (K_k)^T \quad (15)$$

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy} + R)^{-1} \quad (16)$$

#### 3- فیلتر اچ بینهایت بی‌رد

این فیلتر اولین بار توسط لی ارائه [10] و به‌طور هم‌زمان با نام فیلتر نقاط سیگما اچ بینهایت<sup>۱</sup> توسط وانگ [11] به‌منظور تخمین و رصد مدل زیر دریایی ارائه و استفاده شد. هر دو محقق نشان دادند که استفاده از این فیلتر در زمانی که نویز ماهیت غیرگوسی دارد خطای کمتری از فیلتر UKF ارائه می‌دهد.

بر اساس مرجع [10] و مشابه با بخش قبل اگر معادلات زمان گسسته یک سیستم دینامیکی به شکل معادلات (17) تا (19) بیان شود:

$$x_{k+1} = f(x_k, t) + w_k \quad (17)$$

$$y_k = h(x_k, t) + v_k \quad (18)$$

$$z_k = L_k x_k \quad (19)$$

به شکلی که  $z_k$  سیگنال تخمین زده شده و  $L_k$  یک ماتریس معلوم است، به‌ویژه اگر تنها تخمین حالت مد نظر باشد،  $L_k = I$  است به‌طوری که  $I$  یک ماتریس واحد با ابعاد مناسب است.

اگر فرض شود که  $\hat{z}_{k|k} = \mathcal{F}\{Y^k\}$  تخمینی از  $z_k$  با مقدار اندازه‌گیری شده  $Y^k = \{y_j\}_{j=0}^k$  باشد آنگاه مقدار تابع خطای تخمین به‌صورت معادله (20) تعریف می‌گردد.

$$e_k = \hat{z}_{k|k} - z_k = \hat{z}_{k|k} - L_k x_k \quad (20)$$

اگر فرض شود که  $T_k(\mathcal{F})$  عامل انتقالی است که اغتشاشات ناشناخته  $\{w_j\}_{j=0}^k, \{v_j\}_{j=0}^k$  را به خطای تخمین  $\{e_j\}_{j=0}^k$  نگاشت می‌کند آنگاه هدف فیلتر بهینه اچ بینهایت انتخاب استراتژی  $\mathcal{F}$  است به شکلی که نرم اچ بینهایت عامل  $T_k(\mathcal{F})$  را کمینه کند. همچنین نرم اچ بینهایت یک عامل انتقالی  $T$ ، به‌صورت معادله (21) تعریف می‌شود.

$$\|T\|_{\infty} = \sup_{u \in \ell_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2} \quad (21)$$

با فرض اینکه  $u$  محدود می‌باشد. حل بسته<sup>۲</sup> فیلتر اچ بینهایت تنها در نمونه‌های مشخصی وجود دارد، از این رو یک حل کمتر بهینه<sup>۳</sup> که حداکثر بهره انرژی را از اغتشاش خطای تخمین محدود می‌کند مد نظر قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، هدف فیلتر کمتر بهینه  $H_{\infty}$  یافتن استراتژی‌های تخمین  $\hat{z}_{k|k} = \mathcal{F}\{Y^k\}$  به شکلی است که نرم اچ بینهایت  $T_k(\mathcal{F})$  عبارت (22) را ارضاء کند.

$$\|T_k(\mathcal{F})\|_{\infty} = \sup_{x_0, w, v \in \ell_2} \frac{\sum_{j=0}^k \|e_j\|_2^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^k \|w_j\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^k \|v_j\|_{R^{-1}}^2} < \gamma^2 \quad (22)$$

در معادله (22)،  $\gamma$  یک ثابت عددی می‌باشد و علامت  $\|a\|_W^2$  یعنی مربع نرم  $l_2$  از  $a$  به عبارت دیگر  $\|a\|_W^2 = a^T W a$  است.  $R > 0$  و  $Q > 0$  ماتریس‌های وزنی بوده که انتخاب آن برای تنظیم کارایی به طراح واگذار می‌شود. در دستگاه‌های عملی، همان ماتریس

<sup>1</sup> Sigma Point H-infinity Filter

<sup>2</sup> Closed-form

<sup>3</sup> Suboptimal

<sup>4</sup> Hybrid Unscented/  $H_{\infty}$  Kalman Filter

نظر گرفته می‌شود (به شکل مرسوم این مقدار برابر صفر در نظر گرفته می‌شود). مقدار زیاد نویز باعث ناپایداری معادله می‌شود. بنابراین فرض شود که  $Q = \text{diag}[0.01 \ 0.01 \ 10^{-7}]$  کوارینانس نویز گوسی فرایند و  $R = 10,000$  کوارینانس نویز گوسی اندازه گیری باشد.

برای بررسی از نمودار میانگین مربعات خطا در هر بازه زمانی که در معادله (34) تعریف شده است استفاده می‌شود.

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{m \times n} \left( (X_i - \hat{X}_i)(X_i - \hat{X}_i)^T \right), i = 1 \dots N \quad (34)$$

در معادله (34)،  $i$  مرحله پیشرفت زمانی،  $m$  تعداد اجرای فیلتر به ازای دسته نویزهای مختلف،  $n$  تعداد حالت،  $X_i$  بردار حالت و  $\hat{X}_i$  بردار تخمین حالت  $i$  امین مرحله زمانی می‌باشد.

در شکل 2 مقایسه خطا به ازای 200 دسته نویز مختلف آورده شده است. بعد از بررسی انجام شده در مورد فیلتر دوگانه وزن فیلتر بی‌رد  $d = 0.5$  انتخاب می‌شود.

در جدول 1 مقادیر میانگین و واریانس خطای سه فیلتر به ازای 200 دسته نویز مختلف گوسی آورده شده است. با توجه به شکل 1 و جدول 1 مشاهده می‌گردد به شکل کاملاً مشخص تخمین فیلتر UKF از دو فیلتر دیگر بهتر است. لیکن فیلتر دوگانه تخمینی نزدیک‌تر به این فیلتر ارائه نموده است و می‌تواند جایگزین مناسبی برای آن باشد.

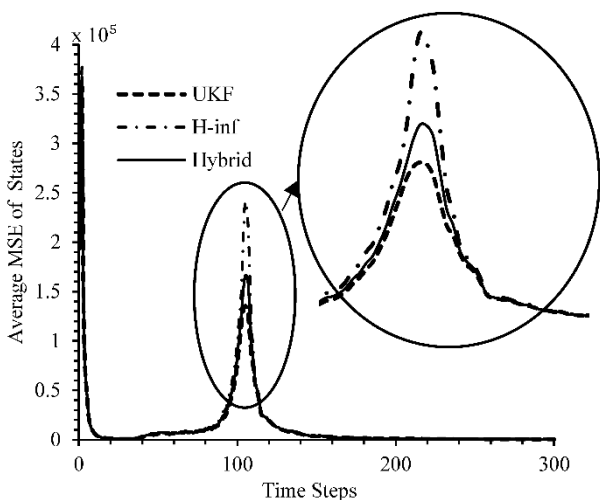


Fig.2 Comparison of states estimation error in falling problem for UKF,  $U_{H_\infty}F$  and Hybrid in  $d = 0.5$  with Gaussian noise

شکل 2 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله سقوط آزاد سه فیلتر بی‌رد، اچ بینهایت و دوگانه در  $d = 0.5$  با وجود نویز گوسی

جدول 1 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین متغیرهای حالت حاصل از سه فیلتر UKF،  $U_{H_\infty}F$  و Hybrid

Table 1 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF,  $U_{H_\infty}F$  and Hybrid

واریانس خطا	میانگین خطا	روش تخمین
1.24E09	1.30E+04	Hybrid
1.05E09	1.20E+04	UKF
1.70E09	1.51E+04	$U_{H_\infty}F$

فیلتر اچ بینهایت ارائه می‌دهد. با جایگذاری معادله‌های (27) تا (29) در معادله (26) تخمین فیلتر دوگانه حاصل می‌شود. شکل 1 تصویر مناسبی از الگوریتم مورد نظر ارائه می‌دهد.

به عبارت دیگر با تعیین یک وزن مناسب توسط طراح و با توجه به مسئله مورد بررسی می‌توان از بخشی از خواص دو فیلتر UKF و  $H_\infty$  به شکل مشترک بهره برد. در ادامه نشان داده خواهد شد که با استفاده از مقدار وزن مناسب خطای فیلتر دوگانه می‌تواند کمتر از دو فیلتر دیگر نیز شود.

## 5- مسئله سقوط آزاد

فرض کنید که هدف تخمین متغیرهای حالت ارتفاع  $x_1$ ، سرعت  $x_2$  و ضریب بالستیک  $x_3$  جسمی که به سمت زمین سقوط می‌کند، است. یک وسیله اندازه‌گیری که در ارتفاع  $a$  و در فاصله افقی  $M$  از جسم واقع شده فاصله خود را تا جسم اندازه می‌گیرد (معادله (33)). معادلات این سیستم عبارت‌اند از [12]:

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1 \quad (30)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_0 \exp(-x_1/D) x_2^2 x_3}{2} - g + w_2 \quad (31)$$

$$\dot{x}_3 = w_3 \quad (32)$$

$$y(t_k) = \sqrt{(M^2 + (x_1^2(t_k) - a^2)^2 + v_k} \quad (33)$$

به شکل مرسوم  $w_i$  نویز  $i$  امین معادله فرایند و  $v$  نویز اندازه‌گیری است.  $\rho_0$  چگالی هوا در سطح دریا،  $D$  یک ثابت تعریف‌کننده رابطه بین چگالی هوا و ارتفاع بوده و  $g$  شتاب گرانش می‌باشد. ثابت‌های استفاده شده عبارت‌اند از:

$$\rho_0 = 2 \frac{\text{lb. sec}}{\text{ft}^4} \quad g = 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \quad D = 20,000 \text{ ft}$$

$$M = 100,000 \text{ ft} \quad a = 100,000 \text{ ft}$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از:

$$x_0 = [300,000 \ 20,000 \ 0.001]^T \quad \hat{x}_0^+ = x_0$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 1,000,000 & 0 & 0 \\ 0 & 4,000,000 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

برای شبیه سازی سیستم و فیلترها از انتگرال مستطیلی با ثابت زمانی 0.1 ثانیه استفاده شده است. این مسئله در دو بخش نویز گوسی و غیرگوسی ارائه می‌شود.

باید توجه داشت که به دلیل کم بودن ضریب بالستیک (0.001) و رعایت نسبت نویز به سیگنال مقدار کمی برای نویز حالت سوم در

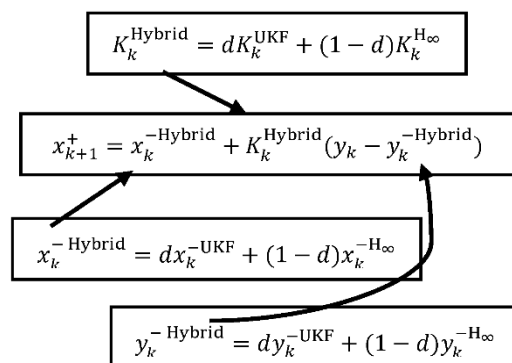


Fig.1 The algorithm of  $HU/H_\infty KF$

شکل 1 الگوریتم فیلتر  $HU/H_\infty KF$

جدول 2 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فیلتر UKF,  $UH_{\infty}F$  و Hybrid

Table 2 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF,  $UH_{\infty}F$  and Hybrid

روش تخمین	میانگین	واریانس
Hybrid	1.00E+05	2.21E+10
UKF	2.65E+05	6.09E+10
$UH_{\infty}F$	7.42E+04	1.38E+10

بحث در مورد آن پرداخته می‌شود.

یک پاندول معکوس روی گاری می‌تواند به شکل معادله‌های (35) و (36) مدل شود [5]:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin \theta (M + m) - mL \cos \theta (u + mL \dot{\theta} \sin \theta - B \dot{x})}{(J + mL^2)(M + m) - m^2 L^2 \cos^2 \theta} \quad (35)$$

$$\ddot{x} = \frac{u - mL \dot{\theta} \cos \theta + m \dot{\theta}^2 \sin \theta - B \dot{x}}{M + m} \quad (36)$$

$$u = 40\theta \quad (37)$$

در معادله‌های (35)، (36) و (37)،  $B$  ضریب اصطکاک بین گاری و زمین،  $L$  طول آونگ،  $g$  شتاب گرانش زمین،  $J$  ممان اینرسی،  $x$  جابجایی گاری،  $m$  جرم آونگ،  $M$  جرم گاری،  $u$  نیروی خارجی اعمالی به گاری،  $\theta$  زاویه پاندول از حالت قائم می‌باشند.

مقادیر متغیرهای استفاده شده عبارتند از:

$$\begin{aligned} m &= 0.2 \text{ kg} & B &= 0.1 \text{ N/(m/s)} \\ M &= 1 \text{ kg} & L &= 1 \text{ m} \\ & & g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

بردار متغیرهای حالت سیستم دینامیکی موقعیت، سرعت گاری، زاویه و سرعت زاویه‌ای آونگ و وارون یعنی  $X = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$  و بردار مشاهده شامل موقعیت و زاویه آونگ و وارون یعنی  $Y = [x, \theta]$  می‌باشند. کواریانس نویز فرایند  $Q = \text{diag}\{0, 0.0004, 0, 0.0004\}$  و نویز اندازه‌گیری  $R = \text{diag}\{0.1, 0.1\}$  می‌باشند. معادلات با دوره زمانی 0.01 ثانیه گسسته سازی و شبیه‌سازی می‌شوند. همچنین نویز غیرگوسی یکنواخت  $S = [0.075]$  به نویزهای گوسی فرایند اضافه می‌شود. شرایط اولیه به شکل  $[0.1, 0, 0.7, 0]$  در نظر گرفته شده و ممان اینرسی  $J$  گوی آونگ  $m \times 0.02^2$  فرض می‌شود [5].

اگر فرض شود که نویز وارد شده به مسئله کاملاً گوسی باشد و اثری از نویز یکنواخت وجود نداشته باشد، نمودار خطای سه فیلتر مورد نظر در این مقاله با توجه به وزن فیلتر بی‌رد  $d = 0.6$  مانند شکل 4 می‌شود. در این شکل فیلتر UKF بی‌شک بهترین پاسخ را ارائه نموده است، با این وجود فیلتر  $HU/H_{\infty}KF$  پاسخی درخور و نزدیک‌تر به آن ارائه نموده است. همچنین فیلتر  $UH_{\infty}F$  مانند یک پوش بالادستی عمل کرده و اجازه خطای بیشتری در تخمین خود ارائه نموده است. همچنین با توجه به شکل 4 می‌توان انتظار داشت که مقدار بهینه وزن فیلتر دوگانه  $d = 1$  شود، زیرا در تمام مدت خطای فیلتر بی‌رد کمتر از دو فیلتر دیگر می‌باشد.

در جدول 3 میانگین و خطای سه فیلتر در حضور نویز گوسی آورده شده است. با دقت در مقادیر جدول 3 مشاهده می‌گردد مانند مثال قبل یعنی جرم در حال سقوط آزاد، فیلتر UKF از مقادیر میانگین و واریانس کمتری نسبت به دو فیلتر دیگر مورد بررسی در این مقاله برخوردار است. همچنین فیلتر دوگانه پیشنهادی بعد از آن در مرتبه دوم قرار گرفته است. میانگین خطای فیلتر دوگانه حدود 2 برابر فیلتر کالمن بی‌رد است در حالی که خطای فیلتر

در ادامه علاوه بر نویز گوسی، نویز غیرگوسی یکنواخت با شرایط  $s_1 = [0.01]$  و  $s_2 = [0.01]$  و  $s_3 = [0.001]$  به ترتیب به معادلات (30) الی (32) اضافه می‌گردد، در این صورت خطای سه فیلتر به ازای 200 دسته نویز مختلف غیرگوسی مشابه با شکل 3 حاصل می‌شود.

در جدول 2 مقادیر میانگین و واریانس خطای سه فیلتر به ازای نویز غیرگوسی آورده شده است. با توجه به شکل 3 و جدول 2 تخمین فیلتر  $UH_{\infty}F$  از دو فیلتر دیگر بهتر است. همچنین مانند نویز گوسی فیلتر دوگانه تخمینی نزدیک‌تر به این فیلتر ارائه نموده است. نکته مهم دیگر مقادیر واریانس می‌باشد. واریانس فیلتر UKF تقریباً 4 برابر فیلتر  $UH_{\infty}F$  و 2.75 برابر فیلتر  $HU/H_{\infty}KF$  می‌باشد. این مسئله به کارگیری فیلتر UKF را با در شرایط وجود نویز غیرگوسی دچار تردید می‌کند. این مسئله در 100 مرحله زمانی پایانی شکل 3 نیز واضح است.

شاید در ابتدا با توجه به شکل‌های 2 و 3 مزیتی در فیلتر دوگانه نسبت به دو فیلتر دیگر مشاهده نشود. اما اگر فرض شود که هیچ شناختی نسبت به نویز سیستم وجود نداشته باشد، و درجه اختلاط گوسی و غیرگوسی آن مشخص نباشد، آنگاه از میان سه فیلتر فوق، فیلتری مطمئن‌تر است که در هر دو صورت خطای قابل قبولی ارائه دهد.

شکل‌های 2 و 3 به همراه جدول‌های 1 و 2 نشان می‌دهند که در هر دو مورد نویز گوسی و غیرگوسی، فیلتر دوگانه مطمئناً جوابی بین دو فیلتر و نزدیک به فیلتر با خطای کمتر ارائه می‌دهد. در واقع این یک مزیت و برتری به شمار می‌رود. همچنین این فیلتر دارای یک متغیر تنظیم ساده (وزن فیلتر  $d$ ) می‌باشد که به طراح امکان نزدیکی به شرایط مطلوب را می‌دهد.

## 6- مسئله آونگ وارون

یکی از مسائل مهم در کاربرد فیلتر دوگانه برای مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا می‌باشد، تعیین ضریب وزنی فیلتر تطبیقی پیشنهادی در این مقاله یعنی متغیر  $d$  می‌باشد. برای دستیابی به یک مقدار مصالحه بهینه می‌توان از یکی از روش‌های بهینه‌سازی به صورت غیر برخط بهره برد و سپس مقدار متغیر طراحی بهینه را به صورت برخط استفاده نمود. در این مقاله از الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک جهت نیل به این هدف استفاده شده است. در ابتدا شرایط مسئله مورد بحث بیان شده و در ادامه به

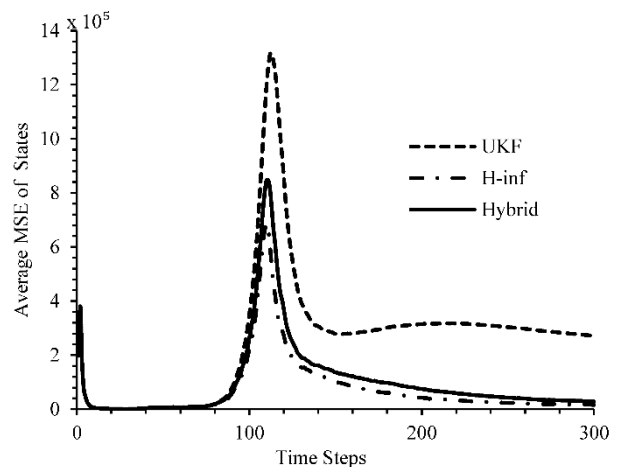


Fig.3 Comparison of states estimation error in falling problem for UKF,  $H_{\infty}$  and Hybrid in  $d = 0.5$  with non-Gaussian noise

شکل 3 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله سقوط آزاد سه فیلتر بی‌رد، اچ بینهایت و دوگانه در  $d = 0.5$  با وجود نویز غیرگوسی

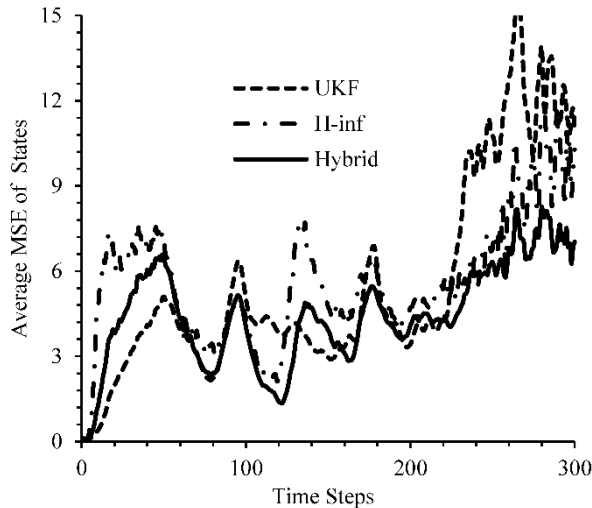


Fig. 5 Comparison of states estimation error in inverse pendulum problem for UKF,  $UH_{\infty}F$  and Hybrid filters in  $d = 0.7271$  with non-Gaussian noise

شکل 5 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله آونگ وارون سه فیلتر بی‌رد، اچ-بینهایت و دوگانه در  $d = 0.7271$  با وجود نویز غیرگوسی

می‌شود.

در جدول 4 نیز مقادیر میانگین و واریانس سه فیلتر آورده شده است. همان‌طور که از شکل 5 انتظار می‌رفت، مقدار میانگین و خطای فیلتر دوگانه از دو فیلتر دیگر بهتر شده است. نکته بسیار مهمی که در جدول 4 مشاهده می‌گردد این موضوع است که واریانس تقریباً 4 برابری فیلتر UKF نسبت به فیلتر  $UH_{\infty}F$  و 2.7 برابری آن نسبت به فیلتر  $UH_{\infty}F$  می‌باشد. این اختلاف قابل ملاحظه، عدم کارایی فیلتر UKF در شرایطی که نویز سیستم غیرگوسی می‌باشد را نشان می‌دهد.

با توجه به موارد ذکر شده می‌توان بیان نمود، در شرایط وجود نویز گوسی فیلتر UKF دارای بهترین تخمین و در حضور نویز غیرگوسی فیلتر  $UH_{\infty}F$  بهترین تخمین را ارائه می‌دهد. شرایط بهینه‌سازی ضریب وزنی فیلتر ( $d$ ) در شرایط وجود نویز گوسی به سمت 1 و در شرایط وجود نویز غیرگوسی به سمت 0 میل می‌کند. در واقع عدم استفاده از بهینه‌سازی مشکلی در به کارگیری فیلتر در مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا نمی‌باشد ایجاد نمی‌کند و انتخاب دلخواه وزن  $d$  جوابی بین دو فیلتر کالمن بی‌رد و بی‌رد اچ-بینهایت ارائه می‌کند که با تنظیم آن علاوه بر نزدیک شدن به مقادیر بهینه به صورت برخط می‌توان از مقاومت آن در برابر نویز ناشناخته نیز بهره برد. از طرف دیگر بهینه بودن ضریب وزنی همان‌طور که در مثال آونگ وارون نشان داده شد، می‌تواند منجر به عملکرد بهتر فیلتر پیشنهادی گردد لذا پیشنهاد می‌گردد در مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا می‌باشد از فیلتر پیشنهادی با ضریب وزنی بهینه که به صورت غیر برخط حاصل شده، بهره گرفته شود.

جدول 4 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فیلتر UKF،  $UH_{\infty}F$  و Hybrid

روش تخمین	میانگین	واریانس
Hybrid	4.4710	3.0284
UKF	5.5752	12.9465
$UH_{\infty}F$	5.5989	4.7453

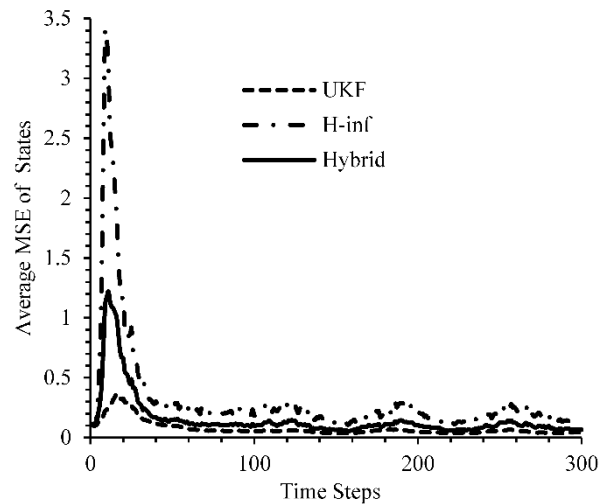


Fig. 4 Comparison of states estimation error in inverse pendulum problem for UKF,  $UH_{\infty}F$  and Hybrid filters in  $d = 0.6$  with Gaussian noise

شکل 4 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله آونگ وارون سه فیلتر بی‌رد، اچ-بینهایت و دوگانه در  $d = 0.6$  با وجود نویز گوسی

جدول 3 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فیلتر UKF،  $UH_{\infty}F$  و Hybrid

Table 3 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF,  $UH_{\infty}F$  and Hybrid

روش تخمین	میانگین	واریانس
Hybrid	0.1539	0.0368
UKF	0.0746	0.004
$UH_{\infty}F$	0.3162	0.2068

بی‌رد اچ-بینهایت 3.2 برابر فیلتر کالمن بی‌رد می‌باشد.

در ادامه علاوه بر نویز گوسی یک نویز غیرگوسی به مسئله وارد می‌شود و متغیر  $d$  بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک با تابع هزینه میانگین کمترین خطای تخمین نشان داده شده در معادله (38) تعیین می‌شود. از 10 دسته نویز مختلف و زمان گسسته سازی 300 در این معادله استفاده می‌شود:

$$Cost = \frac{1}{10 \cdot 4 \cdot 300} \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{300} \left( (X_i - \hat{X}_i)(X_i - \hat{X}_i)^T \right) \quad (38)$$

پارامترهای الگوریتم ژنتیک به کار رفته عبارت‌اند از:

تعداد جمعیت برابر 30، تعداد نسل برابر 200 نسل، ضریب عملگر پیوند و جهش به ترتیب 0.8 و 0.05 انتخاب شده‌اند. همچنین عملیات نخبه‌گرایی بر اساس انتخاب مسابقه‌ای می‌باشد. بازه جستجوی متغیر  $d \in [0 \ 1]$  همچنین ضریب باند انرژی فیلتر  $UH_{\infty}F$ ،  $\alpha = 3$  در نظر گرفته شده است. نتیجه بهینه‌سازی برابر با  $d = 0.7271$  حاصل شد. این بهینه‌سازی بر اساس 10 دسته نویز مختلف می‌باشد.

در شکل 5 از 200 دسته نویز مختلف استفاده شده است و با توجه به اینکه بهینه‌سازی بر اساس تنها 10 دسته نویز انجام شده بود، به‌نوعی بهینه سازی انجام شده مستقل از نویز بوده و با تغییر آن ماهیت خود را حفظ کرده است.

یک تفاوت ماهیتی در شکل 5، بر خلاف شکل‌های 2، 3 و 4 این است که هیچ کدام از دو فیلتر UKF و  $UH_{\infty}F$  بر دیگری برتری کامل ندارد. بر این اساس فیلتر دوگانه در بخش ابتدایی، تخمینی بین دو فیلتر ارائه می‌دهد و با افزایش زمان شبیه سازی تخمین فیلتر دوگانه از دو فیلتر دیگر بهتر نیز

## 7- جمع بندی

در این مقاله یک رهیافت جدید مبتنی بر ترکیب دو فیلتر غیرخطی UKF و  $H_\infty$  برای تخمین مسائل غیرخطی ارائه شده است. فیلتر مذکور نیاز به خطی‌سازی نداشته و با استفاده از ترکیب پارامترهای تخمین پیشین حالت، تخمین پیشین اندازه و بهره دو فیلتر، تخمین خود را انجام می‌دهد. همچنین فیلتر دوگانه ارائه شده نیازی به حل معادله ریکاتی ندارد. فیلتر دوگانه بی‌رد کالمن/اچ بینهایت یا به اختصار  $HU/H_\infty KF$  در تخمین دو مسئله غیرخطی سقوط آزاد و آونگ وارون به کار برده شده است. بر این اساس در هر دو مسئله نشان داده شد که فیلتر دوگانه با فرض عدم شناخت نوع نویز گوسی یا غیرگوسی پاسخ مطمئن‌تری ارائه می‌دهد و در شرایطی که در بخشی از تخمین خطای یکی از فیلترهای بی‌رد یا اچ بینهایت از دیگری کمتر است، می‌توان با تعیین وزن مناسب فیلتر دوگانه به تخمینی با خطای کمتر نیز نائل شد. این مورد در مسئله پاندول معکوس با وجود نویز غیرگوسی نشان داده شده است. در این مسئله وزن مناسب به کمک الگوریتم بهینه‌سازی تعیین شد. در نهایت با یک تحلیل واریانس مشخص شد که قابلیت اطمینان فیلتر دوگانه با وجود نویزهای غیرگوسی و گوسی در محدوده مناسبی قرار داشته و می‌تواند از دو فیلتر دیگر نیز کمتر شود.

## 8- مراجع

- transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *Automatic Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- [2] H. Rotstein, M. Sznaier, M. Idan,  $H_2/H_\infty$  filtering theory and an aerospace application, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 4, pp. 347-366, 1996.
- [3] P. P. Khargonekar, M. A. Rotea, E. Baeyens, Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 4, pp. 313-330, 1996.
- [4] D. Simon, H. El-Sherief, Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops, *Control Engineering Practice*, Vol. 4, No. 5, pp. 615-623, 1996.
- [5] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*, pp. 373-389, New Jersey: Willey & Sons, 2006.
- [6] F. Liang, X. Wu, S. Cui, L. Zhao, The mixed Kalman and H infinity filter based robust model following control algorithm for CABG beating heart surgery, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 543, pp. 1360-1364, 2014.
- [7] M. Masoumnezhad, M. Nahaleh-kah, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Optimal state estimation of a dynamical system corrupted with colored noises using Mixed Kalman/H-infinity filter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 67-74, 2014. (in Persian فارسی)
- [8] N. Hu, C. Wu, T. Jia, P. Ji., Hybrid filter localization algorithm based on the selection mechanism, *Proceeding of The 27th Control and Decision Conference (CCDC)*, China, Qingdao, May 23-25, 2015.
- [9] M. Masoumnezhad, A. Jamali, N. Narimanzadeh, Parameter estimation of the GMDH-type neural network using UKF filter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 59-66, 2015. (in Persian فارسی)
- [10] W. Li, Y. Jia, H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform, *Signal Processing*, Vol. 90, No. 1, pp. 3301-3307, 2010.
- [11] J. h. Wang, C. l. Song, X. t. Yao, J. b. Chen, Sigma point H-infinity filter for initial alignment in marine strapdown inertial navigation system, *Proceeding of The 2nd International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS)*, China, Dalian, July 5-7, 2010.
- [12] M. Masoumnezhad, A. Jamali, N. Narimanzadeh, Optimal design of symmetrical/asymmetrical sigma-point Kalman filter using genetic algorithms, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol.37, No.3, pp. 425-432, 2014.

- [1] G. Zames, Feedback and optimal sensitivity: Model reference